ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE PARA FAVORECER EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO UTILIZANDO COMO RECURSO EL SOFTWARE CABRI GEOMETRE

NARELIS TAHARON AHUMADA

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

2017

ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE PARA FAVORECER EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO UTILIZANDO COMO RECURSO EL SOFTWARE CABRI GEOMETRE

NARELIS TAHARON AHUMADA

Trabajo de grado para obtener el título de Magister en Pedagogía

ASESOR

JOHN ALEXANDER ALBA VÁSQUEZ

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

2017

Dedicatoria

El producto final de un arduo trabajo que dedico:

A mi hija Gabriela y a mi esposo Paul, quienes aceptaron y vivieron mi ausencia con amor, para permitirme crecer como mujer y maestra.

Y especialmente a mis Ángeles: mi hija Valentina, quien cuidó mis noches de trabajo y mi abuelo Jorge Taharón, quien colocó el cimiento donde he construido día a día mi vida.

Agradecimiento

A Dios, por mostrarme los planes perfectos que ha dispuesto para mí.

Papi, Mami, Rodo y Eymis, por secundar mis locuras, apoyarme incondicionalmente y por ser en este tiempo el soporte de mi familia.

A la Secretaría de Educación de Bogotá y a la Universidad de la Sabana, por permitirme continuar mi formación académica.

A mí asesor John Alba, por aportarme su experiencia y conocimientos.

A mis estudiantes, quienes son la razón de ser de mí labor como docente.

Tabla de contenido

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Resumen

La geometría es una rama de las matemáticas cuya aplicación se evidencia diariamente en la vida cotidiana y ayuda a potenciar habilidades y procesos como la visualización y el razonamiento, sin embargo desde los años sesenta y setenta, fue relevada del currículo priorizando al algebra, la aritmética y el cálculo. Ante esta situación el Ministerio de Educación Nacional formula en 1998 un nuevo diseño curricular denominado Lineamientos Curriculares, que más adelante complementa con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), en el que todas las áreas de la matemática escolar se reconozcan al mismo nivel. Sin embargo esta propuesta no es del todo vivenciada en el aula, situación que no es ajena en la IED Orlando Higuita Rojas, donde los resultados de pruebas internas, externas y la percepción de estudiantes y docentes dejan ver las dificultades que tienen los estudiantes dada la poca importancia que se le da a la geometría.

Surge la necesidad de realizar una investigación con el propósito del analizar los cambios en la práctica docente de la autora de este trabajo y las manifestaciones de desarrollo del pensamiento geométrico de un grupo de estudiantes del colegio, que emergen durante la implementación y evaluación de una estrategia de enseñanza aprendizaje que utiliza como recurso el software Cabri Geometre incorporado en la calculadora Voyage 200.

Para lograr este objetivo se sistematizó el trabajo de 39 estudiantes de grado séptimo que fue analizado teniendo en cuenta dos categorías, la primera enfocada al aprendizaje: Niveles de desarrollo del pensamiento geométrico (Van Hiele, 1986), y la segunda enfocada a la enseñanza: Práctica docente (Gómez, 2002).

La información y los hallazgos de la investigación se obtuvieron de la observación participante, cuyas notas fueron registradas en diarios de campo, y la aplicación de una encuesta

y un test diagnóstico. Los resultados de este último permitieron diseñar la estrategia aplicada, conformada por siete actividades donde el objeto geométrico de estudio fueron los triángulos y donde el trabajo cooperativo permitió crear ambientes de discusión e institucionalización de conceptos.

Como conclusiones de la investigación se pone de manifiesto el avance de la mayoría de los estudiantes, quienes lograron pasar del nivel de visualización al nivel de análisis, enriqueciendo su lenguaje geométrico y fortaleciendo procesos como la exploración, visualización y la argumentación. Para lo cual fue relevante la actuación, reflexión y decisiones de la docente, quien debió usar estrategias enfocadas a favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico pensadas en las condiciones e intereses de los estudiantes.

Palabras claves: pensamiento geométrico, práctica pedagógica, geometría dinámica, secundaria.

Abstract

Geometry is a branch of mathematics whose application is evidenced daily in everyday life and helps to enhance skills and processes as the viewing and reasoning, however from the sixties and seventies, it was relieved of the curriculum, prioritizing Algebra, Arithmetic and Calculus. Faced with this situation, El Ministerio de Educación de Colombia (MEN) formulated in 1998 a new curricular design called Lineamientos Curriculares, which later, these are complemented with Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), in which all areas of the mathematical school are recognized on the same level. However, this proposal is not fully experienced in the classroom, a situation that is not unknown in Orlando Higuita Rojas IED, where internal, external test results and the perception of students and teachers leave to see the difficulties that have given students the little importance given to the geometry.

The need arises to carry out a research with the purpose of analyzing the changes in teaching practice of the autor of this work and the manifestations of development of geometric thinking of a group of students in the school, which emerge during the implementation and evaluation of teaching-learning strategy using the Cabri Geometry software as a resource which is included on the Voyage 200 calculator.

In order to achieve this goal, the work of 39 seventh grade students was systematized and analyzed, taking into account two categories, the first focused on learning: Levels of development of geometric thinking (Van Hiele, 1986) and the second focused on teaching: Teaching practice (Gómez, 2002).

Information and research findings were obtained from participant observation, whose notes were recorded in field journals and the application of a survey and a diagnostic test. The results of the last one, allowed to design the applied strategy, conformed by seven activities

where the geometric object of study were the triangles and where the cooperative work allowed to create environments of discussion and institutionalization of concepts.

As conclusions of the research, the progress of the majority of the students is shown, who managed to move from the level of visualization to the level of analysis, enriching their geometric language and strengthening processes such as exploration, visualization and argumentation. For which it was relevant the action, reflection and decisions of the teacher, who had to use strategies focused on favoring the development of geometric thinking, thought in the conditions and interests of the students.

Keywords: geometric thinking, pedagogical practice, dynamic geometry, secondary.

Introducción

Teniendo en cuenta la conformación del currículo de matemáticas propuesta desde los Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional MEN, 1998), en este trabajo se aborda uno de los pensamientos que conforman los conocimientos básicos: *El Pensamiento Geométrico*.

Se pretende analizar las manifestaciones de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes que emergen durante la implementación y evaluación de una estrategia de enseñanza aprendizaje que utiliza como recurso el software Cabri Geometre incorporado en la calculadora Voyage 200, con relación a los niveles propuestos por Van Hiele (1957). Así como también, cambios en la práctica pedagógica de la docente investigadora, producto de la reflexión derivada de la evaluación de la estrategia.

El problema de investigación nace en la medida que, por un lado, se reconocen dificultades sustentadas en la literatura en cuanto a las falencias que tienen los estudiantes en el dominio de los contenidos geométricos, que les impiden una mayor comprensión de su realidad y la solución de situaciones problemas propuestos desde las pruebas externas (Gómez, 2011), referidas al pensamiento geométrico. También por otro lado, se identifican obstáculos relacionados con la enseñanza de la geometría en el colegio Orlando Higuita Rojas IED, asociados con las concepciones y creencias de los profesores y sus prácticas de aula. Lo anterior se encuentra detallado en el primer capítulo, donde además se presentan los objetivos y la pregunta de investigación.

En el capítulo dos se muestran los referentes teóricos de la investigación. En primer lugar, se presentan los antecedentes de investigaciones relacionadas a nivel internacional y nacional desde dos aspectos: El desarrollo del pensamiento geométrico referido a la teoría de Van Hiele (1957) y la Geometría Dinámica utilizando el Cabri Geometre. Posteriormente, se presentan los referentes teóricos en los que se fundamenta la investigación: la conformación del Pensamiento Matemático de acuerdo a los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), la Teoría de Van Hiele (1957), la importancia de las herramientas computacionales en el trabajo educativo, algunas de las generalidades del software Cabri Geometre y las opciones que ofrece su utilización a docentes y estudiantes.

En el tercer capítulo se explica la metodología desarrollada desde el enfoque cualitativo mediante la Investigación Acción y se especifican las categorías de análisis preestablecidas: niveles de desarrollo del pensamiento geométrico y práctica docente, y los instrumentos utilizados para la recolección de la información.

En el capítulo cuatro se describe el plan general propuesto conformado por siete actividades cuyo contenido matemático son los triángulos, y donde el software Cabri Geometre se convierte en el recurso mediador para la consecución de los objetivos planteados en cada actividad.

En el último capítulo se presentan los hallazgos del proceso investigativo. Se exponen los resultados obtenidos en el diagnóstico y se evalúan las categorías de análisis por medio de la teoría, lo que permitió establecer las manifestaciones de los estudiantes en cuanto a los niveles de desarrollo del pensamiento y los aportes realizados desde la práctica de aula. También se da respuesta a la pregunta de investigación a través de las conclusiones, se proponen recomendaciones y la reflexión pedagógica de la docente investigadora.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

1.1 Antecedentes del problema de investigación y justificación

La preocupación sobre los resultados en las pruebas Nacionales e Internacionales[1] y su incidencia en la calidad educativa, ha llevado a realizar varias investigaciones (Romero, 2014; ICFES, 2012; ICFES, 2013) en la búsqueda de propuestas que permitan vislumbrar el camino que debe recorrer la educación para la consecución del ambicioso plan de gobierno: *Colombia, el país mejor educado de América Latina en 2025* (MEN, 2015)**.**

En este marco el Ministerio de Educación Nacional ha propuesto diferentes iniciativas de política pública educativa, proyectadas a mejorar la calidad educativa, el acceso a la educación y los resultados en las Pruebas Saber y PISA (MEN, 2015).

En cuanto al área de matemáticas, el MEN ha realizado desde tiempo atrás, acciones encaminadas a mejorar la calidad de las instituciones educativas, partiendo de las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares en las que los docentes se pueden apoyar para elaborar los planes de estudio. Una de estas acciones está materializada en Lineamientos Curriculares para el área matemáticas (MEN, 1998). En este documento se propone que para la conformación de un currículo armónico se deben tener en cuenta tres componentes fundamentales:

---

[1] En Colombia se aplican las pruebas Saber 3°, 5° y 9°, que tienen como propósito “contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación colombiana mediante la realización de evaluaciones aplicadas periódicamente para monitorear el desarrollo de las competencias básicas en los estudiantes de educación básica, como seguimiento de calidad del sistema educativo” (MEN, 2010). Para los estudiantes de grado undécimo se aplica la prueba Saber 11 que permite apoyar a las instituciones de educación superior en el proceso de selección de los aspirantes a ingresar a los programas de pregrado, al tiempo que evalúa las competencias adquiridas por ellos en la educación media y la calidad de los colegios donde han sido formados (ICFES, 2015).
La prueba PISA, tiene como objetivo “evaluar hasta qué punto los alumnos cercanos al final de la educación obligatoria han adquirido algunos de los conocimientos y habilidades necesarios para la participación plena en la sociedad del saber” (OECD, 2015). Brinda información sobre la calidad educativa de los países donde los estudiantes han alcanzado un buen rendimiento y le permite a lo que no, establecer metas de mejoramiento en los procesos educativos.

Conocimientos básicos. Pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Procesos generales para el aprendizaje. El razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

El contexto. Enmarcado en el conjunto de factores asociados que emergen del entorno social, cultural, económico y/o familiar de los estudiantes y que deben constituir un recurso fundamental para la planeación del currículo, ya que es en el entorno donde el estudiante le da significación a lo que aprende y de donde se pueden tomar situaciones que generen interés por el estudio de las matemáticas (MEN, 1998).

En la práctica pedagógica que se ha desarrollado en la IED Orlando Higuita Rojas, la propuesta de los Lineamientos y Estándares se desdibuja ya que en el plan de estudios se ha estructurado teniendo en cuenta sus planteamientos. Pero la mayoría de los docentes que conforman el área limitan los procesos de aula a la enseñanza de los conjuntos numéricos, sus propiedades, operaciones y los componentes algebraicos, estableciendo a lo largo de la vida escolar estos conceptos como los conocimientos básicos en los cuales se sustenta el desarrollo competencias en matemáticas.

Como evidencia de esta situación se tienen los resultados de la encuesta realizada a los diez docentes encargados de direccionar los procesos del área en la institución para los niveles de Básica Primaria y Secundaria, Media Vocacional y Media Fortalecida (Anexo 1). Ellos coinciden en un 100% respondiendo a la pregunta: ¿Enseña toda la Geometría que se contempla en el currículo?, con la afirmación: No, y el 80% de ellos utiliza como justificación: “Porque al tratar otros contenidos me quedo sin tiempo" .En los resultados de la encuesta también se observa cómo los docentes reconocen las aplicaciones de la geometría en la vida cotidiana e incluso la conexión que tiene con otras áreas del saber (argumentos explícitos en las respuestas 2 y 3). Sin embargo al contestar la pregunta 11, que indaga sobre los pensamientos que eliminaría en los procesos de aula por falta de tiempo para abordarlo, el pensamiento espacial y sistemas geométricos es marcado con el número 3 por nueve de los diez docentes, precedido por el pensamiento métrico y el pensamiento aleatorio. Significa esto que, dentro de los cinco pensamientos que se proponen para el currículo, la mayoría de los docentes que conforman el área de matemáticas de la institución, consideran que el pensamiento geométrico al igual que el métrico y el aleatorio, pueden ser relegados en el aprendizaje. La excepción a esta afirmación la hace un solo docente quien responde a esta misma pregunta con la siguiente reflexión "La palabra eliminar, sería imposible de utilizar, más bien utilizaría la palabra fusionar. Concibo las matemáticas como una unidad, donde cada parte es tan importante como la otra, por lo que, hago el ejercicio de asociar contenidos, con el fin de abordar todos los pensamientos"

Guzmán (1993) afirma que con el movimiento hacia la renovación matemática moderna de los años sesenta y setenta, surgieron cambios poco acertados para la enseñanza de las matemáticas, percibidos en las personas que recibieron su formación académica por esa fecha. Estos cambios tuvieron que ver principalmente con el abordaje de problemas y contenidos poco interesantes, la carencia de la intuición espacial y la relegación de la geometría.

Este planteamiento se complementa con la idea de Aravena y Caamaño (2013):

> El problema de la formación geométrica se arrastra desde la década de los setenta, especialmente en Latinoamérica, donde prácticamente se dejó de lado su enseñanza, en particular en la formación del profesorado y tal como lo plantea Cantoral (1995) ha sido difícil de revertir tanto a nivel conceptual como metodológico, ya que se privilegia un trabajo algebraico eminentemente algorítmico, sin

> aplicaciones y alejado de los contextos. Esto ha tenido como consecuencia que los alumnos pierdan capacidades que son consideradas clave en los procesos geométricos, tales como la visualización, las representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (p. 141 – 142).

Los Estándares como los Lineamientos son claros en la conformación del currículo y las competencias que se deben evaluar para que los estudiantes puedan desenvolverse adecuadamente en cualquier ámbito de su cotidianidad. A pesar de esto, es posible que estas apuestas educativas en la realidad escolar no siempre se logren y que las dificultades que tienen los estudiantes en cuanto al dominio y la significación de los conceptos geométricos, que como se ha expuesto anteriormente proviene de décadas atrás, persistan hasta este momento y se evidencien entre otras situaciones, en los resultados obtenidos en las pruebas externas.

Gómez (2011) analiza cómo en la última década los promedios en el área de matemática de los colegios oficiales oscilan entre los 41 y los 46 puntos y los contenidos enseñados difieren de los contenidos evaluados. Además, mediante ejemplos muestra que en la prueba saber 5 y 9 el desempeño en los contenidos referidos al pensamiento geométrico y el pensamiento métrico, en temáticas como transformaciones en el plano, medidas de longitudes y superficies, diámetro de una esfera o conversiones mentales de dos a tres dimensiones, entre otras, el porcentaje de estudiantes que acertaron sus respuestas y que demostraron un conocimiento significativo es inferior al de aquellos que optaron por una opción incorrecta.

En las pruebas internacionales los resultados no son alentadores, refiriéndose a TIMSS Gómez (2011) afirma que para los estudiantes participantes por el grado cuarto:

> 22% se ubicó en el nivel bajo; tan solo un 7% en el medio, 2% en el alto y ninguno en el avanzado. En octavo la situación es similar, puesto que el 61% tuvo logros inferiores, el 28% se ubicó en el nivel bajo, en tanto que el 9% en el medio, 2% en el alto y ninguno en avanzado.

De acuerdo con el informe presentado por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES, 2013), en los resultados de las pruebas Pisa 2012:

> En matemáticas, el 74% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2 y el 18%, en el nivel 2. Esto quiere decir que solo dos de cada diez estudiantes pueden hacer interpretaciones literales de los resultados de problemas matemáticos; además, emplean algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas de números enteros, e interpretan y reconocen situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. En contraste, apenas 3 de cada mil alcanzaron los niveles 5 y 6. Quienes están en estos niveles tienen pensamiento y razonamiento matemático avanzados: pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas; conceptúan, generalizan y utilizan información; aplican conocimientos en contextos poco estandarizados; reflexionan sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

Refiriéndose al Colegio Orlando Higuita Rojas IED, la realidad en cuanto a logros en pruebas externas no es diferente a las descripciones realizadas. Las consecuencias de las dificultades en el área de matemáticas se ven reflejadas en los promedios de las pruebas saber. Según los reportes presentados por el ICFES, para el año 2015 podemos extraer la siguiente información:

Prueba saber grado tercero. El puntaje promedio de la institución es 308, que se encuentra un punto por encima de la media Nacional y por debajo de la media de Bogotá (335 puntos).

Prueba saber grado quinto. El puntaje promedio de la institución es 329, que se encuentra por encima de la media Nacional (302) y por debajo de la media de Bogotá (335).

Prueba saber grado noveno: El puntaje promedio de la institución (285 puntos) es inferior a la media Nacional (296 puntos) y a la media de Bogotá (325 puntos).

Prueba saber grado once. El puntaje promedio en ambas jornadas de la institución (48,9 jornada mañana y 47,3 jornada tarde) es inferior a la media Nacional (52,6) y a la media de Bogotá (56,9).

En cuanto a los componentes que evalúa la prueba, relacionados con la presente investigación, los datos más cercanos al grado de los estudiantes en los que se focaliza la investigación, indican que para el **grado quinto** en el año 2013 el componente Geométrico – Métrico es fuerte, en los años 2014 y 2015, este componente es débil (Figura 1).

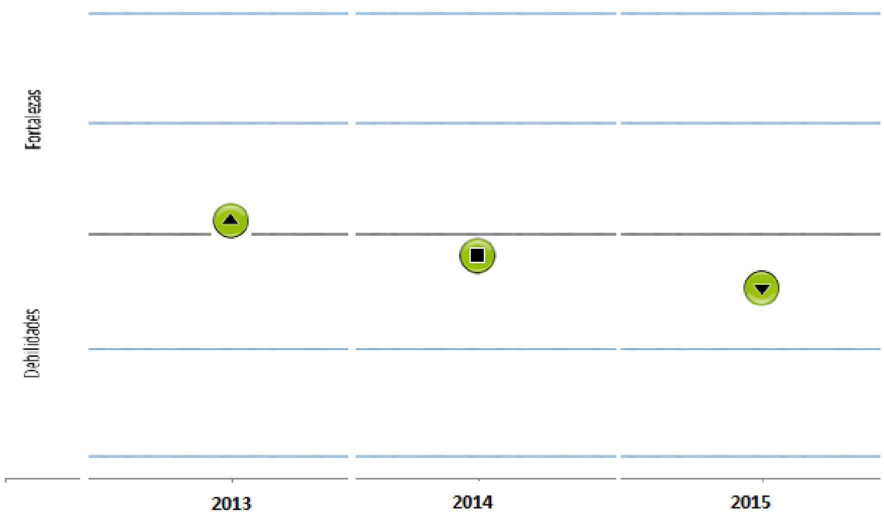


Figura 1. Desempeño en el componente Geométrico - Métrico - grado quinto

Fuente: Informe de resultados pruebas saber 5 Colegio Orlando Higuita Rojas para los años 2013 – 2015. ICFES.

Para el **grado noveno** en el año 2013 el componente Geométrico – Métrico es similar a las instituciones educativas que presentan puntajes promedio similares en el área y el grado, en los años 2014 y 2015 este mismo componente es fuerte (Figura 2).

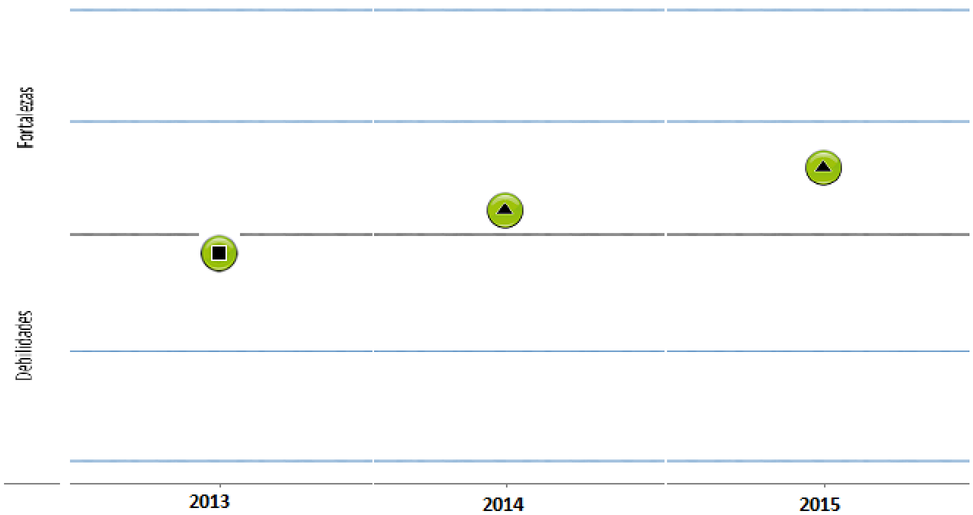


Figura 2. Desempeño en el componente Geométrico - Métrico - grado noveno

Fuente: Informe de resultados pruebas saber 9 Colegio Orlando Higuita Rojas para los años 2013 – 2015. ICFES.

Es importante resaltar que la comparación expuesta anteriormente se establece entre la IED Orlando Higuita Rojas y los establecimientos educativos con puntajes promedio similares, es decir, que se encuentran por debajo de la media de Bogotá y la media nacional. Por lo tanto se puede observar que históricamente (años 2013 – 2015) los resultados del grado noveno en la prueba correspondiente al área de matemáticas no muestran una diferencia significativa (ICFES I. C., 2015).

Las figuras 3 y 4 ilustran los resultados para los años 2013 – 2015 de acuerdo al porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en los grados quinto y noveno que son los más cercanos al curso 703.

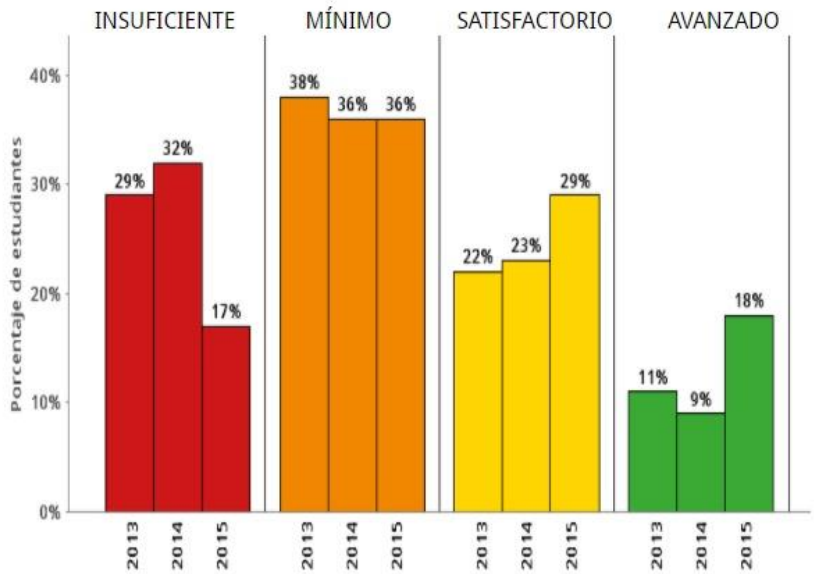


Figura 3. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño. Matemáticas - grado quinto
Fuente: ICFES 2015

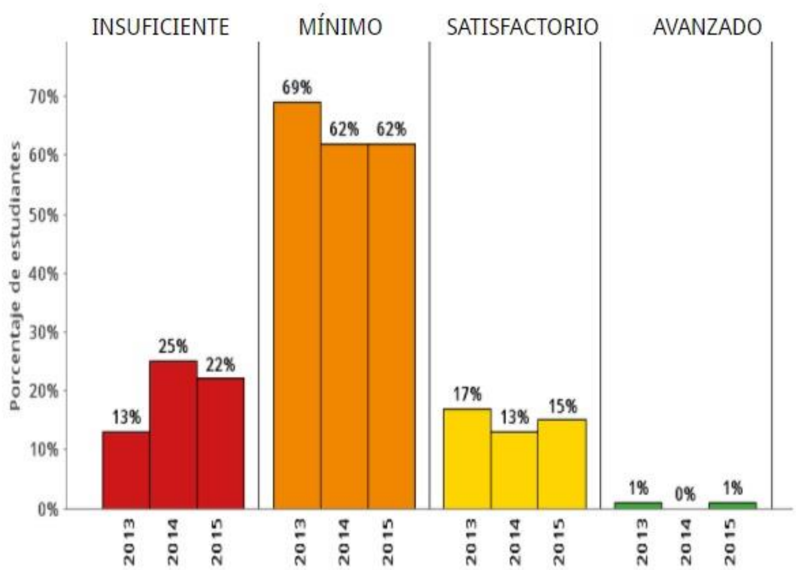


Figura 4. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño. Matemáticas - grado noveno
Fuente: ICFES 2015

Este panorama se refleja además en el Componente de Desempeño del Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE), que muestra cómo están los estudiantes con relación a los demás colegios del país, con el fin de proponer metas de mejoramiento (Colombia Aprende, 2016). De acuerdo con los datos del ISCE de la IED Orlando Higuita Rojas, el componente desempeño para el año 2016 no muestra niveles significativos de avance, más bien, se convierte en una evidencia de las falencias que presentan los estudiantes en el dominio de las competencias y los componentes evaluados en la prueba y coinciden con los reportes de las pruebas saber descritos anteriormente.

A la mirada de docentes y a los resultados institucionales de las pruebas saber en el área de matemáticas, particularmente en el componente geométrico – métrico, se agrega la percepción que tienen los estudiantes del grado séptimo acerca de los procesos realizados en el aula con relación a la geometría. Estas apreciaciones se obtuvieron mediante una encuesta (anexo 2) aplicada a una muestra conformada por miembros de los diferentes cursos (701, 702 y 703), en su mayoría estudiantes que están en la institución desde el grado transición. Dentro de los resultados obtenidos en la encuesta se resaltan los siguientes:

El 86% de los estudiantes relaciona la palabra geometría con figuras, otros elementos como líneas o ángulos, juegos como el tangram y algunos de ellos con mediciones de longitudes, área y perímetro. El 14% la relaciona con números, cálculos y operaciones.

El 18% no evidencia aplicaciones de la geometría en su cotidianidad. El 82% la relaciona con actividades como la modistería, la construcción, la carpintería y la distribución de cantidades en recipientes según su capacidad.

El 58% de los estudiantes relaciona la geometría con otras asignaturas que estudian en el colegio como artes, tecnología, informática, física y sociales, en temáticas que tienen que ver con determinación de peso de objetos, escalas de los mapas, creación de composiciones artísticas y de estructuras. El restante 42% afirma que la geometría es una parte de las matemáticas que solo se relaciona con los cálculos o que simplemente no se puede ligar a otra asignatura.

El 60% de los estudiantes afirma que, en las clases de matemáticas el estudio de temas de geometría se reduce a un período académico y el 33% afirma que este trabajo se realiza en una semana.

De acuerdo a lo anterior, se evidencia cómo los estudiantes reconocen que a los contenidos del pensamiento geométrico se les dedica muy poco tiempo en los procesos de aprendizaje de la matemática escolar, al tiempo que dan muestra de las dificultades para relacionarlos con situaciones de su entorno y de otras ciencias.

Surge entonces la necesidad que los docentes que conforman el área de matemáticas del Colegio Orlando Higuita Rojas, piensen en la importancia de tener en cuenta los Procesos Generales, los Conocimientos Básicos y el Contexto, como componentes del currículo. Además de la relevancia del aprendizaje de la geometría, su utilidad en la vida cotidiana, la manera como se puede articular con las otras ramas de las matemáticas, la posibilidad que le brinda al estudiante de desarrollar percepción espacial y visualización y su valor estético y cultural (Bressan, Bogisic, y Crego , 2000).

Lo anterior no se puede reducir solo a enseñar las construcciones de los elementos de la geometría utilizando lápiz y papel o a la memorización de algoritmos donde se aplique lo métrico, lo numérico o lo variacional. Esta apuesta debe ir más allá y tiene que ver con el establecimiento de metas y la utilización de recursos que le brinden al estudiante la capacidad de alcanzar una “percepción intuitiva o racional, del entorno propio y de los elementos que hay en él” (SED, 2007, pág. 11).

Es así como el docente para orientar las acciones en el aula, debe tener en cuenta diferentes estrategias, caminos o pistas que le permitan realizar de manera intencional la planeación e intervención con el fin de producir algún tipo de efecto en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Dentro de estas estrategias, se pueden mencionar la resolución de problemas, conexiones y la apropiación de aplicaciones tecnológicas (SED, 2007).

Teniendo en cuenta que vivimos en una época donde las herramientas computacionales gozan de gran auge, la estrategia de apropiación de aplicaciones tecnológicas se convierte en una oportunidad para enriquecer el currículo, ya que “ofrecen la posibilidad de desarrollar y construir conocimiento, por la forma innovadora de manipular los objetos matemáticos y en especial los objetos geométricos” (Moreno y Santos Trigo, 2001). Aquí no se tiene en cuenta la herramienta en sí misma sino la forma en que dicha herramienta dinamiza y posibilita la apropiación de conceptos geométricos que son intangibles en el entorno cotidiano.

En este de orden de ideas se hace necesario revisar las prácticas que hasta el momento ha realizado la docente investigadora y cómo se ha aproximado a la enseñanza de la geometría desde su aula. Para esto se propone planear, implementar y evaluar una estrategia de enseñanza aprendizaje que utilice un ambiente de geometría dinámica, en este caso el software Cabri Geometre incorporado en la calculadora gráfica Voyage 200, con el fin de evidenciar la incidencia que las actividades propuestas puedan tener en el desarrollo de los niveles de pensamiento geométrico de sus estudiantes. A la vez que le permitan a la docente reconstruir su propia práctica con el propósito de comprenderla y mejorarla. En este marco surge la siguiente pregunta de investigación:

1.2 Pregunta de investigación

¿Qué cambios en la práctica docente y en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes del curso 703 del Colegio Orlando Higuita Rojas, se pueden observar durante la implementación y evaluación de una estrategia de enseñanza aprendizaje que utiliza como recurso el software Cabri Geometre incorporado en la calculadora Voyage 200?

1.3 Objetivos

1.3.1 General

Analizar los cambios en la práctica docente y las manifestaciones de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes del curso 703 del Colegio Orlando Higuita Rojas, que emergen durante la implementación y evaluación de una estrategia de enseñanza aprendizaje que utiliza como recurso el software Cabri Geometre incorporado en la calculadora Voyage 200.

1.3.2 Específicos

- Reconocer las manifestaciones de avance con relación a los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes durante la implementación de la estrategia.
- Establecer cambios en la práctica producto de la reflexión de la docente investigadora durante la aplicación de la estrategia de intervención.
- Identificar las fortalezas y debilidades presentadas durante la implementación de la estrategia.

Capítulo 2. Referentes Teóricos

2.1 Antecedentes de investigaciones relacionadas

De acuerdo al interés de la investigación se realizó la revisión bibliográfica de investigaciones nacionales e internacionales relacionadas con al pensamiento geométrico, Teoría de los Van Hiele (1957) y la utilización de Software Cabri Geometre en las prácticas de aula.

El Pensamiento Geométrico y Teoría de Van Hiele (1957). En Colombia se han realizado investigaciones que abordan el concepto de Pensamiento geométrico espacial y su proceso de desarrollo:

Los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional en 1998, lanzan una propuesta para la conformación de lo que denominan "currículo armónico", estableciendo tres componentes fundamentales: conocimientos básicos, procesos de aprendizaje y contexto. Dentro de los conocimientos básicos distribuyen los contenidos en cinco pensamientos y sistemas: Numérico, Variacional, Métrico, Geométrico – espacial y aleatorio.

Para "dar mayor concreción a los lineamientos expedidos, de manera que las instituciones escolares cuenten con una información común para formular sus planes de estudio, respetando su autonomía" (MEN, 2002), el MEN con la ayuda de académicos y docentes de diferentes regiones del país, propone los Estándares Curriculares para las áreas de matemáticas, lengua castellana y ciencias naturales. Estos especifican los mínimos o metas medibles que cada estudiante debe saber de acuerdo al nivel o grado en el que se encuentra, qué debe hacer y cómo lo debe hacer (MEN, 2002). De esta forma las IED formulan los planes de estudio en el área de matemáticas en cuanto a contenidos y tiempos de trabajo, con la intención y responsabilidad de trabajar e integrar las temáticas y no reducir el currículo a uno u otro pensamiento. Además, de potenciar los diferentes procesos de la actividad matemática de los estudiantes.

En este contexto, la Alcaldía Mayor de Bogotá y la Secretaría de Educación generaron los documentos ***Desarrollo del Pensamiento Espacial y Geométrico*** (1999) y ***Orientaciones Curriculares para el Campo del Pensamiento Matemático*** (2008)**,** como material de apoyo a docentes e instituciones educativas. En los que proponen actividades lúdicas y hacen un análisis reflexivo de las teorías e investigaciones sobre el pensamiento matemático y las prácticas pedagógicas, con el fin de mejorarlas y transformarlas, como pasos en la búsqueda de la excelencia educativa en los colegios del Distrito.

En Colombia se han realizado varios trabajos que toman el modelo de Van Hiele (1957) como referente teórico para proponer sus unidades de enseñanza, no solo en geometría sino que es adaptado al trabajo con contenidos de otras ramas de las matemáticas que se apoyan de componentes geométricos y del desarrollo de la habilidad visual. Dentro de las investigaciones realizadas en los últimos diez años tenemos:

Utilizando una muestra de 34 estudiantes de dos instituciones del departamento de Santander, Gualdrón y Gutiérrez (2007) realizaron un trabajo cuyos objetivos fueron fortalecer los niveles I y II del razonamiento de Van Hiele y caracterizar dichos niveles de acuerdo con la semejanza de figuras planas, teniendo en cuenta que hasta ese momento la revisión bibliográfica no arrojó como resultado investigaciones que propusieran descriptores para semejanza en el modelo Van Hiele. Así sugieren unos descriptores iniciales para los niveles de reconocimiento y análisis, teniendo en cuenta los hallazgos evidenciados durante el análisis de los resultados de la experiencia.

Estudiantes de maestría de la Universidad de la Amazonía realizaron una investigación (Morales y Majé, 2010) que tuvo como objetivo contribuir al desarrollo espacial y los niveles de la competencia matemática formular y resolver problemas, mediante el estudio del objeto matemático cuadriláteros con el apoyo de un programa de geometría dinámica con estudiantes de grado séptimo. Como categorías de análisis tomaron: a) Pensamiento y competencias matemáticas, b) Objeto de estudio: Cuadrilátero, c) Resolución de problemas y desarrollo del pensamiento espacial, d) Niveles de Van Hiele. Como resultados del estudio, se hace un análisis y una reflexión sobre las pocas investigaciones a nivel nacional y municipal relacionadas con el propósito propuesto, y las diferencias entre el currículo propuesto a nivel nacional e institucional y lo que se trabaja en las clases de geometría, donde el docente continuaba siendo el transmisor de los conceptos y el poseedor de las habilidades geométricas que debe desarrollar el estudiante. Con el diseño de la propuesta se estructura la clase, se le asignan roles específicos al maestro y al educando y se logra incluir la geometría dinámica como una herramienta que favorece la aprehensión del objeto de estudio y el avance de los escolares en los niveles de Van Hiele (Morales y Majé, 2010).

González y Arévalo (2011) desarrollaron la propuesta denominada "***La vuelta al mundo en ocho días".*** Mediante un viaje imaginario alrededor del mundo se conocían costumbres, lugares y países diferentes, a la vez que se analizaban las propiedades y características de las figuras bidimensionales y tridimensionales. El propósito de la investigación fue planear, diseñar y ejecutar una unidad didáctica enfocada a desarrollar el pensamiento espacial en estudiantes de grado segundo. Se pretendía que los estudiantes a partir de los recursos didácticos identificaran la importancia de reconocer en su entorno los elementos geométricos trabajados mediante representaciones de la realidad. Como sustento teórico se tuvo en cuenta los referentes de varios autores: Dickson (1991) y Lappan y Wibter (1979), quienes hablan sobre el aprendizaje de la geometría en los niños preescolares y la geometría bidimensional y su relación con la tridimensional; La propuesta de Godino (2006) con relación a los recursos didácticos, su clasificación y caracterización; Brousseau (1986) que describe la teoría de situaciones didácticas y los postulados de Hoffer (1990) y Van Hiele (1957) para hablar del desarrollo del pensamiento geométrico.

Ramírez (2014) desarrolló una investigación con el fin de caracterizar el avance cognitivo de los aprendices mediante la aplicación de una estrategia didáctica basada en el Modelo de Van Hiele (1957) y mediada por el software de geometría dinámica Geogebra. La población de estudio fue un grupo de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Pedro Luis Villa de la ciudad de Medellín. En esta estrategia se tomaron como objetos de estudio los triángulos y cuadriláteros y se abarcó el proceso de visualización y análisis en los niveles I y II. Como resultado se obtuvo la caracterización de los estudiantes en cuanto a su nivel de avance en el razonamiento de Van Hiele y el reconocimiento de la importancia de la geometría dinámica como mediadora en la consecución de los objetivos.

A nivel internacional también se han realizado estudios relacionados con el desarrollo del pensamiento espacial y el modelo de Van Hiele (1957), dentro de los que se citan los siguientes:

Guillén (2004) realizó una investigación donde describe la evolución de la escuela holandesa y los planteamientos del modelo Van Hiele (1957) adaptado a la geometría de sólidos. Habla de las acciones de describir, clasificar, definir y demostrar como componentes esenciales de la práctica matemática y centra la mirada en la acción de describir, ya que dice hace parte de todos los niveles propuestos por Van Hiele en su modelo.

En Argentina se desarrolló una investigación (Beltrametti, Esquivel, y Ferrari, 2005) con el fin de caracterizar las posibilidades y progresos de los estudiantes del profesorado en matemáticas que cursan la asignatura de geometría, métrica y trigonometría en la construcción del concepto de simetría axial empleando el modelo de Van Hiele y el software Cabri Geometre.

Con el fin de verificar o rechazar la hipótesis de que los alumnos que emplean o utilizan el software en una situación de enseñanza aprendizaje avanzan del nivel de deducción informal a niveles superiores según la teoría de Van Hiele (1957). Para la intervención se aplicaron dos pruebas a una muestra de 15 estudiantes. Las pruebas fueron diseñadas considerando la propuesta de Jaime y Gutiérrez (1996) para evaluar las respuestas de los estudiantes con relación a la teoría de Van Hiele. Como resultado del estudio se obtuvo que la mayoría de los estudiantes que utilizaron el software alcanzaron a adquirir niveles superiores de razonamiento al que tenían, a diferencia de quienes no lo usaron. Sin embargo resaltan que persisten las dificultades en realizar razonamientos de rigor que son deseables para los estudiantes universitarios (Beltrametti, Esquivel y Ferrari, 2005).

Como resultado del trabajo investigativo de Mata (2006) se observa cómo las fases de aprendizaje propuestas en el modelo Van Hiele (1957) y una planeación basada en la realidad y las necesidades del estudiante, posibilitan que tenga avances significativos en su proceso de desarrollo del pensamiento geométrico. La investigación fue realizada con estudiantes de secundaria del estado San Luis Potosí en México, con el propósito de aportar elementos que propendan por mejorar el aprendizaje de geometría analítica con relación al modelo Van Hiele. La principal herramienta del estudio fue el uso de estrategias como la exploración e interacción, a partir de las que se pretende que el estudiante aprenda haciendo.

González, Guillén y Figueras (2006) realizaron una investigación denominada *Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio*. Su propósito fue utilizar el modelo de competecia inicial para interpretar los modelos de enseñanza de sólidos en planes de formación para maestros, por medio de la elaboración de una unidad de enseñanza para profesores de educación primaria en la que observó la transferencia que ellos hacian a sus aulas. Como resultado del trabajo se evidencia la importancia de hacer concientes a los docentes en formación sobre su papel como aprendices de geometría y futuros maestros, en cuanto a las ideas erróneas que hay en el aprendizaje de los objetos geométricos, y llevarlos a reflexionar sobre los obstáculos a los que se pueden enfrentar en las prácticas de aula, motivo por el cual deben centrar su planeación en las necesidades del estudiantes y su forma de aprender.

Díaz (2010) realizó un estudio con estudiantes de primer grado de una escuela de Chile con el objetivo de conocer el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes en el tema de transformaciones isométricas basado en la teoría Van Hiele. Fue una investigación de carácter cualitativo que utilizó como instrumentos para la recolección de la información la observación participante y entrevistas a los estudiantes. Como producto final se evidenció que los estudiantes dan muestra de ubicarse en el nivel 1 de razonamiento de acuerdo con la teoría. En la reflexión pedagógica se destaca que existen dificultades en los procesos de aprendizaje de la geometría relacionados con el desarrollo de habilidades como la comprención y la dependencia de la explicación docente para la realización de las actividades. También se observa que los estudiantes carecen de conocimiento geométrico elemental, por lo tanto se propone que en futuras investigaciones relacionadas, se utilice un ambiente mediado por un software por medio del cual se potencie la consecusión de los objetivos propuestos.

Con estudiantes de primer grado de educación secundaria fue ralizada una investigación en Argentina (Villarroel y Sgreccia, 2011) cuyo objetivo fue identificar y caracterizar los materiales didácticos para enseñar geometría y reconocer las habilidades que se desarrollan con la utilización de dichos materiales. La investigación fue cualitativa y tomó como referentes teóricos la Educación Matemáticas Realista desarrollada en Holanda por Freudenthal (1973) a finales de los años sesenta, las habilidades geométricas propuestas por Hoffer (1981) y la teoría de los Van Hiele (1957) para el desarrollo del pensamiento geométrico. Al finalizar el proceso se reconocieron diferentes materiales concretos como facilitadores y potenciadores de habilidades geométricas, entre los que se mencionan el tangram, el origami, los editores de geométria dinámica y los rompecabezas geométricos, mediante los cuales se puede lograr avanzar en el desarrollo del pensamiento geométrico, de acuerdo a la intencional pedagógica de la fase de la teoría de Van Hiele en la que sean utilizados (Villarroel y Sgreccia, 2011).

Aravena y Caamaño (2013) realizaron un estudio con 625 estudiantes de instituciones municipalizadas de la región del Maule en Chile, que es una población con alto indice de vulnerabilidad. Fue una investigación cuantitativa bajo dos hipótesis a saber:

> "H1: Los alumnos de educación media de alta vulnerabilidad presentan obstáculos y dificultades en el reconocimiento y utilización de propiedades matemáticas en la formulación, uso y clasificación de definiciones de los objetos geométricos. H2: El alumnado de secundaria posee un bajo grado de adquisición en los procesos argumentativos, deductivos y de demostración" (pág. 145).

Como objetivos se propusieron diseñar e implentar un instrumento de diagnóstico que permitiera caracterizar y jerarquizar el nivel de razonamiento geométrico alacanzado por los estudiantes, desde el inicio de su escolaridad hasta el segundo año de la educación secundaria. Además de realizar un análisis cuantitativo del grado de adquisición de los procesos de razonamiento según el modelo Van Hiele (1957) e identificar dificultades y obstáculos en el proceso de enseñanza. Como resultado se logró verificar las hipótesis planteadas, concluyendo que los estudiantes se encuentran en el nivel más básico de razonamiento, relacionado entre otras cosas, con el aprendizaje tradicional y las condiciones desiguales de la población. Por tal motivo, recomiendan a los docentes, desde que inician su formación, relacionarse con estrategias que permitan plantear problemas, trabajar la visualización, la intuición geométrica, formular hipótesis, analizar propiedades fomentar la comunicación matemática, para así avanzar en la adquisición del lenguaje matemático y posibilitar acercamientos hacia la demostración formal.

Ángel Gutiérrez ha centrado sus investigaciones en la Didáctica de la Geometría, especialmente en el modelo de Van Hiele (1957). Los aportes que ha realizado en compañía de otros autores se encuentran en diferentes documentos donde además de analizar, validar y discutir las características propuestas en la teoría original, se proponen actividades desde las cuales se pueden abordar diferentes temas de la geometría aplicando el modelo Van Hiele (1957). La más reciente investigación (Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016) fue denominada "Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile". Su principal propósito fue mejorar el aprendizaje de la geometría y la adquisición de destrezas de razonamiento matemático de estudiantes de segundo grado. La investigación utilizó un grupo experimental y un grupo control, a los que además de las actividades de la unidad de enseñanza se les aplicó un pretest y un postest para hacer una diferenciación en la variabilidad de los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico según el modelo Van Hiele (1957). Dentro de los principales hallazgos e implicaciones didácticas que se obtuvieron se pueden mencionar: a) la importancia de la utilización del Modelo de Van Hiele (1957), por encima de la enseñanza tradicional de la geometría, visualizada en el nivel de avance de los estudiantes del grupo experimental por encima de los del grupo control, b) la necesidad de que los docentes potencien en los estudiantes desde edades iniciales procesos de resolución de problemas, argumentación, formulación de hipótesis y conjeturas, adquisición y manejo del lenguaje geométrico, y c) El conocimiento y manejo del modelo de Van Hiele (1957) por los docentes que guían procesos de aprendizaje de geometría y la utilización de este modelo en la planeación y ejecución de las prácticas de aula.

Utilización de software Cabri Geometre. En la presente investigación la geometría dinámica, en especial el software Cabri, se reconoce como un elemento importante. Por este motivo a continuación se citan algunas de las experiencias realizadas a nivel nacional e internacional en los últimos años, que pueden aportar al desarrollo de este trabajo:

Teniendo en cuenta el auge de la tecnología y los recursos informáticos, la incorporación de los mismos como apoyo al currículo de matemáticas ha significado un desafío para el país. Desde el año 2000 el Ministerio de Educación Nacional con la asesoría de Dr. Luis Moreno Armella, la coordinación regional de los departamentos de matemáticas de las facultades de educación y ciencias de las universidades, lideró el proyecto "*Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media*" (Castiblanco y Moreno, 2002). Esta experiencia tuvo como propósitos mejorar la calidad de la educación matemática, la formación permanente y continuada de docentes, la conformación de grupos regionales apoyados por las Secretarias de Educación y las universidades, y la sistematización de las reflexiones con relación a las prácticas de aula que incluyen el uso de herramientas computacionales. El ejercicio se llevó a cabo en dos fases: fase piloto y fase de expansión y profundización. El producto se sistematizó en varias publicaciones donde se reflejan los avances con relación a los propósitos antes mencionados (Castiblanco y Moreno, 2002).

Mamián (2010) desarrolló una investigación con estudiantes de grados octavo y noveno de una institución oficial de Arménia, en el marco del proyecto "Juega y construye matemáticas". La propuesta tomó como referente la teoría de los Van Hiele (1957) para el desarrollo del pensamiento geométrico y utilizó la versión Cabri II Plus para su puesta en marcha. Como conclusiones se tienen la comprensión lógica de los objetos geométricos trabajados, el aprendizaje estructurado y significativo, la adquisición de argumentos para soportar una respuesta, el desarrollo de competencias computacionales y la actitud positiva de los estudiantes frente al trabajo propuesto. A pesar de que se enlistan en las conclusiones varios beneficios del trabajo con geometría dinámica, también el autor enumera algunas dificultades en el proceso de investigación, por ejemplo la evidente poca relevancia que tiene la geometría en el currículo de matemáticas que desencadena el desconocimiento de conceptos geométricos básicos y el bajo dominio de herramientas computacionales que implican el conocimiento de lenguaje matemático.

Flores (2011) desarrolló una propuesta que pretendía dar una posible respuesta a la pregunta ¿Cómo contribuir en el proceso de abstracción de los objetos geométricos del espacio, potenciando niveles de razonamiento a través de poliedros y del uso de herramientas tecnológicas?, para lo cual generó una cartilla que contiene una secuencia de actividades para trabajar con estudiantes de ciclo III, utilizando el Software Cabri en su versión 3D, con el fin de favorecer el desarrollo de procesos de razonamiento como vehículo para la comprensión, el análisis y la argumentación. Tuvo como referente teoríco el modelo Van Hiele (1957) y a partir de su adaptación al trabajo con sólidos propuesto por Guillén (2004), planteó la secuencia de actividades que apuntaron al desarrollo de las características y habilidades propias de cada nivel.

Martín Acosta ha centrado su interés por la realización de un amplio número de investigaciones y la escritura de documentos, en los que el tema fundamental es el uso de las herramientas computacionales, en especial del Cabri, como mecanismo para fortalecer las prácticas de aula. Entre ellos tenemos:

Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica (Acosta, 2010), es un documento de reflexión sobre el uso de las TICS en la enseñanza y cómo ha potenciado la construcción de la teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau (1986), dentro de la que se analiza en especial el rol del docente y el papel de la geometría dinámica. Se propone cómo realizar un diseño de una secuencia de actividades y se dan ejemplos utilizando como objeto de estudio la simetría axial. En la reflexión se exponen las ventajas que se generan por el uso de la geometría dinámica visualizadas en el aprendizaje efectivo y en el sentido que estos aprendizajes toman a través de las experiencias cotidianas de los estudiantes (Acosta, 2010).

Se realizó una investigación cualitativa en una institución educativa de Bucaramanga, con el fin de describir y analizar las ventajas del uso de Cabri Geometre como facilitador del aprendizaje por adaptación en el marco de la teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau (1986). La intercación con el software le permitió a los estudiantes adquirir conocimientos de forma significativa y reconstruir conceptos relacionados con la traslación de forma independiente, es decir, sin las indicaciones o explicaciones previas del docente. Se le da valor al papel activo que asume el estudiante en su aprendizaje y al rol del docente con guía del proceso en aula (Acosta, Ávila y Gómez, 2010).

Relacionada con la investigación anteriormente descrita, Acosta, Delgado y Oscar (2010), desarrollan un trabajo que tiene como objetivo analizar el diseño e implementación de las actividades sobre el concepto de traslación con el programa Cabri Geometre, teniendo en cuenta la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986). Mediante el analisis de la experiencia, se observa cómo los estudiantes de forma gradual descubren propiedades de la traslación que no se perciben facilmente en ambientes donde se utiliza la enseñanza tradicional de lápiz y papel.

Además, se percibe un mejoramiento de la comunicación y expresión escrita, toda vez que los estudiantes deben plasmar las conclusiones que van resultando en el proceso. Finalmente se concluye que a pesar que las prácticas de aula que utilizan herramientas computacionales requieren mas tiempo y mayor esfuerzo en ejercicios como la planeación, el seguimiento y la evaluación, permiten lograr aprendizajes efectivos y significativos a partir de los aportes y la reflexión de los estudiantes. En ellas contrario a lo que se piensa, el papel del docente no pierde valor, por el contrario recobra importancia porque por sí solos los recursos no realizan el trabajo, sino que éste debe ser planeado y guíado siguiendo una intencionalidad pensada y propuesta previamente a partir de las necesidades de los estudiantes.

Resolución de problemas geométricos a través de matemática experimental y geometría dinámica: construcción del lugar geométrico (Acosta, Mejía, Rodríguez y Sabogal, 2011), es un artículo donde se explica el paso a paso para solucionar un problema usando los programas de geometría dinámica, en este caso Cabri Geometre. El ejemplo que se toma es *"Dado un triángulo cualquiera, encontrar el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que el triángulo simétrico lateral del triángulo dado, sea rectángulo".* Como conclusión de la experimentación se plantea una conjetura que podría permitir encontrar el conjunto solución del problema y que luego es formalizada y validada (Acosta, Mejía, Rodríguez y Sabogal, 2011).

En el documento *Geometría experimental en el espacio: uso de la teoría de homografía y del software cabri 3D para resolver un problema de geometría en el espacio* (Acosta y Rodríguez, 2014), se parte de un problema base y a partir de la experimentación y construcción usando el software Cabri 3D, se analiza la situación, se formulan conjeturas y se formaliza una solución apoyándose en la teoría de homografía. La teoría de homografía definida en Chasles (1852), describe una transformación que conserva el biocociente o proporción armónica, considerada la propiedad proyectiva fundamental[2]. Se concluye que la formalización como proceso indispensable en la actividad matemática, es una oportunidad legítima que entre otras cosas, ofrece el trabajo con programas de geometría dinámica (Acosta y Rodríguez, 2014).

A nivel internacional se citan algunos de los trabajos más recientes cuyo aspecto central es la utilización de la geometría dinámica:

Sordo (2005) realiza un estudio sobre la influencia del programa Geometre's Sketchepad en el aprendizaje de la geometría, por medio del diseño, aplicación y análisis de una estrategía didáctica. La investigación fue de carácter mixto y tomó como muestra dos grupos de estudiantes de 3° de Educación Primaria de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid. Con un primer grupo trabajó y analizó la estrategia propuesta y con el otro se utilizó la enseñanza tradicional. La estrategía estuvo basada en el planteamiento de situaciones que los estudiantes debían resolver paso a paso, con la ayuda de los elementos geométricos necesarios para tal fin. Dentro de las conclusiones se puede observar cómo el uso de los ambientes donde se utilizan nuevas tecnologías favorecen habilidades como la visualización, ya que por medio de la experimentación el estudiante produce y redescubre los conceptos, y por consiguiente, tiene una mayor comprensión de contenidos y mejora procesos matemáticos, como la resolución de problemas.

Murillo y Lorenzón (2009) realizarón un análisis sobre la eficacia de un entorno interactivo con relación a la aquisición de competencias matemáticas y comunicativas relacionadas con geometría. El estudio se realizó con estudiantes de secundaria y muestra cómo los programas computacionales influyen en la progresiva comprensión de contenidos que se utilizan para la resolución de problemas.

---

[2] Las propiedades proyectivas son aquellas que se transfieren de una(s) figura(s) a otra(s) construida(s) a partir de la primera.

Otra investigación realizada en 2009 en México, indagó sobre la funcionalidad de los ambientes de aprendizaje mediados por programas de geometría dinámica, tomando como tema la simetría. El estudio exploratorio se realizó con estudiantes cuyas edades oscilaban entre los 12 y 13 años y como instrumentos para la recolección de la información se utilizaron cuestionarios, videograbaciones y los resultados de las guías de trabajo. Se pudo observar a partir de las evidencias, la capacidad que los estudiantes tienen para proponer alternativas innovadoras de solución a través de las herramientas que les ofrecen recursos computacionales, como el Cabri Geometre II y los juegos interactivos. Se observa además que los estudiantes logran avanzar en la comprensión de los temas trabajados mejorando así su aprendizaje (Rodríguez y Verónica, 2009).

Gutiérrez y Jaime (2015), realizaron una investigación experimental para analizar cómo estudiantes con altas capacidades matemáticas aprenden el concepto sobre paralelismo mediante la solución de problemas mediados por el Cabri 3D. La estrategia estuvo compuesta por 34 actividades a partir de las cuales los estudiantes generaron y validaron conjeturas alrededor de la situación planteada. A través del trabajo se observó las fortalezas de los ambientes de aprendizaje que incorporan programas de geometría dinámica, entre las que los autores destacan: la evolución de la habilidad visual.

En las investigaciones citadas se puede observar el interés de la comunidad académica por indagar sobre el desarrollo del pensamiento geométrico basados en la teoría de Van Hiele (1957), y la forma de favorecer a los estudiantes en el aprendizaje utilizando como medios distintos recursos computacionales para el desarrollo de los procesos de la actividad matemática.

Es así como la presente investigación constituye un recurso que aporta a la validación de los resultados obtenidos en otras investigaciones. Con la diferencia que al realizarse en un entorno donde existe resistencia por la utilización de modelos de enseñanza no tradicional y por la implementación de las TICS, enriquece el conocimiento académico y abre puertas a cambios institucionales y locales. Apoyando de esta manera las políticas distritales y nacionales de calidad educativa, que desde hace varios años promueven la incorporación de la tecnología en el currículo de matemáticas.

Es importante resaltar que cuando se habla del uso de las TICS, más allá de pensar en la presencia del recurso en el aula, se tiene en cuenta las capacidades que estas pueden desarrollar en los estudiantes y cómo puede potenciar y transformar las prácticas de aula.

2.2 ¿De qué trata el pensamiento matemático?

El pensamiento humano es considerado como un proceso mental de orden superior relacionado con "el desarrollo de nuevos «sentidos» ante las situaciones" (Segovia , 2000, pág. 23). Es así como el ser humano selecciona, ordena e interpreta la información que tiene en el cerebro para dar solución a un problema y/o razonar sobre una situación, utilizando mecanismos como la memoria, la atención, los procesos de comprensión y el aprendizaje, entre otros (Dovidoff, 1989).

Como proceso mental relacionado con las matemáticas el término: pensamiento mátematico, ha sido definido en SED (2007) como "el desarrollo de la dimensión lógico – matematica, entendida como la capacidad de establecer relaciones y operar con estas" (pág. 30).

Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2005) usan en el término pensamiento matemático para referirse a las "formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas" (pág. 18). Sin embargo, los mismos autores aclaran que en la actividad humana es natural el uso de procesos como razonar y resolver problemas, por tanto se podría hablar de *pensamiento matematico* como “todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana” (Cantoral y otros, 2005, pág. 19) y confrontar esas ideas con la realidad mediante la ejecución de las diversas tareas que se realizan diariamente.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede afirmar que una persona desarrolla nuevos sentidos y construye ideas matemáticas en su mente de acuerdo al objeto matemático con el que tengan contacto. Por lo cual los lineamientos curriculares establecen cinco tipos dentro del pensamiento matemático, teniendo en cuenta los objetos o situaciones que se analizan y que le exigen a la persona aplicar los procesos necesarios para explorar, entender y resolver una determinada tarea. En las prácticas de aula el pensamiento matemático se desarrolla cuando convergen diferentes procesos propios de la actividad matemática, los tipos de pensamientos y sistemas que la integran y las situaciones del contexto, lo que en conjunto le da significación al objeto matemático estudiado (SED, 2007).

Es por ello que en los estándares básicos de competencias se declara que "en el conocimiento matemático también se han distinguido dos tipos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental" (MEN, 2006, pág. 50). El conocimiento conceptual tiene que ver con la adquisición cognitiva que los estudiantes van haciendo y las conexiones con otros conocimientos, por lo que se vincula con el saber qué y el saber por qué. El conocimiento procedimental tiene que ver con la acción, el uso de técnicas, estrategias y destrezas para plantear respuestas a diferentes situaciones, por tanto está vinculando al saber cómo (MEN, 2006). Los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, definen los conocimientos básicos como los “procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático” (MEN, 1998).

En la siguiente tabla se describen los conocimientos básicos y las habilidades potenciadas desde cada uno.

Tabla 1. Conocimientos Básicos en el área de matemáticas

Conocimiento	Descripción
Pensamiento Numérico y sistemas numéricos	Utiliza el significado de los números, los sistemas de numeración, las operaciones, las relaciones entre los números y los procesos de cálculo y estimación, como su objeto de estudio, fortaleciendo procesos de comprensión, calculo y estimación (MEN, 2006).
Pensamiento Espacial y sistemas geométricos	Tiene que ver con la percepción del mundo físico y los objetos que hay en él, asociado a la interpretación y manipulación de objetos que constituyen representaciones mentales, que se pueden asociar con elementos del entorno (SED, 1999).
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Pretende llegar a cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes que surgen en la construcción de los modelos geométricos. Además, tiene que ver con el uso adecuado de los sistemas de medición en situaciones de la vida cotidiana (MEN, 2006).
Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Tiene que ver con interpretación de eventos que provienen de causas difíciles de determinar, ya que no se tiene certeza de que los generan. Por lo tanto, se requiere contar con datos sobre dichos sucesos, con el fin de crear modelos que permitan tomar una postura crítica con cierto grado de seguridad (SED, 2007)
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	Involucra conceptos y procedimientos relacionados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas que tienen que ver con la variación de conjuntos de números o magnitudes, que se pueden representar utilizando diversos registros, como: lenguaje común, lenguaje algebraico, tablas o gráficos (SED, 2007)

2.2.1 El Pensamiento Geométrico: un acercamiento hacia su definición.

Inicialmente se aclara que aunque en los documentos propuestos por el MEN y la SED se habla de Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, para el desarrollo de la presente investigación se trabajará con el concepto de *Pensamiento Geométrico*, con el objeto de unificar términos. Además, porque es así como se cita en los referentes teóricos que abordan al proceso de desarrollo de dicho pensamiento.

Según Vasco (2006, citado en SED, 2007) se refiere al pensamiento espacial

> como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan respresentaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales, contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales (pág. 65).

De ahí que diversas investigaciones afirmen que la interpretación y comprensión del entorno y los elementos que hay en él, es la situación a la que más se enfrentan las personas y en la que los elementos geométricos tienen significación. Es por ello que desde las matemáticas escolares se debe propender por la generación de estrategias que permitan el desarrollo de competencias y/o habilidades de tipo geometrico (SED, 1999).Esto es tenido en cuenta en teorías que exponen diversas habilidades y capacidades que los seres humanos tienen para relacionar los conocimientos con los que cuenta a la hora de resolver determinada situación. Especificamente,

> Howard Gardner en su teoría de las inteligencias múltiples considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial (MEN, 1998, pág. 56).

Se concluye entonces que el ***pensamiento geométrico*** se refiere a las diversas representaciones mentales que un ser humano genera de los elementos del espacio, sus caracteristicas, propiedades, atributos, la acomodación y/o transformación de dichos elementos y su relación con otros. Lo cual le permite razonar y resolver una situación que pueden tener origen en su cotidianidad y que requieren de la utilización de las ideas o conceptos que ha construido.

Teóricamente hablando resulta complejo determinar componentes exactos para la conformación del pensamiento geométrico, ya que no hay literatura suficiente que soporte dicha estructura. Sin embargo en el documento "*Orientaciones curriculares para el campo del pensamiento matemático*" (SED, 2007) se proponen como componentes: la localización, el estudio de la forma e inferencia y validación.

Bajo la descripción de dichos componentes, es posible que se generen las experiencias de aula que permitan a los estudiantes avanzar en el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico y al docente identificar dicho avance, a la vez que evalúa sus experiencias con el fin de mejorarlas teniendo en cuenta el nivel pensamiento que los educandos van alcanzando.

En el Figura 5 se explican los componentes citados anteriormente.

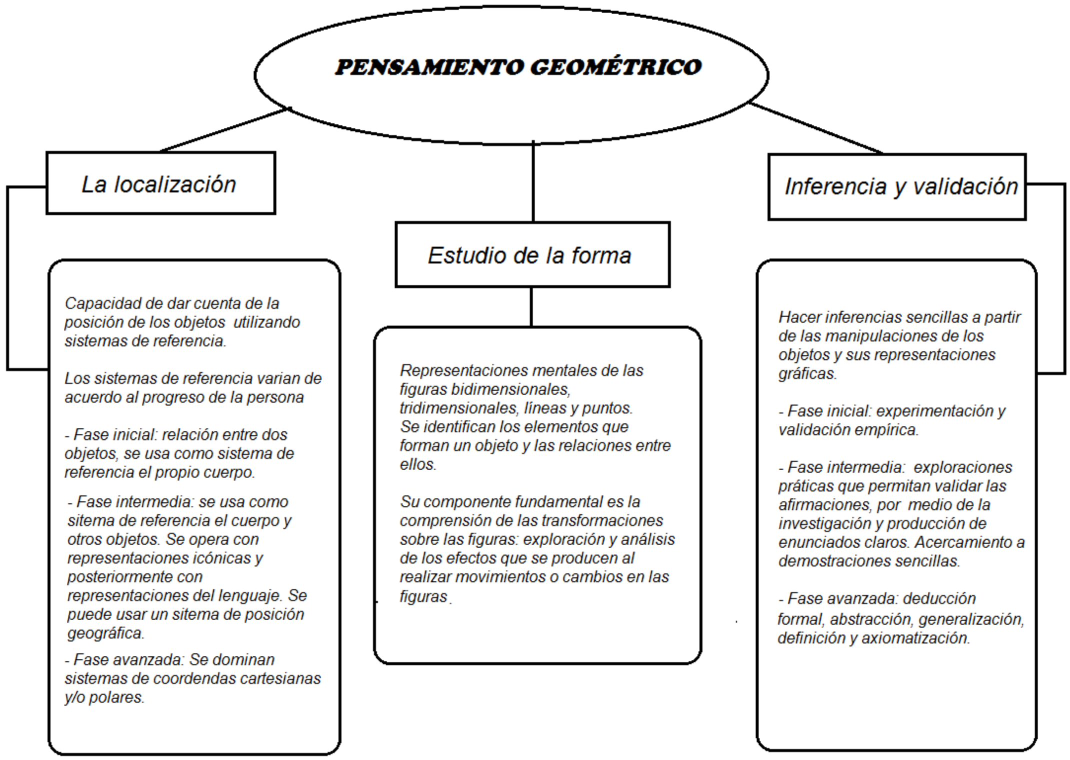


Figura 5. Componentes del Pensamiento Geométrico según la Secretaría de Educación de Bogotá.
Fuente: Orientaciones curriculares para el campo del pensamiento matemático (SED, 2007)

2.2.2 La importancia de la enseñanza de la geometría.

La geometría es quizás una de las ramas de las matemáticas que más se relaciona con la realidad, porque permite describir el espacio en el que los seres humanos se desenvuelven e interactuan en él (Hernández y Villalba, 2001).

Históricamente la geometría ha constituido un recurso de gran importancia en el desarrollo de la humanidad, ya que ha aportado directa o indirectamente a la ejecución de actividades sociales, culturales, científicas y tecnológicas (Vargas y Araya, 2013). Sin embargo, en décadas atrás el trabajo de geometría en las aulas fue relegado por la enseñanza de la aritmética, el álgebra y/o el cálculo. En otros casos se ha referido únicamente a intentar enseñar la forma de realizar demostraciones rigurosas de teoremas, propiedades de los objetos geométricos o a la memorización de definiciones.

A la luz de esta realidad, en el ámibito nacional e internacional se han desarrollado continuas acciones que proponen pensar el currículo de matemáticas de tal manera que la geometría recobre su importancia, teniendo en cuenta las habilidades que potencia en los seres humanos. Particularmente en Colombia, el MEN no desconoce el proceso de restablecimiento de la importancia de la geometría y las habilidades que se suscitan por medio de su estudio. Es así como los procesos que se han definido en los lineamientos curriculares (1998) presentes en la actividad matemática (resolución de problemas, razonamiento, comunicación, modelación y elaboración y ejercitación de procedimientos) están estrechamente relacionados con las habilidades geométricas de visualización y razonamiento lógico. Ello es motivo por el cual, es labor de los docentes explorar y proponer ambientes de aprendizaje ricos en actividad geométrica, utilizando los mecanismos que le permitan guiar de forma adecuada a los estudiantes en el desarrollo de su pensamiento (Acosta , Camargo, Urquina y Castiblanco, 2004).

En la Figura 6 se describen las habilidades que se desarrollan a través del estudio de la geometría, propuestas por Bressan, Reyna y Zorzoli (2003).

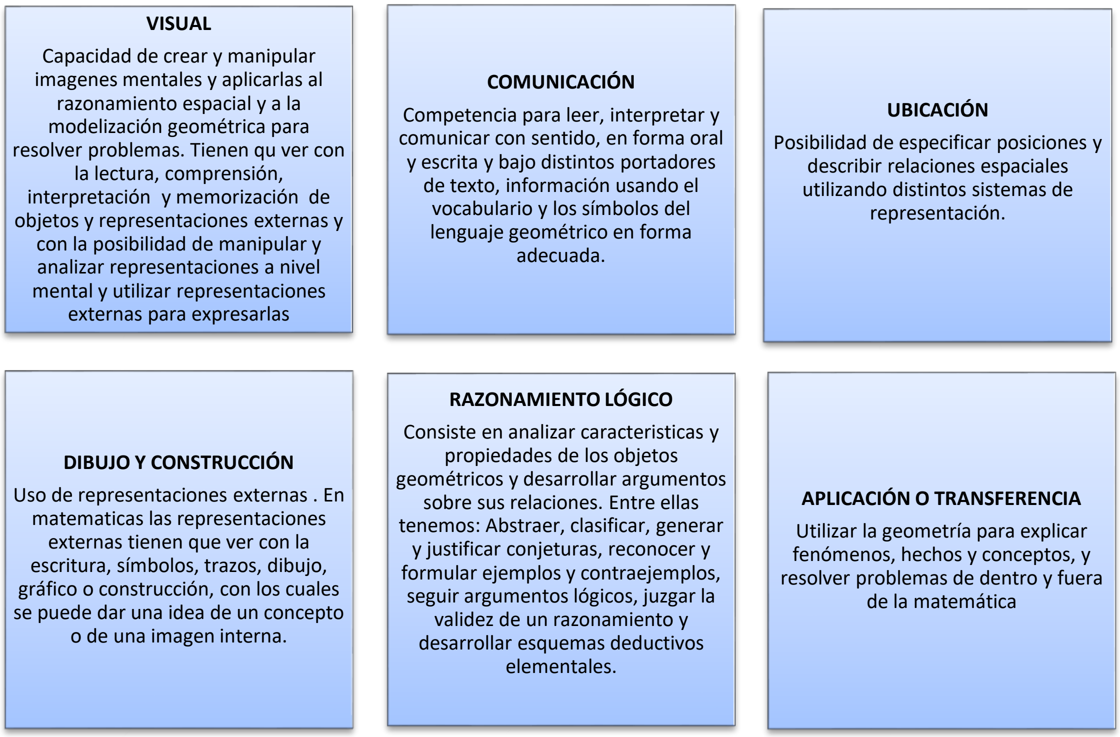


Figura 6. Habilidades que se desarrollan a través del estudio de la geometría.
Fuente: Redescubrir geometría una tarea posible. Actividades para grupos escolares de 6 a 12 años. (Bressan, Reyna y Zorzoli, 2003)

2.2.3 Geometría y visualización.

La habilidad visual se puede definir como la capacidad de obtener información a partir de lo que el estudiante observa, ya sean objetos reales o representaciones de éstos (Galindo, 1996).

La habilidad visual, aunque parece innata del ser humano, es susceptible de presentar deficiencias cuando se trata de hacer una observación consciente, porque acciones como describir un objeto, imaginar una situación a partir de su caracterización o identificar diferencias entre dos representaciones, entre otras, constituyen las dificultades más frecuentes relacionadas con la observación de un sin número de escolares (Bressan, Reyna y Zorzoli, 2003).Por tanto la visualización se convierte en un proceso y en sí mismo tiene tres niveles, descritos por Acosta, Camargo, Urquina y Castiblanco (2004), que hay que explorar en las practicas de aula. Estos niveles son:

Percepción global. Tiene que ver con la asociación que se establece entre un objeto geométrico y un objeto del entorno físico, por tanto constituye el nivel básico de la visualización.

Percepción de los elementos constitutivos. Se reconocen los elementos que forman un objeto matemático y se pueden establecer relaciones entre ellos. Atributos como el tamaño y la orientación pierden significación y es posible identificar que los elementos constitutivos de los objetos visualizados pueden ser de su misma dimensión o de dimensiones inferiores.

Nivel operativo de percepción. Además de identificar la constitución del objeto geométrico, se logra realizar transformaciones mentales de dicho objeto y los elementos que lo conforman, lo que posibilita procesos como la resolución de problemas.

Para desarrollar la visualización en sus diferentes niveles se deben realizar en las aulas experiencias de carácter lúdico. Por ejemplo para los primeros años escolares, se propone el trabajo con pasatiempos como: reconocimiento de diferencias, ilusiones ópticas, discriminación de figuras que están dentro de otras, completamiento de patrones visuales y de figuras, solución de trayectorias y laberintos, entre otras (Bressan, Reyna y Zorzoli, 2003). Para los cursos superiores es importante introducir enunciados y cuestiones que inciten a la exploración e indagación de los objetos geométricos estudiados. Además, los recursos computacionales se convierten en una opción que brinda la posibilidad de apreciar las trasformaciones que pueden sufrir dichos objetos, pues con este material las figuras pasan de ser estáticas a ser dinámicas.

2.3 La teoría de Van Hiele

En 1957 Dina y Pierre Marie Van Hiele, docentes holandeses de secundaria, presentan una propuesta a la tesis doctoral basados en las experiencias con sus estudiantes. Sus hallazgos inicialmente no fueron difundidos en la comunidad académica, sin embargo desde que el material fue traducido al inglés se convirtió en el foco de investigaciones que han buscado validar y revisar la propuesta (Crowley, 1987).

En el modelo Van Hiele se compilan los resultados de la reflexión pedagógica de los docentes holandeses, quienes se cuestionaron y preocuparon por la realidad de sus prácticas y las dificultades que sus estudiantes manifestaban con relación al aprendizaje de la geometría, que no difieren a las que actualmente se encuentran en las aulas. Se puede afirmar que esta teoría es el resultado de un fenómeno educativo que inicialmente trata de explicar el comportamiento de los estudiantes, pero que posteriormente se complementa con las directrices para los docentes y su papel en el desarrollo del pensamiento geométrico de sus estudiantes (Jaime y Gutiérrez, 1990). El Modelo Van Hiele está formado por niveles y dos componentes: uno ***descriptivo*** que intenta explicar la forma como razonan los estudiantes por medio de la organización en cinco niveles; y otro ***prescriptivo*** que sugiere cinco fases de aprendizaje mediante las cuales el docente puede estructurar la práctica pedagógica, con el fin último de que los estudiantes den muestra de avances en su proceso de desarrollo en cuanto al pensamiento geométrico (Jaime, 1998).

2.3.1 Componente descriptivo: los niveles de Van Hiele.

El ser humano crece y se desarrolla física y mentalmente, por lo tanto sus pensamientos y forma de razonar cambian con el paso del tiempo. “Centrado en la geometría, el modelo más específico y que se ajusta más a las situaciones que se plantean en las aulas, cuando los alumnos están aprendiendo, es el que formuló Van Hiele” (Jaime, 1998, pág. 23).

La tabla 2 resume las especificaciones de cada uno de los niveles que conforman el modelo. En ella, Aravena y Caamaño (2013) describen la forma como los estudiantes comprenden, interpretan, clasifican y utilizan los conceptos geométricos para hacer demostraciones, teniendo en cuenta los trabajos de Fuys, Geddes, Lovett y Tischler (1988), Jaime (1993) y Jaime y Gutiérrez (1996).

Tabla 2. Niveles de razonamiento y características

Niveles	Características
Nivel 1 ***Reconocimiento***	- Es el nivel más elemental de razonamiento, los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen. - Los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan, se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas
Nivel 2 ***Análisis***	Es en este nivel donde se presenta por primera vez un tipo de razonamiento, que podría llamarse “matemático”. Los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar propiedades, a partir de la observación y la manipulación.
Nivel 3 ***Clasificación***	- En este nivel los estudiantes pueden entender que unas propiedades pueden deducirse de otras y adquieren la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras. - Son capaces de clasificar diferentes figuras geométricas y dar definiciones matemáticas.
Nivel ***Deducción formal***	El estudiante logra la capacidad de razonamiento lógico matemático y una visión globalizadora del área que se esté estudiando. Esto les permite realizar demostraciones formales de aquellas propiedades que antes habían “demostrado informalmente”, como también, descubrir y demostrar nuevas propiedades.
Nivel 5 ***Rigor***	- En este nivel el estudiante debe trabajar sistemas axiomáticos distintos del usual, transferencias de conocimientos a otros sistemas. - Gutiérrez y Jaime (1996) plantean que existe una posición de escepticismo respecto de la validez de las características del quinto nivel y la poca posibilidad de testarlas.

Nota. Tomado de Aravena y Caamaño (2013). p. 149

2.3.1.1 Características de los Niveles de razonamiento

En el proceso de especificación de cada nivel se han determinado algunas características o propiedades propias para el modelo de Van Hiele. En Jaime y Gutiérrez (1990) y Jaime (1998) se definen algunas de ellas:

Secuencialidad o jerarquización. La teoría original establece que el desarrollo del pensamiento geométrico se realiza cumpliendo con una organización jerarquizada, notable en el planteamiento de los niveles y sus características (Corberán, 1989). "Esto hace que, si una respuesta corresponde al nivel 2 […], asumimos que esta respuesta ha superado el nivel 1 completamente, por lo que su grado de adquisición del nivel 1 es 100%" (Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016, pág. 118).

Sin embargo, debido a que un nivel está integrado por varias habilidades, hay algunas de ellas que se utilizan implicitamente en un nivel pero solo se hacen explicitas en el nivel siguiente, lo que se define como "la estructura recursiva" del modelo Van Hiele, notable para los niveles 1, 2 y 3. En consecuencia es responsabilidad del docente generar experiencias que apunten a hacer explicitas dichas hablidades, mediante acciones repetidas no memorísticas que le exijan al estudiante su utilización.

Especificidad del lenguaje. Para cada uno de los niveles, el vocabulario y el significado de ciertos procesos debe ser especifico, ya que esto incide en la comprensión de los conceptos trabajados. Es decir, que si las personas que intervienen en un proceso de aprendizaje (docente – estudiantes, estudiantes – estudiantes) se refieren a un determinado objeto utilizando niveles de lenguaje distintos los argumentos de uno(s) no serán entendidos ni interpretados por él o los otros.

Paso de un nivel al siguiente. Inicialmente se propone que el paso de un nivel a otro se da de una forma brusca, ya que una persona inicia razonando de acuerdo a un nivel y en un momento determinado su razonamiento ya se encuentra en el otro. No obstante, análisis realizados posteriormente cómo los de Jaime y Gutiérrez (1990), en oposición a este planteamiento dicen que:

> "Creemos que, el paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y que durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el combinará razonamientos de un nivel y del otro. La evidencia de este período será que el estudiante mostrará deseos de usar el nivel superior, pero cuando encuentre dificultades o dudas tenderá a refugiarse en la seguridad del nivel inferior, en el que siente más cómodo" (pág. 319).

Globalidad o localidad. Se supone que una persona comprende todos los conceptos u objetos geométricos de acuerdo a un mismo nivel de razonamiento, a lo que se le llamaría globalidad. Pero las investigaciones (Beltrametti, Esquivel y Ferrarri, 2005; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez 1990) relacionadas dan muestra que en el desarrollo del pensamiento geométrico el razonamiento es local, es decir, es posible que una persona razone en un nivel de acuerdo a un concepto estudiado y si se cambia el objeto geométrico, su nivel de razonamiento sea diferente (inferior o superior).

Instrucción. El desarrollo del pensamiento geométrico en gran medida está relacionado con factores como la instrucción que se da en ambientes escolares y las experiencias que una persona tiene al enfrentarse a situaciones de su cotidianidad. Por consiguiente, hay personas que a una avanzada edad no logra alcanzar el desarrollo de las habilidades geométricas de los niveles superiores. Por consiguiente, se debe tener en cuenta la incidencia que tienen las orientaciones que el docente brinda en el aula en el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico, lo que da paso al planteamiento del componente prescriptivo del modelo, donde se sugieren pautas para que los docentes organicen la experiencia pedagógica guiando al estudiante en el camino que debe recorrer para avanzar en su razonamiento geométrico.

2.3.2 Componente prescriptivo: las fases del aprendizaje.

Dentro de la propuesta se reconoce la importancia que tienen los aprendizajes que el estudiante ha adquirido a lo largo de su vida. Sin embargo, estas experiencias en ocasiones pueden ser insuficientes para lograr avanzar en el desarrollo del pensamiento geométrico. Es en este momento cuando las orientaciones que los docentes dan a los estudiantes y los aprendizajes de las matemáticas escolares proporcionan las herramientas que junto a sus conocimientos previos, le permiten ir progresando y mejorando su razonamiento (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Tal como se ha señalado anteriormente, la edad y/o madurez de los estudiantes para los Van Hiele, no es un factor determinante en el paso de un nivel a otro. Más bien, si lo es la organización de las actividades de aprendizaje, los ambientes proporcionados para tal fin y los recursos que se utilicen (Fouz y De Donosti, 2005).

Así, en el modelo Van Hiele se proponen las orientaciones que los docentes deben tener en cuenta para planear procesos que apunten al desarrollo del pensamiento geométrico distribuidas en cinco fases.

En la figura 7 se explican algunas de las indicaciones o características de dichas fases. Se aclara que este componente de la Teoría Van Hiele no es la base de la categoría de análisis *práctica docente*, pero brinda elementos que permiten enriquecerla.

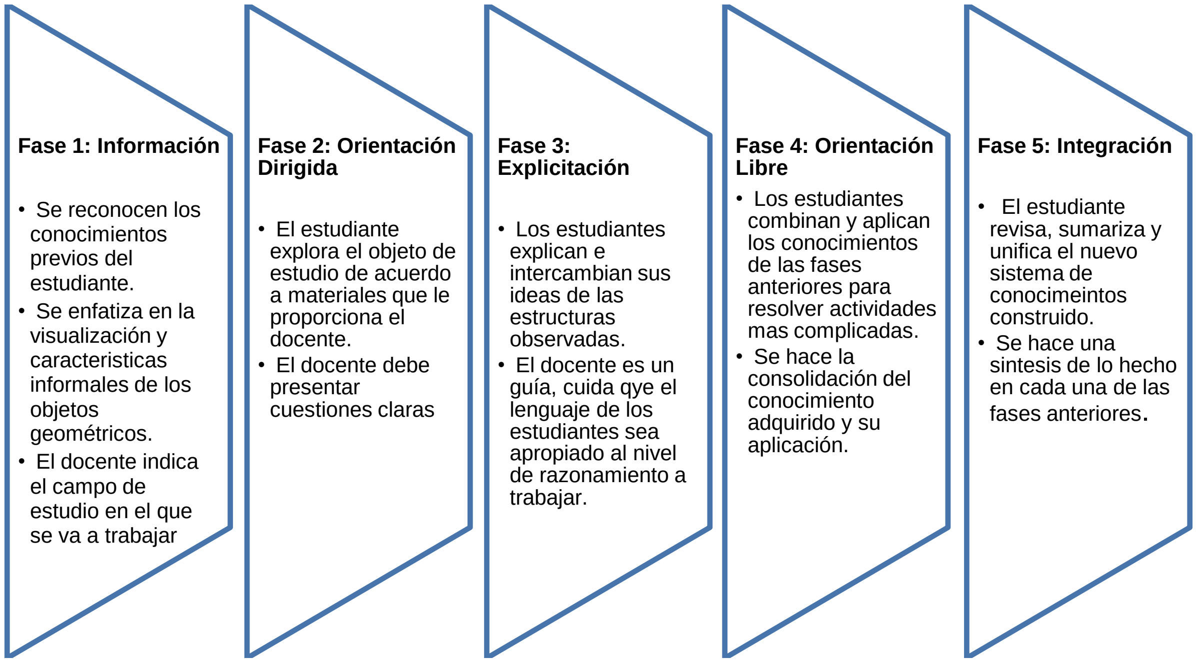


Figura 7. Fases de Van Hiele.
Fuente: Elaboración propia.

2.4 Geometría dinámica: ¿Qué es y por qué incluirla en las prácticas pedagógicas?

En la actualidad el uso de la Tecnología hace parte de la rutina de vida de todas las personas y permea todos los contextos sociales. En particular, la incorporación de las TICS en el currículo de matemáticas permite la elaboración de conocimiento y la comprensión de los procesos de la actividad matemática, ya que sirve como recurso mediador en aprendizaje de los estudiantes, al tiempo que les permite acceder al conocimiento y transformar la escuela (Castiblanco y Moreno, 2002).

Para abordar los contenidos específicos de geometría, recursos como los procesadores contenidos en las calculadoras gráficas, constituyen una herramienta de gran importancia, ya que además de llamar la atención de los estudiantes, le dan el carácter dinámico a las figuras y construcciones rígidas que por décadas se han construido utilizando lápiz, papel, regla y compás.

Es así como las prácticas pedagógicas en geometría tienen la posibilidad de ser enriquecidas mediante el uso de recursos como los ofrecidos por la geometría dinámica, pues en ellos es posible realizar "acciones y recibir retroacciones que le permitan la validación" (Acosta, 2010) de las características que se observan o perciben de una determinada figura.

Novembre, Nicodemo y Coll (2015) definen la Geometría Dinámica como "un ambiente computacional de construcción geométrica, basado en la geometría euclidiana" (pág. 33).

Dentro de los editores gráficos de geometría dinámica utilizados actualmente se pueden mencionar: Cabri Geometre, GeoGebra, Regla y Compás, CarMetal, Geoconext, entre otros. En cada uno de estos software es posible construir dibujos y manipular figuras de la geometría euclidiana, entendiendo como figura el referente teórico y como dibujo la representación gráfica de dicha figura con unas condiciones particulares asignadas para una situación específica (Novembre, Nicodemo y Coll, 2015).

En la tabla 3 se muestran las acciones y retroacciones que se pueden distinguir en el trabajo con geometría dinámica, propuestas por Acosta (2010), y que hacen de esta una herramienta potente en el desarrollo del pensamiento geométrico.

Tabla 3. Acciones y Retroacciones de los Editores de Geometría Dinámica

Tipo de acción	Tipo de retroacción
Construir Consiste en seleccionar una herramienta de Cabri y utilizarla para obtener un dibujo.	**Fenómeno estático** Un dibujo estático que corresponde teóricamente a las herramientas utilizadas según la teoría
Ejemplo: Se selecciona la herramienta 'segmento' y se hacen dos clic en la pantalla: aparece un segmento. Se selecciona la herramienta 'recta perpendicular', se hace clic sobre el segmento y luego sobre un punto cualquiera de la pantalla: aparece una recta perpendicular al segmento.	
Arrastrar Consiste en agarrar un objeto con el ratón y desplazarlo	**Fenómeno dinámico** Los objetos en la pantalla se desplazan de manera que se conservan todas las propiedades declaradas explícitamente (al usar una herramienta de construcción) o aquellas que se deducen teóricamente de ellas.
Ejemplo: al arrastrar un extremo del segmento dibujado anteriormente, el segmento se moverá para seguir teniendo ese punto como extremo, y la recta también se moverá para conservar la perpendicularidad con respecto al segmento.	

Nota. Tomado de Acosta (2010). p. 136

Hay que señalar que "cuando se usa la tecnología en la escuela hay que reconocer que no es la tecnología en sí misma el objeto central de interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología" (Moreno & Waldegg, 1999, pág. 64).

Por lo tanto al utilizar la geometría dinámica se debe pensar en dos principios fundamentales propuestos por Acosta , Camargo, Urquina & Castiblanco, (2004):

Dudar de lo que se ve. Es decir, utilizar la herramienta del arrastre para demostrar la invariabilidad de las propiedades que se observan de una representación estática.

Ver más allá de lo que se vé. Que se relaciona con la utilización de todas las herramientas que ofrecen los editores de geometría dinámica para redescubrir propiedades de los objetos geométricos de estudio, que no pueden se observadas a simple vista o se desconocen.

2.4.1 Software Cabri Geometre

Cabri Geometre es un editor de geometría dinámica dotado principalmente con herramientas que permiten enriquecer el trabajo didáctico y conceptual en las prácticas pedagógicas de aula.

De acuerdo con Acosta (2005) las referencias bibliográficas que describen la utilización del Cabri Geometre en las matemáticas son escasas. Sin embargo, se ha intentado puntualizar en los beneficios y las actividades que se pueden realizar, como producto de investigaciones entorno al uso de TICS en el curriculo de matemáticas. Baulac, Bellemain y Laborde (1988, citados en Olivero, 2003) establecen que el Cabri Geometre:

> "Consiste en un entorno para construir y manipular figuras en el contexto de la geometría euclidiana. Cabri contiene herramientas para dibujar los objetos fundamentales de la geometría (ej. punto, línea, círculo, segmento) y las herramientas geométricas, que permiten al usuario construir nuevos objetos geométricos a partir de los fundamentales (ej. líneas perpendiculares, líneas paralelas, bisectriz de un ángulo)" (pág. 57).

Fernández, Duitama y Delgado (2009) definen el Cabri Geometre como

> "es un software que permite probar la construcción de una figura, hacer conjeturas, medir, calcular, borrar, ocultar/mostrar objetos, poner colores o textos, modificar el punteado, o bien recomenzar todo; su filosofía es la de permitir el máximo de interacciones (ratón, teclado…) entre el usuario y el software, y en cada caso, hacer lo que el usuario espera que haga el software, respetando por una parte los comportamientos usuales de las aplicaciones y del sistema, y por otra el comportamiento matemático más plausible" (pág. 6).

Además de las descripciones expuestas, el ambiente y las herramientas de Cabri, principalmente el arrastre, permiten la puesta en práctica de los llamados procesos de la actividad matemática, ya que la posibilidad de manipular los objetos matemáticos brinda la oportunidad de razonar, resolver problemas, explorar, plantear contra ejemplos, la capacidad argumentativa y desarrollar la visualización, entre otras acciones que difícilmente logran ser significativas con las demostraciones y la presentación tradicional de la geometría estática (Cuéllar, 2003).

Particularmente en relación con el desarrollo del proceso de visualización, Laborde y Capponi (1994 citado en Beltrametti, Esquivel y Ferrari, 2005), dicen que

> "El Cabri Géomètre posibilita el aprendizaje de relaciones visuales y geométricas por tres razones: los fenómenos visuales tienen gran importancia en la dimensión dinámica del Cabri, esos fenómenos son controlados por la teoría, pues son resultados de una modelización gráfica de un modelo analítico de propiedades geométricas, y las posibilidades sin límites de situaciones geométricas pueden ser visualizadas con un gran número de objetos de forma precisa" (pág. 2).

En consecuencia los ambientes mediados por los diferentes programas de geometría dinámica, dan al estudiante elementos para abordar el pensamiento geométrico de forma tal que se potencie la comprensión conceptual y se deje de lado la enseñanza tradicional que favorece la memorización de conceptos aislados a las situaciones del medio (Moreno, 2001).

2.5 La práctica docente y el modelo de análisis didáctico

"La práctica docente se entiende como una acción que permite innovar, profundizar y transformar el proceso de enseñanza del docente en el aula" (Castro, Peley y Morillo, 2006, pág. 583). Esta definición implica que las prácticas desarrolladas en el aula sean procesos alejados del aprendizaje secuencial y memorístico en el que se basa la enseñanza tradicional. Por el contrario, la práctica docente debe permitir el desarrollo del pensamiento crítico, las habilidades creativas, las estrategias de resolución de problemas, el razonamiento, la argumentación, entre otros procesos.

Lo anterior implica que los estudiantes se acerquen a una comprensión de su realidad y puedan encontrar en ella la significación de los conocimientos que día a día redescubren a través del trabajo colaborativo con sus compañeros y la mediación del docente.

Así la práctica docente no solo se puede reducir a las acciones desarrolladas en el aula, requiere de unos momentos previos y posteriores a la ejecución de las actividades que el maestro proponga a los estudiantes. Por consiguiente es necesario planear detallada y organizadamente la experiencia a realizar teniendo en cuenta elementos como los conocimientos previos de los estudiantes, los posibles obstáculos que se pueden presentar para lograr obtener los resultados previstos, los recursos que pueden posibilitar y facilitar el proceso, entre otros factores. Al finalizar la experiencia, se requiere hacer un balance de las fortalezas y dificultades que se vivenciaron con el fin de proponer alternativas de mejoramiento para una siguiente práctica.

Gómez (2002) explica que la planeación y la ejecución de las clases son dos de las dificultades que mayormente tienen los docentes de matemáticas y da como posibles causas el hecho que las políticas educativas y documentos propuestos por los entes gubernamentales se limitan a las pautas para la organización del curriculo del área a nivel global, por lo tanto las herramientas para la práctica docente diaria suelen ser la propia experiencia o las indicaciones que ofrecen los libros de texto, olvidándose del contexto especifico y las condiciones de la población con la que lleva a cabo determinada experiencia.

El mismo autor afirma que,

> "Si esperamos que los profesores de matemáticas aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deberían conocer y utilizar principios, procedimientos y herramientas que, fundamentados en la didáctica de la matemática, les permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que pueden conformar su planificación de clase" (Gómez, 2002, pág. 2).

Con relación a la didáctica de las matemáticas, se ha propuesto el término *Análisis Didáctico* para hablar de "un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (Lupiáñez y Rico, 2008, pág. 36).

De acuerdo con Gómez (2002) el análisis didáctico es aplicable a la planificación o estructuración de una clase o unidad didáctica, que se desarrolla en un periodo determinado de tiempo y que apunta a la consecución de unos objetivos determinados en torno a un contenido matemático, mientras que la planeación en general se refiere a la estructuración global de la asignatura, en cuanto a objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

Según el desarrollo del análisis didáctico (figura 8) se puede equiparar con el ciclo de investigación – acción, pues se tiene en cuenta la valoración de los estudiantes y su entorno, pasa por una planeación, practica, observación y reflexión, y a partir de los datos que se obtienen se proponen mejoras para inicial un nuevo ciclo (Gómez, 2002).

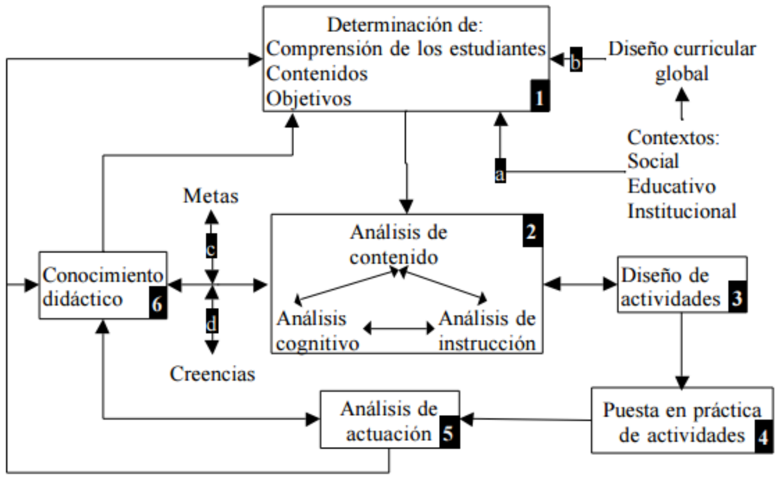


Figura 8. Ciclo de Análisis Didáctico propuesto por Gómez (2002).
Fuente. Tomado de *Gómez (2002), pág. 14.*

De acuerdo al ciclo propuesto se pueden identificar cuatro fases que lo conforman: a) Análisis de contenido, b) Análisis cognitivo, c) Análisis de instrucción, y d) Análisis de actuación. Sin embargo, es evidente que antes de iniciar un ciclo de análisis didáctico, se tienen en cuenta las condiciones de comprensión que tienen los estudiantes y las particularidades socioculturales de su entorno, que pueden ser elementos obtenidos del análisis de actuación del ciclo anterior o de un diagnóstico previo (Gómez, 2002). El ***análisis de contenido*** sugiere la selección del objeto matemático de estudio y los objetivos de aprendizaje. En el ***análisis cognitivo*** el docente selecciona unos significados de referencia e identifica las capacidades que se pretenden desarrollar en los estudiantes, intuyendo además los posibles obstáculos que podrían presentarse en la consecución de los objetivos (Lupiáñez y Rico, 2008). En el ***análisis de instrucción*** se da la proposición y puesta en práctica de las actividades sustentado en las fases anteriores. Finalmente, en el ***análisis de actuación*** o análisis evaluativo se da respuesta a la pregunta ¿Cuáles son los resultados del proceso?, haciendo una revisión e interpretación de los rendimientos en cuanto a: logros alcanzados, fortalezas, debilidades, amenazas y oportunidades de mejoramiento, con el fin de tomar decisiones que permitan optimar el nuevo ciclo de análisis didáctico (Rico, 2013).

Capítulo 3. Metodología

3.1 Enfoque.

De acuerdo con Restrepo (1996) la investigación educativa "se hace sobre procesos y objetos que se llevan a cabo o se encuentran de puertas para adentro de la escuela, (…) indagados con intencionalidad pedagógica, bien sea de conocimiento o bien de mejoramiento" (pág. 21). Dentro de estos objetos y procesos el autor considera: el curriculo, los estilos de enseñanza, los ritmos de aprendizaje, el tiempo, los recursos, entre otros.

Si lo que se pretende es indagar sobre los objetos pedagógicos en pro de transformar los procesos sociales que se desarrollan al interior de la escuela, debemos partir de las vivencias, sentimientos y expresiones de los implicados contando con su participación (Serrano , 2000), propósitos que describe el enfoque cualitativo.

En consecuencia, los datos que se recolectan dentro de las investigaciones de corte cualitativo no corresponden a mediciones numéricas, sino que son descripciones e interpretaciones detalladas de las situaciones que se observan, sus actores con relación a sus conductas y manifestaciones (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Si se tiene en cuenta que el objetivo de esta investigación es analizar cambios en la práctica docente y las manifestaciones de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes del Colegio Orlando Higuita Rojas, que emergen durante la implementación y evaluación de una estrategia que utiliza como recurso el software Cabri Geometre incorporado en la calculadora Voyage 200, se puede afirmar que el enfoque que mejor se ajusta a este propósito es la investigación educativa de corte cualitativo. Teniendo en cuenta que "la investigación cualitativa estudia la realidad en su contexto natural y cómo sucede, sacando e interpretando fenómenos de acuerdo con las personas implicadas” (Blasco y Pérez, 2007 citados en Ruíz, 2011, pág. 155).

En el caso de la presente investigación no solo se analiza la incidencia que tiene la propuesta de intervención, sino además, los datos que se van recolectando son la base fundamental para que la docente investigadora después de una reflexión pedagógica consciente de su práctica, identifique debilidades y fortalezas que le permitan afianzar el reconocimiento de su realidad con el fin único de transformarla progresivamente.

3.2 Alcance.

Según el nivel de análisis la investigación a desarrollar es un estudio de tipo descriptivo. De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010) “los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno” (pág. 80). Su objetivo se centra en el reconocimiento de situaciones que se destacan en un grupo de personas o procesos mediante una descripción detallada de dichas situaciones, por lo tanto, el investigador recolecta información basado en una teoría y proporciona información que contribuye a la generación y/o enriquecimiento del conocimiento sobre el contexto en el que se ha trabajado (Morales, 2010).

Durante el proceso de esta investigación se realizó una descripción detallada de las situaciones que sucedieron durante la implementación de la estrategia de enseñanza y aprendizaje con el propósito de reconocer todos los elementos que permiten reconstruir la práctica de la docente investigadora. A partir de dicha descripción se realizó un análisis de la actuación pedagógica que posibilitó la reflexión en la que se identificaron las posibles fallas de la implementación y sus efectos, lo que proporcionó la información para pensar en acciones que permitieran mejorar una próxima intervención.

El alcance descriptivo se complementa con una investigación aplicada o práctica, definida por Murillo (2008, citado en Cordero, 2009), como un proceso “que se caracteriza porque busca la aplicación o utilización de los conocimientos adquiridos, a la vez que se adquieren otros, después de implementar y sistematizar la práctica basada en investigación” (pág. 159).

Lo anterior se evidencia en la utilización de los referentes teóricos para organizar estrategia de enseñanza y aprendizaje y el posible análisis de los resultados obtenidos al implementar la propuesta. Con el fin de generar reflexiones que contribuyan al mejoramiento de las prácticas de la docente investigadora.

3.3 Diseño.

El esquema de indagación desarrollado es la Investigación - Acción (IA) concebida como “una metodología con la potencialidad no solo de mejorar o transformar las practicas, sino también de generar conocimiento” (Anderson y Herr, 2007). Según los mismos autores, el requisito fundamental para realizar IA es la necesidad del investigador por originar cambios o innovaciones en un determinado contexto, por la identificación de dificultades o carencias traducidas en el problema de investigación. Por lo tanto, el docente no investiga a los estudiantes sino que los hace partícipes del proceso de investigación y de las transformaciones que surgen después de aplicar el espiral de las fases (planeación, acción, observación y reflexión) en las que se lleva a cabo la IA.

La IA en el entorno educativo tiene algunos beneficios que la hacen atractiva para aquellos docentes con espíritu reflexivo y que están en una búsqueda continua de nuevas estrategias de enseñanza en pro del cambio y el enriquecimiento de sus prácticas pedagógicas. Dentro de estos beneficios Ángel (2000) cita los siguientes:

Aumento de la autoestima profesional. El trabajo del docente cobra mayor valor en la medida que la IA exige su participación activa en el proceso de investigación, por tanto el docente aprende de los demás y los otros de él.

Ruptura de la soledad del docente. Le permite entrar en un diálogo permanente con sus pares donde se comparten las reflexiones que surgen en el proceso de investigación.

Refuerzo de la motivación profesional. Ante las dificultades que se presentan en el aula, el docente investigador tiene la posibilidad de transformar los procesos, sin embargo, esta transformación exige una actitud crítica que le permitan abrirse al cambio y a adquirir compromiso con lo que sucede al interior de la institución educativa.

Posibilidad de que los docentes investiguen. Se le atañe al docente la responsabilidad de transformar la realidad de la escuela con la posibilidad de indagar sobre los aspectos que inciden en práctica.

Formación de docentes reflexivos. La etapa trascendental de la IA es la reflexión, porque le brinda la posibilidad al docente mejorar su práctica, lo que implica descubrir de ella aspectos que no conocía y de esta manera romper los esquemas tradicionales e introducir nuevas estrategias que posibiliten el cambio.

De acuerdo a lo anterior, se concluye que la IA en el ámbito educativo parte de los problemas que se dan en la cotidianidad del entorno escolar, identificados a través de la reflexión consciente que el maestro investigador hace de su práctica y su ejercicio como docente. Es así como el proceso de la IA se desarrolla siguiendo las etapas de un ciclo, inicialmente presentado por Kurt Lewin (1980) y posteriormente revisado por Elliott (1993) se describe en la figura 9.

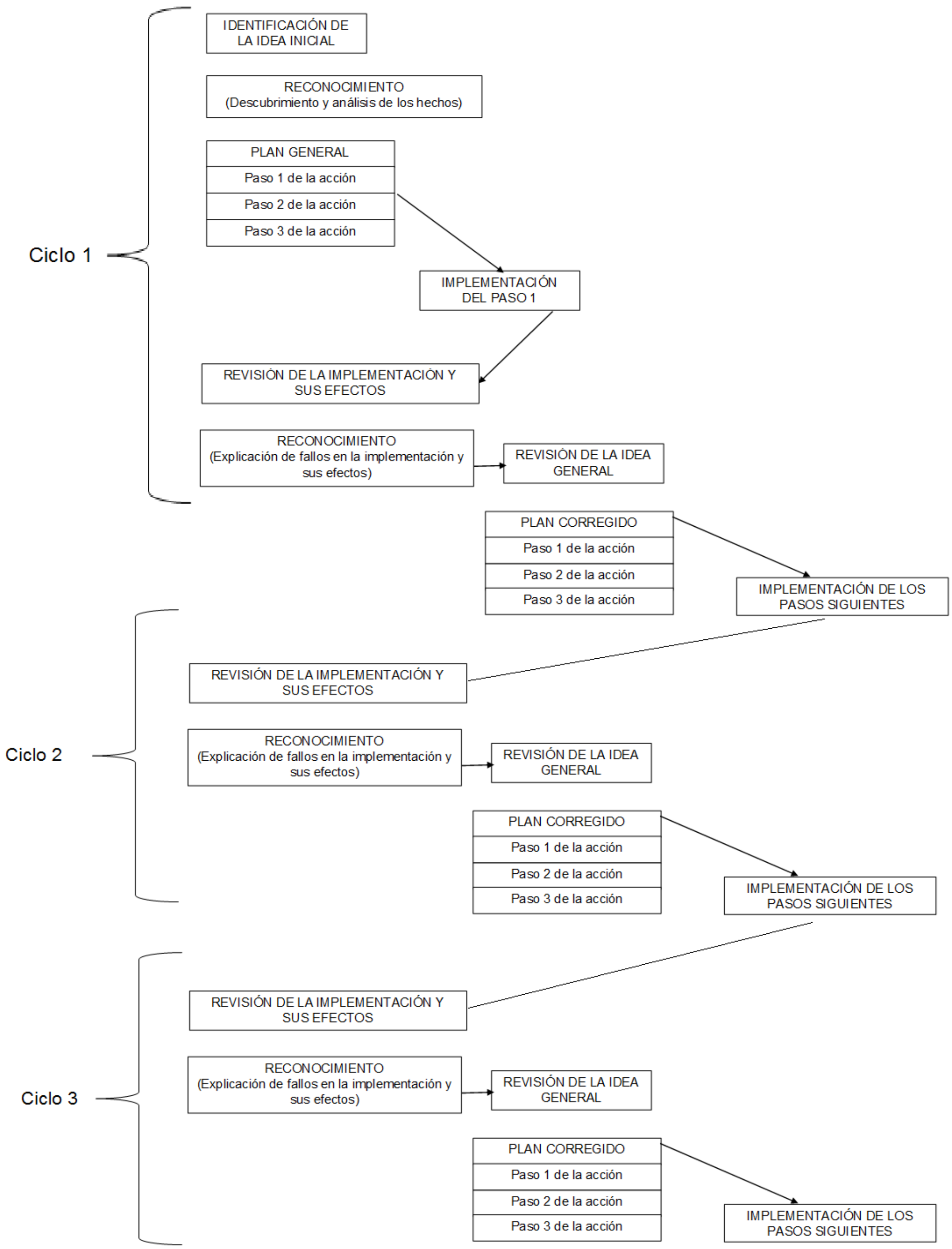


Figura 9. Ciclo de Investigación Acción propuesto por Elliot (1993).
Fuente: Elliott (1993) - pág. 90

El ciclo de IA ilustrado se ha tomado como referencia para el desarrollo de la presente investigación. ***Inicialmente se identifica la idea*** objeto de estudio: se evidencian en los estudiantes dificultades en la aplicación de los conceptos del pensamiento geométrico en situaciones de diferentes contextos. Se realiza el ***reconocimiento de los hechos***: mediante el análisis de los resultados académicos y de pruebas externas (ICFES I. C., 2015), encuestas a pares y estudiantes sobre el aprendizaje de la geometría en la IED Orlando Higuita Rojas (Anexo 1 y 2), y la reflexión de la docente investigadora sobre cómo se evidencia el problema en su propia práctica. Luego se propone el ***plan general de acción*** que inicia por la aplicación de una prueba diagnóstica que permite dar cuenta del nivel de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, de acuerdo con las características propuestas en la Teoría de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990). Teniendo en cuenta los hallazgos de la prueba diagnóstica se genera la estrategia de enseñanza y aprendizaje, conformada por siete actividades, que toman como contenido matemático los triángulos y que utilizan como recurso mediador el software Cabri Geometre incorporado en la calculadora voyage 200. Posteriormente se realiza la ***implementación*** de cada actividad y después ***se revisan y analizan sus efectos*** haciendo énfasis en los aciertos y fallos presentados, con el fin de proponer acciones de mejoras aplicables a los siguientes pasos del proceso, lo que sirve como insumo para nuevas reflexiones enfocadas a identificar oportunidades de mejoramiento para la implementación de los pasos posteriores en la intervención.

3.4 Población y muestra.

El Colegio Orlando Higuita Rojas IED está ubicado en la Calle 57 Sur Nº 87 H-03, barrio Holanda la Libertad. Pertenece a la Localidad No 7 Bosa, (UPZ) 84 Bosa Occidental.

Actualmente funciona con dos sedes: sede A Orlando Higuita Rojas, que atiende primera infancia y desde grado cuarto hasta grado once en dos jornadas (mañana y tarde), y sede B Juan Maximiliano Ambrosio donde se atiende desde grado primero hasta grado tercero de básica primaria, según la nueva estructuración que inició desde 2016, por la incorporación del proyecto de fortalecimiento para la educación media y programa de semi - inmersión con la Universidad de la Salle (Colegio Orlando Higuita Rojas , 2015).

El PEI de la institución fue nombrado "Comunicación y Derechos Humanos Para La Transformación Social" (Colegio Orlando Higuita Rojas , 2015). La institución cuenta con un enfoque pedagógico humanista que se centra en el desarrollo del ser y en su crecimiento personal. Su modelo pedagógico holístico plantea que no se deben limitar los procesos de enseñanza - aprendizaje a unas condiciones específicas, ya que los contextos determinan estas dinámicas y las características de los grupos sujetos de la enseñanza y el aprendizaje (Aldana & Medina , 2015).

La población de la IED pertenece los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3. Entre los 1700 estudiantes de la jornada tarde se tiene un total de 54 estudiantes que pertenecen al programa de inclusión con diferentes necesidades educativas, dentro de las que se destacan déficit cognitivo (limítrofe, leve y moderado), síndrome de Down y la discapacidad motora.

En cuanto al área de matemáticas, desde el año 2005 trabaja el proyecto denominado "Comunicación Matemática para el Desarrollo del Pensamiento" que pretende conseguir que el estudiante sea capaz de usar la comunicación oral y escrita como una herramienta con la cual pueda reflejar su comprensión de las matemáticas. Ayudando de esta forma a personalizar y realizar conexiones entre los conceptos matemáticos, explicando sus ideas y justificando sus respuestas mediante el empleo de modelos, la interpretación de hechos conocidos y la aplicación de propiedades y relaciones matemáticas (Colegio Orlando Higuita Rojas , 2016). El proyecto cuenta con siete líneas de trabajo a saber: Planteamiento y resolución de problemas, Olimpiadas matemáticas y el campeonato de sudoku, Origami, Plan lector, Matemática recreativa, Revista observatorio y Tics. La línea de trabajo de mayor impacto es la Revista Observatorio, un material de pasatiempos lógico – matemáticos creados por los propios estudiantes y utilizado como un recurso de apoyo y trabajo en las clases.

A pesar de que el trabajo del proyecto de matemáticas en varias ocasiones ha representado a la institución en diferentes eventos externos, e incluso a la Localidad de Bosa en ponencias distritales, la realidad del área en cuanto a rendimiento académico difiere con los propósitos de las actividades abordadas en la propuesta. Estas dificultades llaman la atención de directivos y docentes por lo que actualmente se implementan varias estrategias que propenden por conseguir superarlas progresivamente. Dentro de estas estrategias se destacan: revisión y actualización de plan de estudio y plan de aula tomando como herramienta los lineamientos y estándares curriculares y los derechos básicos del aprendizaje, propuestos por el MEN (1998, 2006 y 2016), la socialización de experiencias pedagógicas exitosas entre docentes y la actualización de los mismos, quienes en su mayoría se encuentran finalizando estudios de maestría.

Aunque el centro de la investigación es la práctica de la docente investigadora, se seleccionó el curso 703 de la jornada tarde para realizar la sistematización y análisis de las actividades. Este grupo cuenta con un total de 39 estudiantes, 20 niñas y 19 niños, cuyas edades oscilan entre los 10 y 15 años. En el curso se encuentra una estudiante diagnosticada con déficit cognitivo leve para quien se realiza adaptación curricular en algunos temas del área de matemáticas, teniendo en cuenta que en los procesos realizados en años anteriores no alcanzó mayores progresos. En la tabla 4 se muestran las temáticas trabajadas durante el año escolar discriminadas por pensamiento.

Tabla 4 . Adaptación curricular: contenidos por pensamiento

Pensamiento Numérico	Pensamiento Variacional	Pensamiento Métrico	Pensamiento Espacial	Pensamiento Aleatorio
• Operaciones aditivas con números naturales y aplicación en solución de problemas. • Multiplicación: concepto, términos, propiedades y multiplicación hasta por tres cifras.	Identificación de patrones de cambio en diferentes situaciones y contextos.	• Longitud: unidades no convencionales de medida. • Longitud: el metro, el decímetro y el centímetro.	• Elementos básicos de geometría: el punto, la recta, la semirrecta y el segmento. • El plano cartesiano: reconocimiento y ubicación de parejas ordenadas. • Ángulos: concepto como giro. • Polígonos: concepto, elementos, clases de polígonos según su número de lados.	• Organización de datos en tablas de conteo. • Construcción de gráficos de barras sencillos. • Lectura e interpretación de gráficos de barras y tablas de frecuencia. • Sucesos seguros – imposibles, muy probables – poco probables. • Combinación: noción con situaciones de la cotidianidad.

Fuente: Elaboración propia.

Es importante anotar que dicha estudiante presenta dificultades marcadas en lectura y escritura que hasta ahora se están abordando con mayor rigurosidad para brindarle competencias básicas que le ayuden en la consecución de un mejor rendimiento en todas las áreas.

De acuerdo a observaciones realizadas y a los registros de notas finales para el año escolar 2015, en el curso 603 que contaba con 39 estudiantes, el 36% presentó un desempeño bajo en el área de matemáticas, el 49% se encontró en desempeño básico y solo el 15% obtuvo un desempeño alto.

Según la estructura del plan de estudio del área, los contenidos correspondientes a los pensamientos geométrico y métrico, se han propuesto para trabajar durante el segundo y tercer periodo. En este tiempo abordaron las temáticas correspondientes a:

- Elementos básicos de la geometría (punto, recta, semirrecta, segmento, plano)
- Ángulos (definición, clasificación, medición y construcción)
- Polígonos (definición, clasificación y construcción)
- Longitud (definición, unidades de medida y conversión)

De acuerdo a la evaluación[3] realizada los resultados académicos de curso 603 en el año 2015, fueron:

Segundo Periodo*:* 28% de los estudiantes con desempeño bajo, 46% con desempeño básico, 18% con desempeño alto y 8% con desempeño superior.

Tercer Periodo: 33 % de los estudiantes con rendimiento bajo, 61 % con desempeño básico y 6% con desempeño alto.

Las dificultades presentadas por los estudiantes en las actividades realizadas en estos dos periodos concuerdan con las mencionadas por los docentes encuestados en la respuesta 8 (Anexo 1) y tienen que ver con:

- Manejo de instrumentos de trabajo geométrico como regla, compás y transportador.
- Utilización de conceptos para la solución de problemas.
- Comunicación de un concepto utilizando lenguaje geométrico.

[3] Para la evaluación del área de matemáticas en el Colegio Orlando Higuita Rojas se tienen en cuenta tres aspectos: heteroevaluación, autoevaluación y coevaluación. Para la realizar la heteroevaluación se aplican las técnicas de observación y medición del desempeño de los estudiantes en actividades como trabajo cooperativo, exposiciones, resolución de talleres escritos y demás registros consignados en el cuaderno, y desarrollo de pruebas orales y escritas en las que se incluyen test por competencias. Para la auto y coevaluación se utilizan rubricas de evaluación que dan cuenta del proceso de cada estudiante, a través de la mirada de sus pares y su propia visión. Para los estudiantes de inclusión con déficit cognitivo que tienen adaptación curricular se emite un informe de evaluación cualitativa que da cuenta de los avances que tiene con relación a los temas propuestos.

- Representación de una situación mediante construcciones geométricas.
- Identificación de representaciones de elementos geométricos en objetos del entorno.

La asistencia regular a clase es un factor importante en este curso. En promedio diariamente asisten a clases 38 estudiantes.

3.5 Categorías de análisis

Teniendo en cuenta el objetivo de la investigación y los referentes teóricos consultados en el desarrollo de la misma, se proponen las siguientes categorías iniciales:

Niveles de desarrollo del pensamiento geométrico. Se toma como referencia la Teoría Van Hiele (1957) sobre el desarrollo del pensamiento geométrico que desde su componente descriptivo hace una aproximación a la explicación de cómo razonan los estudiantes, y agrupa los indicadores o manifestaciones de este razonamiento en cinco niveles. De acuerdo a esta distribución, la manera como se comprende la geometría no siempre es la misma y puede mejorar. Sin embargo el proceso de comprensión es independiente de la edad de la persona (Jaime A. , 1998).

En consecuencia para esta categoría de análisis se toman solo los primeros cuatro niveles de desarrollo del pensamiento geométrico como subcategorías, ya que además, se presume que el quinto nivel no se logra desarrollar en la básica secundaria (Fouz & De Donosti, 2005).

En la siguiente tabla se describen las ideas relevantes del trabajo de Crowley (1987, citado en Fouz y De Donosti, 2005) con relación a los descriptores que se pueden lograr en cada nivel y lo que no logran, referidos al estudio de triángulos y cuadriláteros. A partir de ellos se hace el análisis de los hallazgos de la presente investigación, aclarando que para este propósito algunos fueron adaptados teniendo en cuenta a Gutiérrez y Jaime (1990; 1998) y Jaime (1998):

Tabla 5: Categorías y subcategorías: Niveles de desarrollo del pensamiento geométrico

Categoría	Subcategorías	Descriptores
Niveles de Desarrollo del Pensamiento Geométrico	1. ***Visualización:*** Los objetos geométricos se perciben de manera global y se definen de acuerdo a la relación con elementos del entorno.	• Identifica “cuadrados y triángulos” en un conjunto de recortables. • Señala ángulos, rectángulos y triángulos en diferentes posiciones en fotos, láminas, etc. • Marca figuras en una trama o malla (ángulos, paralelas, sierras, escaleras, etc.). • Realiza figuras con instrumentos: rectángulos, paralelas, etc. • Señala los ángulos como “esquinas” o los marca en figuras. • Señala que un rectángulo “es un cuadrado más estrecho”, “un paralelogramo es un rectángulo inclinado”, “un ángulo las agujas de un reloj”. • Usa el método de ensayo-error con mosaicos. • Coloca teselas cuadradas en un rectángulo y las cuenta para aproximar su área. • Identifica cuadrados pero espontáneamente pero... “no indica: igual lados y ángulos rectos”. • Señala y mide los lados de un cuadrado pero... “no generaliza: igual lados para todos los cuadrados”. • No usa espontáneamente cuantificadores como: todos, alguno, cada, ninguno referidos a si tienen determinada propiedad geométrica.
	2. ***Análisis:*** Se realiza por primera vez razonamiento matemático. A través de la observación se pueden identificar elementos y propiedades de los objetos.	• Señala que “la figura tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos” “tres lados iguales” “dos lados iguales y uno desigual” “tres lados desiguales”. • Comprueba que “en un paralelogramo los lados opuestos son paralelos”. • Usa con sentido cuantificadores como: todos, alguno, cada, ninguno • Señala las semejanzas y diferencias entre cuadrado y rectángulo. • Inventa un criterio para clasificar cuadriláteros y triángulos (dos rectos, pares de lados paralelos, etc.). • Describe una sierra a partir de una propiedad y la utiliza para determinar ángulos iguales en una trama. • A partir de una malla triangular puede descubrir la suma de los ángulos interiores de un triángulo. • Puede calcular el área de un triángulo rectángulo a partir de la del rectángulo. • A partir de medidas de ángulos obtiene que el ángulo exterior a un triángulo es la suma de los no-adyacentes.

		• Da información basada en propiedades para dibujar una figura. • Después de clasificar cuadriláteros en cometas y no-cometas, describe pro- piedades de las cometas. • Resuelve problemas sencillos identificando figuras en combinación con otras. • Identifica propiedades en paralelogramos pero “no identifica el conjunto de propiedades necesarias para definirlo”. • Después de ver propiedades de una familia de cuadriláteros “no justifica que todos los cuadrados son cometas”. • Después de descubrir en una malla triangular que los ángulos de un triángulo suman 180 “no generaliza el resultado para todo triángulo”.
	3. ***Ordenamiento, clasificación o abstracción:*** se establecen relaciones entre las propiedades de los objetos geométricos, se hace clasificación de figuras y definiciones matemáticas.	• Selecciona propiedades que caracterizan una serie de formas y prueba, mediante dibujos o construcciones, que son suficientes. • Formula una definición para una cometa y la usa para explicar qué es cometa y qué no. • Contesta razonadamente a preguntas como: ¿un rectángulo es un paralelo- gramo? • Lo mismo con cometas y cuadrados. • Deduce que los ángulos internos de un cuadrilátero suman 360 a partir de dividirlo en dos triángulos. • Justifica la igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo. • Reconoce el papel de las explicaciones lógicas o argumentos deductivos en la justificación de hechos. • No comprende el significado de la deducción en un sentido axiomático (no ve la necesidad de las definiciones y supuestos básicos). • No distingue formalmente entre una afirmación y su contraria. • No establece relaciones entre redes de teoremas.
	4. ***Razonamiento deductivo:*** se realiza razonamiento lógico y demostraciones formales.	• Identifica las propiedades suficientes para definir un paralelogramo. • Prueba de forma rigurosa que la suma de los ángulos de un triángulo es 180. • Demuestra que si un triángulo es isósceles los ángulos de la base son iguales y viceversa. • Demuestra de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio y compara los dos métodos. • Compara demostraciones alternativas del teorema de Pitágoras. • No examina la independencia, consecuencias o validez de un conjunto de axiomas.

Fuente: Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. Fouz & De Donosti (2005).

La Práctica Docente. En cuanto a las prácticas pedagógicas de aula la actividad de planear las clases en el área de matemáticas debe ir más allá de la organización secuencial de las temáticas contenidas en los planes de estudio y que están establecidas por directrices del MEN (1998 y 2000).

En cuanto a esta categoría la investigación se basa en la teoría de ***Análisis Didáctico***, ya que tiene que ver con la planeación específica en el área de matemáticas que le sugiere al docente tomar una posición reflexiva que le permita ser un guía activo de su práctica. Por tanto le exige la utilización de elementos propios de la didáctica de las matemáticas que le permitan establecer objetivos, contenidos, metodologías y seleccionar los recursos acordes con la realidad y el contexto de su población (Gómez, 2002).

En la siguiente tabla se ilustran las subcategorías de la categoría práctica docente:

Tabla 6. Categoría y subcategorías: Práctica docente.

Categoría	Subcategorías	Referente Teórico
Práctica Docente (Análisis Didáctico)	**1. Análisis del contenido.** Se basa en la determinación del estado del estudiante y los factores del contexto pueden influir en el ciclo del análisis didáctico. Se seleccionan los conceptos y estructuras matemáticas a trabajar. **2. Análisis Cognitivo.** Establecimiento de las actuaciones de los estudiantes: identificación de lo que pueden hacer y los posibles obstáculos de aprendizaje. **3. Análisis de la Instrucción.** Identificación y descripción de las actividades diseñadas para el proceso de aprendizaje. Incluye la ***puesta en práctica de las actividades,*** que tiene que ver con el discurso y gestión de aula. **4. Análisis de la actuación.** Reflexión y evaluación: logros alcanzados, debilidades, fortalezas, amenazas y oportunidades de mejora.	Pedro Gómez (2002)

Fuente: Elaboración propia.

3.6 Instrumentos De Recolección De Información

Para esta investigación se proponen diferentes instrumentos de recolección de información, que permiten el cumplimiento de los objetivos y que se aplicaron en las diferentes etapas del proceso, tal como se muestra en la siguiente figura:

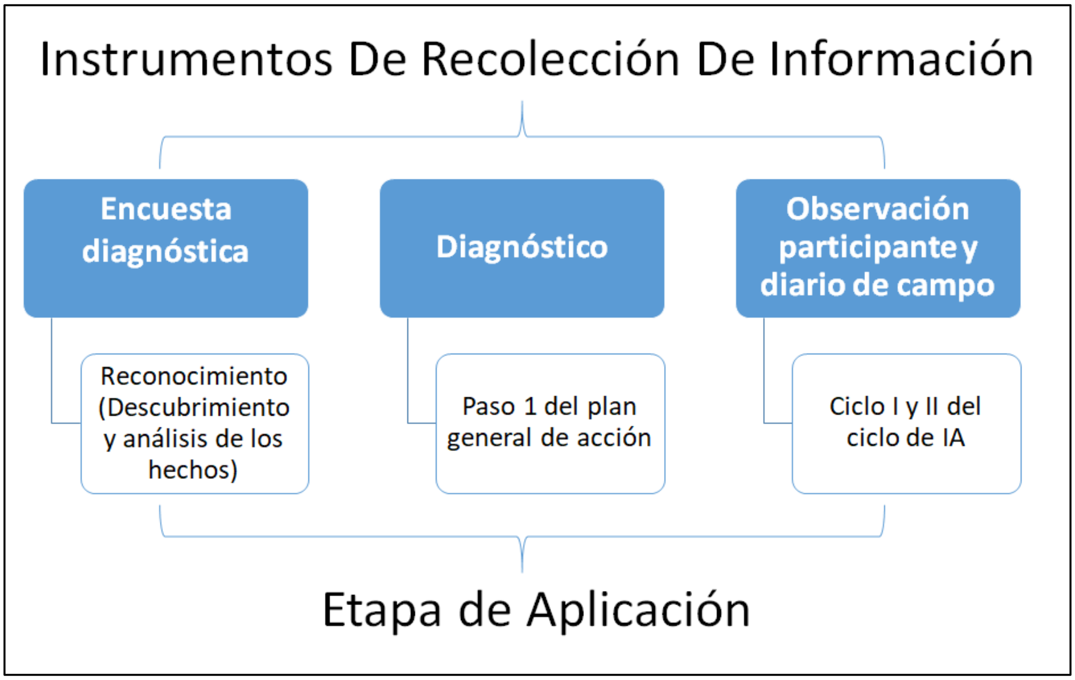


Figura 10. Instrumentos de Recolección de Información y Etapa de Aplicación.

Fuente: Elaboración propia

Observación participante y diario de campo. La observación como técnica de recolección le permite a la docente investigadora acercarse a los estudiantes, percibiendo su proceso de aprendizaje y desarrollo del pensamiento geométrico como es (Niño Rojas, 2011). LA docente investigadora se reconoce como parte del proceso de observación porque pertenece a la población y su propia práctica conforma el objeto de estudio.

Para registrar los acontecimientos se utiliza el diario de campo (anexo 3), donde la docente investigadora realiza un registro detallado de los acontecimientos que surgen en cada etapa del proceso. La estructura del formato de diario de campo utilizado incluye elementos que se consideran relevantes definir como el lugar donde se realiza, el grupo objeto de observación, la descripción de la actividad a realizar, el objetivo de aprendizaje de la misma y tiempo utilizado para su desarrollo. Teniendo en cuenta que las notas realizadas permiten ampliar el análisis de los resultados atendiendo a las categorías establecidas, dichas notas se centran en cuatro aspectos: ***Notas descriptivas***: se realizan las descripciones de lo observado sin adverbios de tiempo ni modo. La docente hace un registro objetivo de lo que se evidencia en el aula con relación a la actuación de los estudiantes y a su propia actuación. ***Pre – categorías*** que luego de la etapa de diagnóstico se convierte en ***categorías***: se puntualiza en los aspectos en los que se focaliza la información. ***Notas interpretativas***: la docente realiza una reflexión sobre los registros de las notas descriptivas. ***Notas metodológicas***: incluyen las observaciones sobre los registros realizados.

Encuesta diagnóstica. La docente investigadora selecciona esta técnica con el propósito de recolectar impresiones diferentes a las propias con relación a la enseñanza de la geometría en la IED**, teniendo en cuenta** que brinda a los pares y estudiantes encuestados la posibilidad responder con libertad, obteniendo mayor objetividad de la información (Niño Rojas, 2011). En este caso, el resultado de las encuestas sirvió como soporte de los antecedentes del problema y la justificación de la investigación.

El cuestionario con el cual se realizó la encuesta a docentes (Anexo 1) se compone de 12 preguntas, 10 abiertas y 2 cerradas, distribuidas en tres aspectos: a) *Concepciones sobre la geometría, b) El docente y la enseñanza de la geometría y c) La geometría y el currículo.* Las preguntas de la 1 la 6 se extrajeron del cuestionario propuesto por Pérez y Guillén (2007), las preguntas 11 y 12 fueron seleccionadas del trabajo de Guillén, Figueras y Corberán (2004), pero adaptadas teniendo en cuenta los lineamientos curriculares (MEN, 1998). El resto de las preguntas fueron planteadas por la docente investigadora, de acuerdo a elementos que se consideraron necesarios para soportar la justificación de la investigación. Esta encuesta se realizó de forma virtual a diez de los quince docentes que conforman el área en los niveles de básica primaria, secundaria y media fortalecida, de las dos sedes y jornadas.

El cuestionario de estudiantes (Ver Anexo 2) se estructuró con un total de nueve preguntas, las preguntas de las 1 a la 6, de modalidad abierta, se adaptaron del cuestionario de Pérez y Guillén (2007). Teniendo en cuenta que dicho cuestionario se diseñó para docentes, fue necesario cambiar algunas palabras o frases en las preguntas con el fin de que el lenguaje fuera comprendido por los estudiantes. Las preguntas 7, 8 y 9, de selcción múltiple con única o múltiple respuesta, indagan sobre aspectos como el tiempo de enseñanza que se dedica a la geometría en la IED, los materiales y las actividades que según ellos facilitan el proceso de aprendizaje. Fueron diseñadas por la docente investigadora con el propósito de obtener aspectos relevantes para el planteamiento del problema teniendo en cuenta la visión de los estudiantes.

Mediante la aplicación de los cuestionarios a docentes y estudiantes de la IED se identificaron opiniones, apreciaciones, puntos de vistas y experiencias con relación al aprendizaje del pensamiento geométrico.

Diagnóstico. Se compone de dos actividades que tienen como objetivo identificar las manifestaciones del nivel de desarrollo del pensamiento geométrico en el que se encuentran los estudiantes de acuerdo a la Teoría de Van Hiele (1957), para hacer un diagnóstico, antes de aplicar la estrategia de enseñanza aprendizaje. Los hallazgos del diagnóstico se analizaron a la luz de los descriptores propuestos en cada nivel desarrollo del pensamiento (tabla 4). Además, constituyen la referencia a partir de la cual se propone la secuencia de actividades de la estrategia.

La primera actividad selecciona elementos del trabajo de Fouz (2006), quien diseñó un test inspirado en la propuesta de Usiskin (1982). Estos instrumentos han sido validados y son utilizados para la determinación del nivel de desarrollo de pensamiento geométrico en el que se encuentra una persona. El Test de Usiskin (1982) en su formato original está compuesto por veinticinco preguntas que indagan por los cinco niveles propuestos en la teoría de Van Hile, de donde se seleccionaron las preguntas 4, 8 y 12, que corresponden a las 2, 3 y 5 de la primera actividad de diagnóstico en esta investigación (anexo 4). El trabajo propuesto por Fouz (2006) orienta las preguntas hacia los tres primeros niveles, ya que de acuerdo a diferentes investigaciones son los que una persona desarrolla en niveles no universitarios (Fouz, 2006). De aquí se escogieron las preguntas 1, 12, 13, 24 y 32.

Esta recopilación tuvo en cuenta los contenidos que de acuerdo a plan de estudios del área de matemática los estudiantes han trabajado en los años escolares anteriores. Las preguntas indagan sobre conceptos como posición entre rectas, definición de polígono y características y propiedades de cuadriláteros y triángulos.

La segunda actividad se propone teniendo en cuenta los descriptores que emergen del trabajo de Crowley (1987, citado en Fouz y De Donosti, 2005), referido al estudio de cuadriláteros y triángulos. En el primer numeral se presenta un conjunto de figuras que los estudiantes deben clasificar de acuerdo a un criterio que consideren relevante y que posteriormente deberán explicar. En el segundo, escogerán tres de las figuras anteriores, las dibujarán en un recuadro y realizarán la descripción de cada una. En el tercer numeral realizarán la comparación de dos parejas de figuras usando la rutina de pensamiento compara y contrasta. En los puntos cuatro y cinco los estudiantes recortarán los ángulos de un triángulo y un cuadrilátero seleccionados del conjunto inicial, los juntarán de forma que no se superpongan y luego los pegarán en un recuadro. Los registros realizados anteriormente los escribirán usando lenguaje matemático en el punto seis, y finalmente realizarán cuatro construcciones teniendo en cuenta las indicaciones dadas previamente, usando regla, trasportador, compás, o el recurso que consideren necesario.

Esta parte del diagnóstico fue diseñada con la pretensión de hacer práctica y tangible la experiencia, y ofrecerle al estudiante la posibilidad de utilizar estrategias como el ensayo y el error para dar respuesta a las cuestiones que se le presentan (anexo 5).

Capítulo 4. Plan general de acción

A continuación se describe el plan de acción utilizado teniendo en cuenta el ciclo de IA propuesto por Elliot (1993):

4.1 Ciclo I.

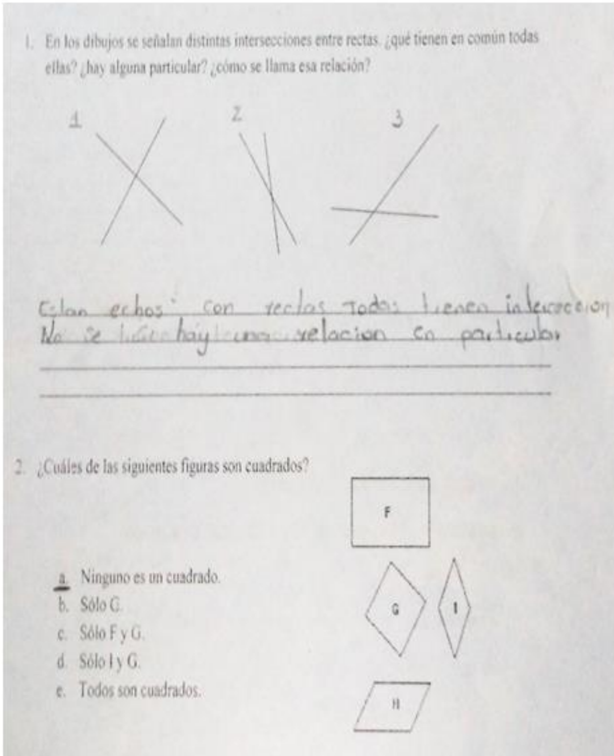
Se realizó una lista de las situaciones que en la práctica docente generaban dificultades en cuanto a la consecución de los objetivos pedagógicos propuestos en los periodos de año escolar. Una vez priorizadas estas situaciones se seleccionó como el eje central de la investigación *las deficiencias en el aprendizaje de la geometría, teniendo en cuenta dos factores*: el aprendizaje de los estudiantes y las prácticas de la docente investigadora.

Posteriormente se realiza un reconocimiento de los hechos tomando como insumos los resultados académicos de los estudiantes, las pruebas saber (ICFES, 2015), la percepción de docentes y estudiantes sobre el aprendizaje de la geometría en la IED, recogida mediante la encuesta de diagnóstico.

Paso 1 de la acción. Planteamiento e implementación de la prueba de diagnóstico.

Objetivo: Identificar manifestaciones sobre el nivel de pensamiento geométrico en el que se encuentran los estudiantes.

Descripción: Se aplica el test y la actividad experimental. El cuestionario se compuso de ocho preguntas en las que los estudiantes debían dar cuenta de las comprensiones que tenían hasta el momento de objetos geométricos como: polígonos, rectas perpendiculares, cometas, triángulos y cuadriláteros. De estos últimos se analizaron sus elementos y algunas características particulares. En la segunda sesión los estudiantes debían dar solución a siete actividades relacionadas con la clasificación, descripción y comparación de polígonos. Hacer inferencias sobre algunas de sus propiedades y representarlos utilizando diferentes registros.



1. En los dibujos se señalan distintas intersecciones entre rectas. ¿qué tienen en común todas ellas? ¿hay alguna particular? ¿cómo se llama esa relación?

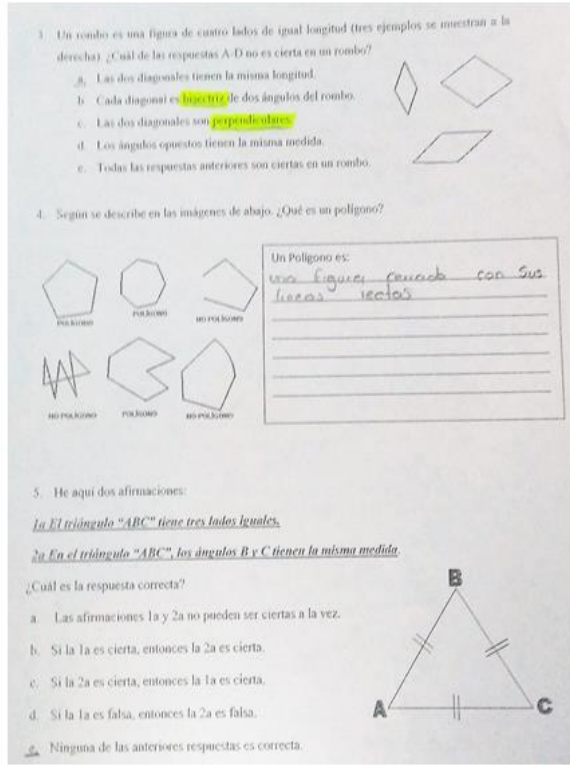
1 2 3

Estan echos con rectas Todos tienen interseccion
No se [illegible] hay una relacion en particular

2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son cuadrados?

a. Ninguno es un cuadrado.
b. Sólo G.
c. Sólo F y G.
d. Sólo I y G.
e. Todos son cuadrados.

F G I H



3. Un rombo es una figura de cuatro lados de igual longitud (tres ejemplos se muestran a la derecha). ¿Cuál de las respuestas A-D no es cierta en un rombo?
   a. Las dos diagonales tienen la misma longitud.
   b. Cada diagonal es bisectriz de dos ángulos del rombo.
   c. Las dos diagonales son perpendiculares.
   d. Los ángulos opuestos tienen la misma medida.
   e. Todas las respuestas anteriores son ciertas en un rombo.

4. Según se describe en las imágenes de abajo. ¿Qué es un polígono?

POLÍGONO POLÍGONO NO POLÍGONO NO POLÍGONO POLÍGONO NO POLÍGONO

Un Polígono es: una figura cerrada con sus lineas rectas

5. He aquí dos afirmaciones:

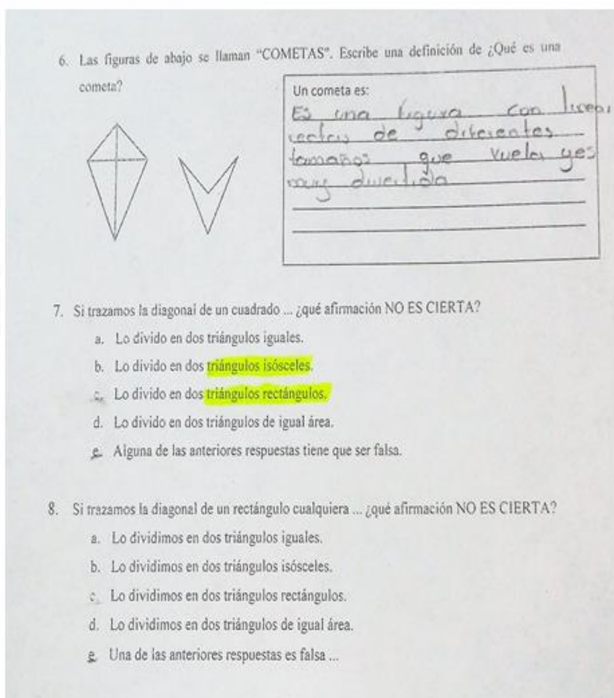
1a El triángulo "ABC" tiene tres lados iguales.

2a En el triángulo "ABC", los ángulos B y C tienen la misma medida.

¿Cuál es la respuesta correcta?

a. Las afirmaciones 1a y 2a no pueden ser ciertas a la vez.
b. Si la 1a es cierta, entonces la 2a es cierta.
c. Si la 2a es cierta, entonces la 1a es cierta.
d. Si la 1a es falsa, entonces la 2a es falsa.
e. Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.

B A C



6. Las figuras de abajo se llaman "COMETAS". Escribe una definición de ¿Qué es una cometa?

Un cometa es: Es una figura con lineas rectas de diferentes tamaños que vuela y es muy divertida

7. Si trazamos la diagonal de un cuadrado ... ¿qué afirmación NO ES CIERTA?
   a. Lo divido en dos triángulos iguales.
   b. Lo divido en dos triángulos isósceles.
   c. Lo divido en dos triángulos rectángulos.
   d. Lo divido en dos triángulos de igual área.
   e. Alguna de las anteriores respuestas tiene que ser falsa.

8. Si trazamos la diagonal de un rectángulo cualquiera ... ¿qué afirmación NO ES CIERTA?
   a. Lo dividimos en dos triángulos iguales.
   b. Lo dividimos en dos triángulos isósceles.
   c. Lo dividimos en dos triángulos rectángulos.
   d. Lo dividimos en dos triángulos de igual área.
   e. Una de las anteriores respuestas es falsa ...

Figura 11. Actividad de diagnóstico 1

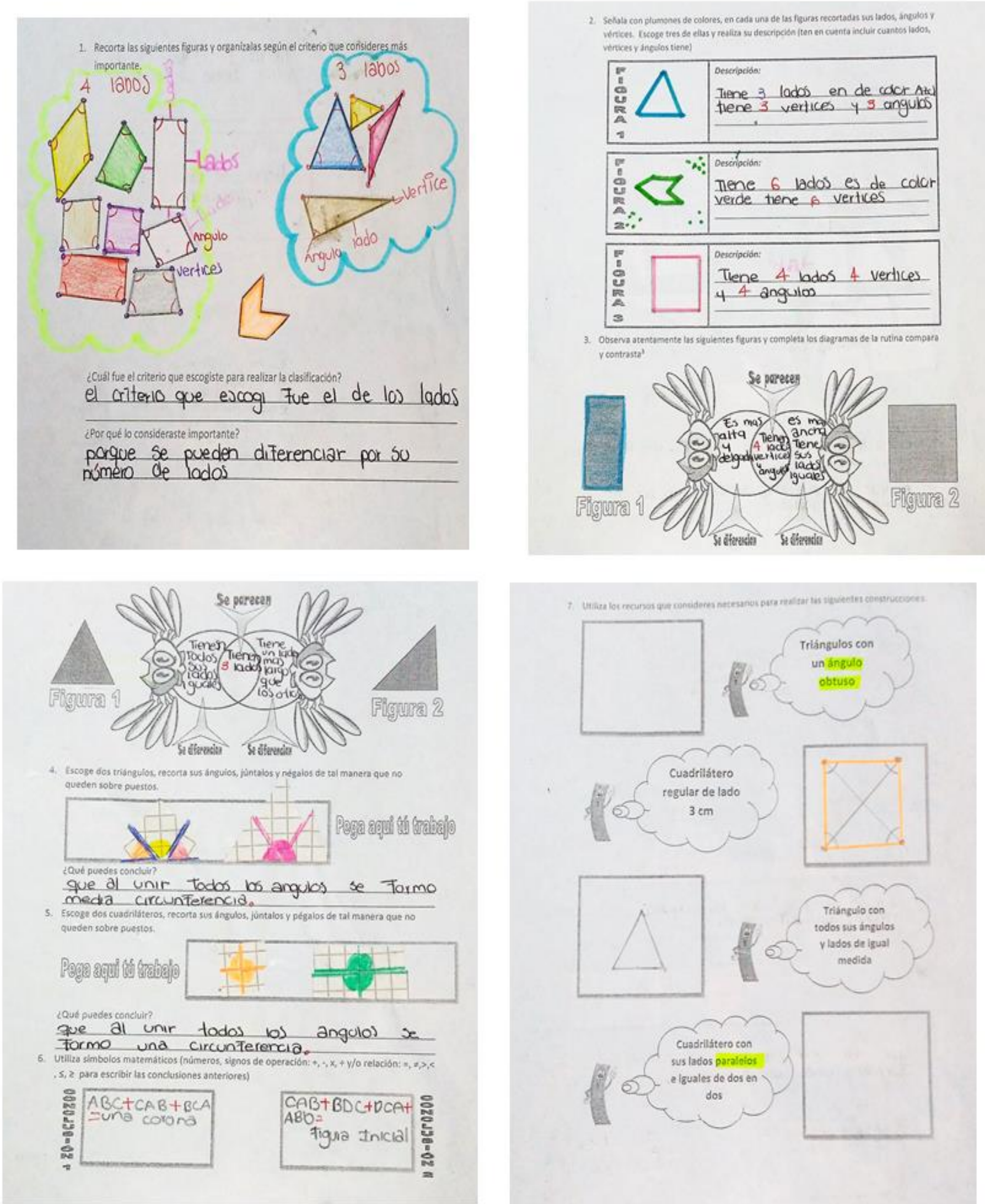


Figura 12. Actividad Diagnostico 2

Revisión de la implementación (reconocimiento de fallos en la implementación y sus efectos, mejoras para una próxima implementación). En la primera sesión se evidencia que aunque las preguntas se sacaron de un test validado y utilizado en muchos estudios sobre la Teoría de los Van Hiele, algunas de ellas eran confusas para los estudiantes, entre otras cosas porque muchos de ellos desconocían algunas palabras del lenguaje de la geometría utilizado en el cuestionario. Por lo tanto, se acordó resaltar las palabras desconocidas para tenerlas en cuenta en las actividades de intervención.

Sin embargo, para lograr completar este paso del plan de acción, fue necesario realizar una intervención del docente con aportes de algunos estudiantes, donde se explicó brevemente los conceptos desconocidos, relacionándolos con objetos del entorno que ayudaran en una fácil recordación.

En la segunda sesión se evidenció gran interés por parte de los estudiantes para dar respuestas acertadas a las cuestiones planteadas. Algunos de ellos manifestaron que "cuando las actividades son manuales, entendemos mejor y nos esforzamos por realizarlas de la mejor manera". Lo anterior hace pensar que los recursos tangibles que les permiten manipular los objetos de estudio posibilitan mejores resultados, aunque el desconocimiento de definiciones propias de la geometría limitó el trabajo.

Para una próxima implementación de este paso es necesario realizar una mejor adaptación de las preguntas y posterior validación. Es conveniente utilizar un lenguaje apropiado para los estudiantes teniendo en cuenta los preconceptos que tengan y que se hayan identificado en anteriores observaciones.

De acuerdo a los resultados de las actividades de diagnóstico se plantea la estrategia de intervención compuesta por siete actividades donde el objeto geométrico central de estudio son los triángulos, utilizando como recurso mediador el software Cabri Geometre contenido en la calculadora gráfica Voyage 200.

Las actividades que conforman la estrategia se desarrollaron en un periodo de tiempo aproximado de dos meses. A continuación se realiza una descripción de cada una:

Paso 2 de la acción. Explorando el mundo Cabri.

Objetivo: Reconocer objetos geométricos mediante la exploración de las herramientas ofrecidas por el software Cabri.

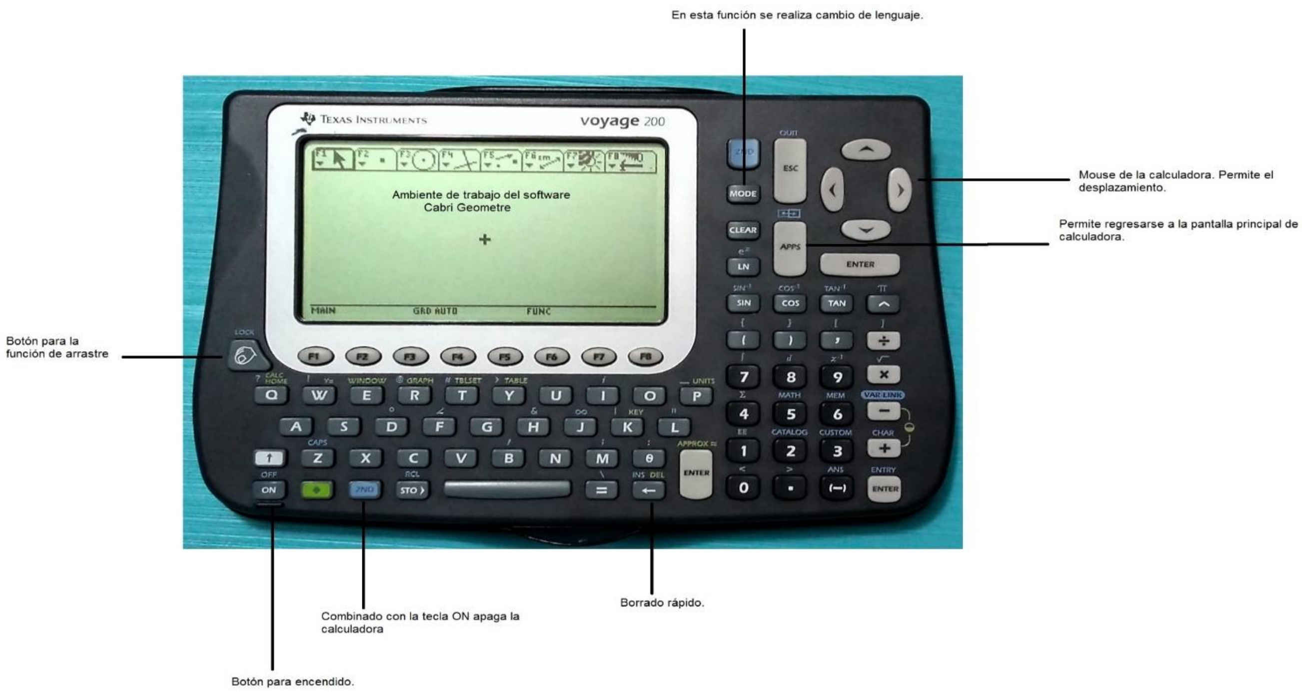


Figura 13. Ambiente de trabajo del Cabri y funciones de algunos botones de la calculadora.

Descripción: Los estudiantes conformaron grupos de cuatro integrantes, sin ninguna indicación para la agrupación. Inicialmente se realizó la explicación del funcionamiento de la calculadora en cuanto a las funciones de teclas básicas como apps, encendido, apagado, cómo guardar un archivo en Cabri y cómo hacer cambio de lenguaje. Posteriormente los estudiantes exploraron los diferentes menús del ambiente Cabri, realizaron las representaciones de los objetos geométricos que encontraron y teniendo en cuenta las preguntas ¿Qué ves? Y ¿Qué te hace decir eso?

En un espacio de socialización liderado por la docente, cada grupo presentó su trabajo con el fin de unificar conceptos y aclarar dudas.

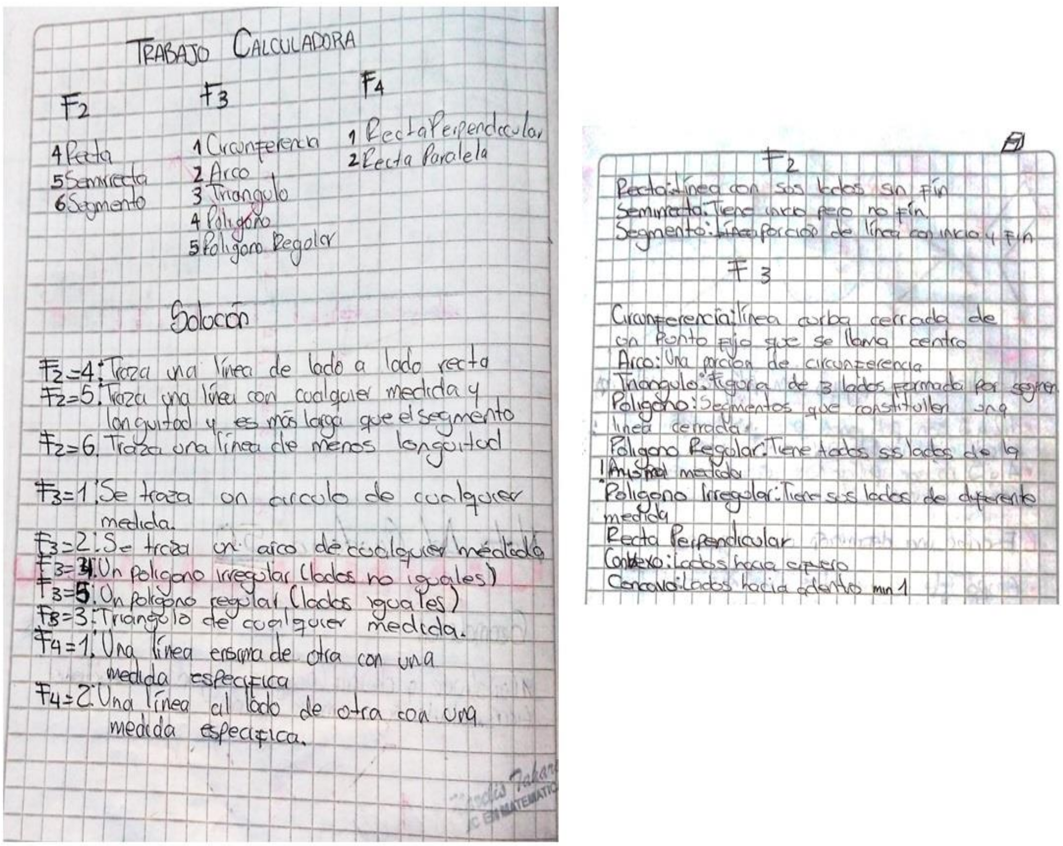


Figura 14. Definiciones construidas por los estudiantes.

Como actividad final los estudiantes construyen una composición (dibujo libre) utilizando diferentes objetos geométricos de los anteriormente explorados.

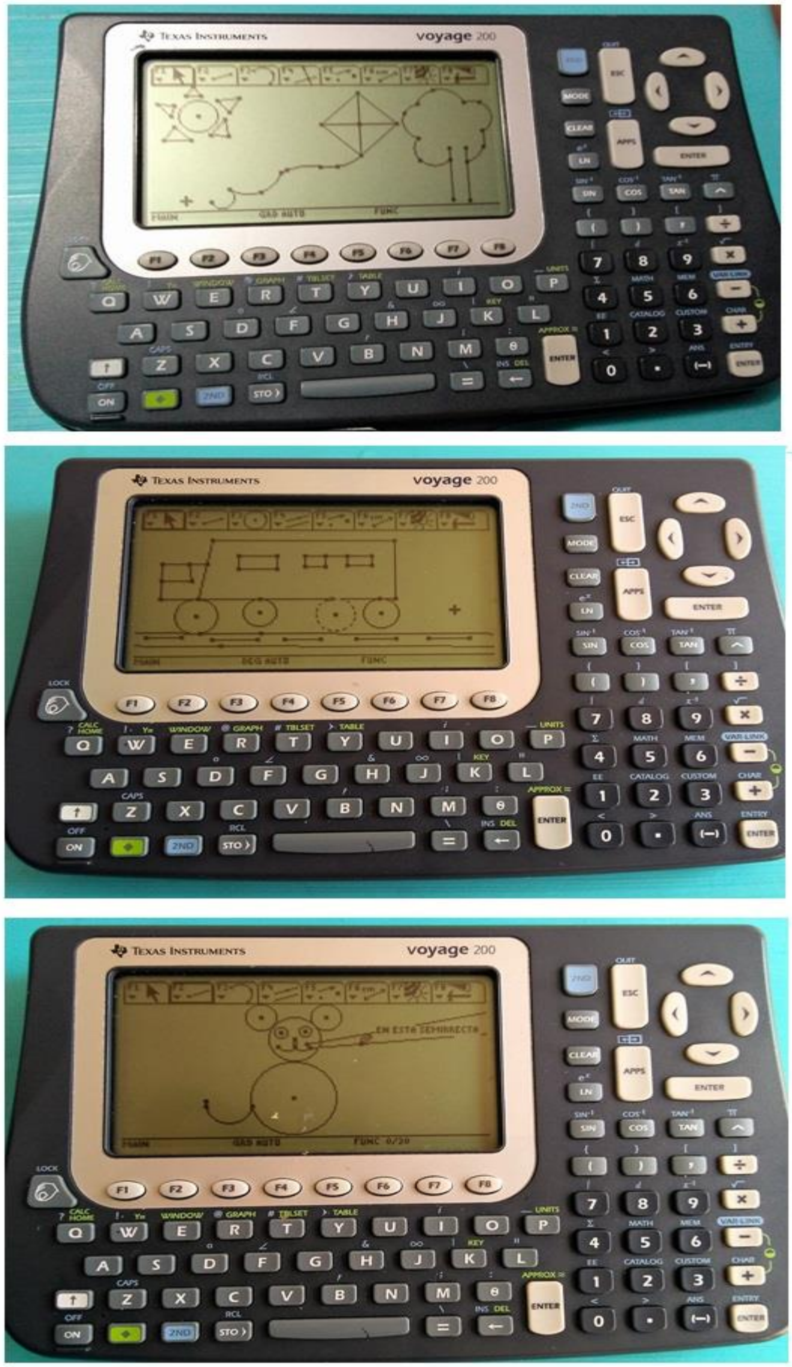


Figura 15. Composiciones geométricas realizadas por los estudiantes

<u>Revisión de la implementación (reconocimiento de fallos en la implementación y sus efectos, mejoras para una próxima implementación)</u>. En cuanto a la conformación de los grupos se presentó que los estudiantes con desempeño bajo y de inclusión se ubicaron juntos, al igual que los de desempeños alto y superior. De lo anterior se evidenció que el trabajo colaborativo fue muy productivo para unos y presentó notables dificultades para otros.

También se observó en los estudiantes gran interés por el manejo adecuado del recurso, sin embargo la manipulación por todos los integrantes del curso se vio limitada por contar con poco material.

En cuanto a la parte conceptual, se evidencia que a pesar de que los estudiantes no tenían claridad en algunos conceptos, las herramientas ofrecidas por el Cabri y la exploración del ambiente, les permitió a la mayoría de los grupos mediante el ensayo y el error, elaborar las composiciones geométricas e iniciar en la construcción de definiciones con el uso de un mayor número de términos del lenguaje geométrico.

Para la implementación de los siguientes pasos del plan de acción, es importante que los grupos de trabajo sean conformados pensando en las habilidades de cada estudiante, de tal forma que cada uno pueda aportar positivamente al trabajo realizado y aprender de las habilidades de sus otros compañeros. Además se debe hacer énfasis en profundizar sobre lo que se observa, para lograr que las inferencias sean más aproximadas a lo representado y así extraer el máximo de características de los objetos geométricos.

4.2 Ciclo II.

Teniendo en cuenta las acciones realizadas, se revisa la idea general y se ratifica las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la geometría, además de posibles factores asociados y otros que pueden generar que las acciones posteriores propendan por un mejoramiento progresivo. Además el contenido matemático a trabajar que son los ***triángulos***, genera la posibilidad de explorar al tiempo otros objetos geométricos.

Paso 3 de la acción. Triángulos en la calculadora… conceptos en mi mente

Objetivo: Construir acuerdos sobre el concepto de triángulo, identificar sus elementos y algunas de sus características.

Descripción: Esta es una adaptación de la propuesta didáctica realizada por la SED (1999) como material de apoyo para docentes, donde se hace la recomendación de llevarla a cabo utilizando material tangible como palillos, por ejemplo.

En esta actividad los estudiantes dibujaron una línea poligonal cerrada y una abierta usando las herramientas de Cabri. Cada línea debía estar formada por tres segmentos. Luego, realizaron una descripción de las construcciones, utilizando el lenguaje geométrico conocido. Posteriormente utilizaron la herramienta arrastre para validar y contestar a las siguientes cuestiones: ¿Es posible que las líneas poligonales construidas sean cóncavas? ¿Es posible que el triángulo tenga diagonales? Si la respuesta a la pregunta anterior es positiva, indique cuántas. Los resultados de cada grupo se socializaron para generar acuerdos que unifiquen criterios en los conceptos.

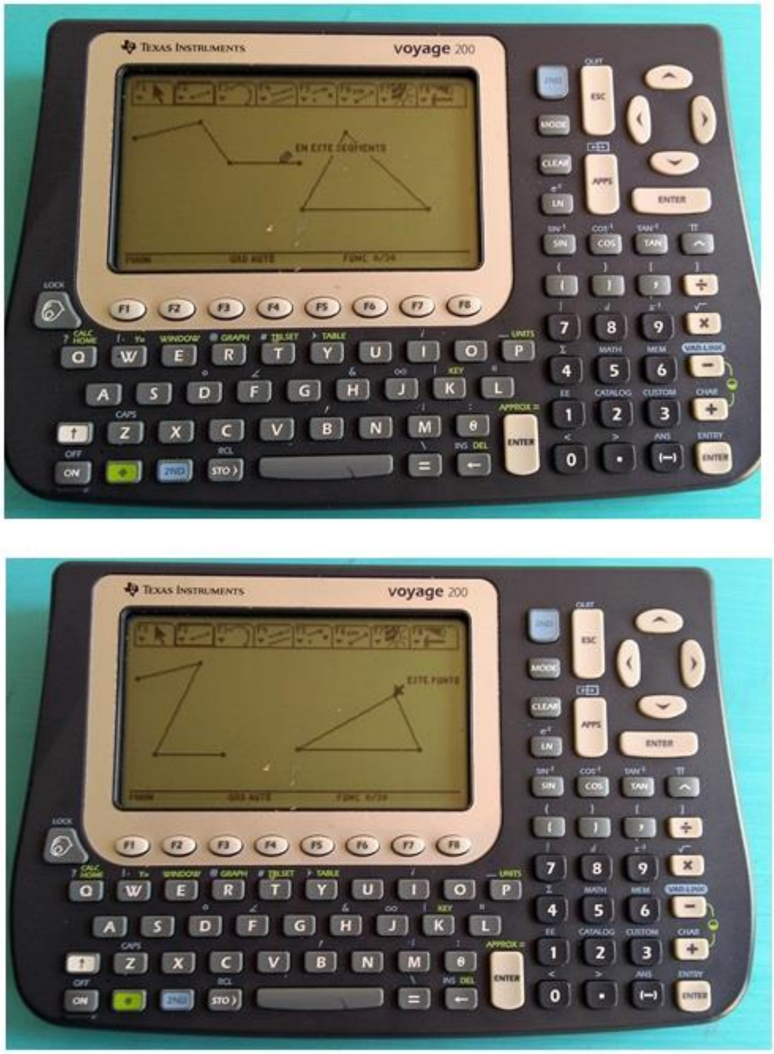


Figura 16. Construcciones líneas poligonales formadas por tres segmentos.

Revisión de la implementación (reconocimiento de fallos en la implementación y sus efectos, mejoras para una próxima implementación). Esta actividad fue adaptada de la propuesta didáctica realizada por la SED (1999) como material de apoyo para docentes.

Durante el desarrollo de la actividad se evidenció que los estudiantes jugaron con las herramientas ofrecidas por el Cabri para representar diferentes clases de triángulos, notando que el convencional (equilátero) no es el único que existe. Muchos desconocían la definición de polígono cóncavo, sin embargo uno de los estudiantes explico a los demás que “se llaman cóncavos a los polígonos que tienen al menos una de sus puntas hacia el interior de la figura” y posteriormente mostró algunos ejemplos. De acuerdo a lo anterior se pone en manifiesto nuevamente que el dominio de algunos términos propios de la geometría, resulta relevantes para el desarrollo de las acciones pedagógicas. Se destaca la participación activa de los miembros de la clase y el interés por expresar sus ideas y compartirlas con los demás.

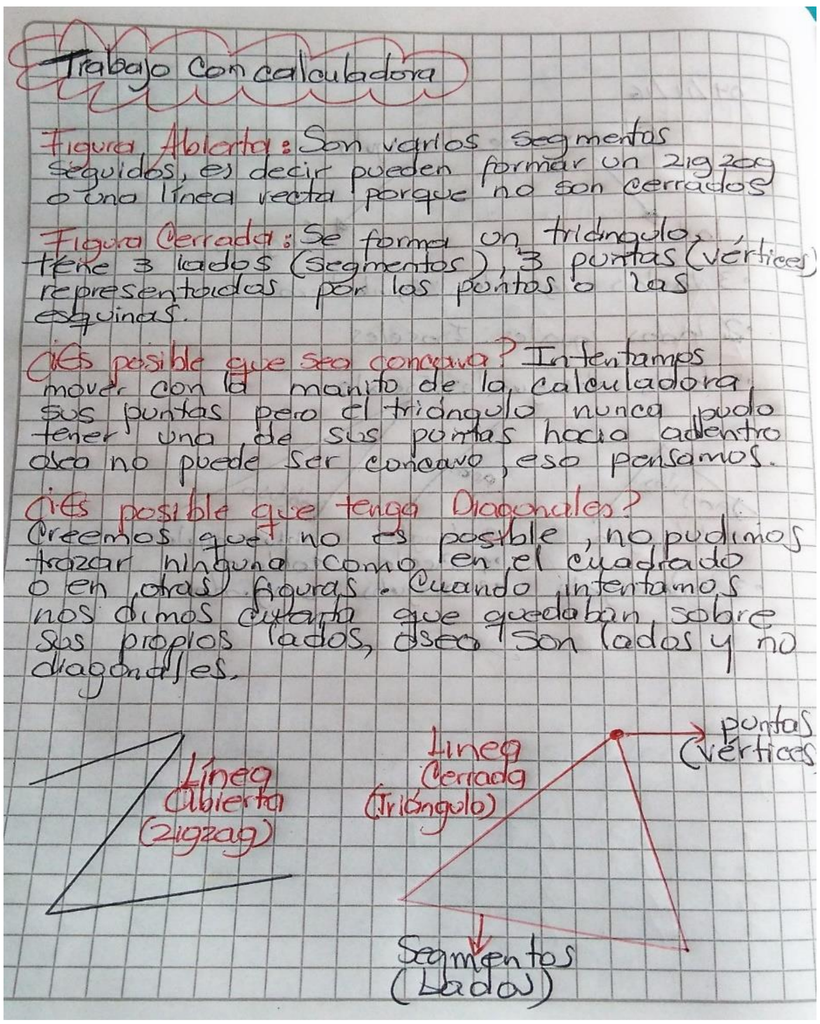

Trabajo Con calculadora

Figura Abierta: Son varios segmentos seguidos, es decir pueden formar un zigzag o una línea recta porque no son cerrados

Figura Cerrada: Se forma un triángulo, tiene 3 lados (Segmentos), 3 puntas (vértices) representadas por los puntos o las esquinas.

¿Es posible que sea concava? Intentamos mover con la manito de la calculadora sus puntas pero el triángulo nunca pudo tener una de sus puntas hacia adentro osea no puede ser concavo, eso pensamos.

¿Es posible que tenga Diagonales? Creemos que no es posible, no pudimos trazar ninguna como en el cuadrado o en otras figuras. Cuando intentamos nos dimos cuenta que quedaban sobre sus propios lados, osea son lados y no diagonales.

Figura 17. Conclusiones de la actividad "Triángulos en la calculadora...Conceptos en mi mente".

Paso 4 de la acción. Una figura indeformable .

Objetivo: Comprobar que los triángulos son polígonos que no se deforman cuando actúan sobre él fuerzas.

Descripción: Los estudiantes dibujaron un triángulo y otro polígono diferente, usando diferentes herramientas del Cabri (segmentos f2 – 4, triángulo, polígono y/o polígono regular f3 – 3, 4,5). Luego utilizaron el arrastre para tomar la figura por uno de sus vértices y moverla en diferentes direcciones. De acuerdo a las observaciones, los estudiantes respondieron a las preguntas: ¿Qué sucede con el triángulo? ¿Qué sucede con el otro polígono?

Figura 18. Construcciones de polígonos y movimientos con la función de arrastre.

Revisión de la implementación (reconocimiento de fallos en la implementación y sus efectos, mejoras para una próxima implementación). Los estudiantes a partir de la exploración evidenciaron que al realizar movimientos a los vértices de los triángulos no se deforman, lo que sí sucede con los otros polígonos.

Sin embargo, estas conclusiones requieren de un seguimiento y orientación de la docente por medio de interrogantes que generen avanzar en el proceso de visualización global, y requiere un mayor análisis de las acciones realizadas.

Paso 5 de la acción. ¿Tres segmentos siempre forman un triángulo?

Objetivo: Hacer inferencias sobre la relación que debe existir entre las longitudes de los lados de los triángulos para lograr construirlos.

Descripción: Se propuso a los estudiantes que construyeran las siguientes triadas de segmentos usando la opción f2 – 5 en la calculadora y la opción f6 – 1, para determinar las medidas y verificaran en cuáles de los casos es posible formar triángulos y en cuáles no. Seguidamente intentaran explicar que sucede en los casos en los que no se forman los triángulos.

Triadas:

- 5 cm / 3 cm / 1 cm
- 4 cm/ 2 cm/ 5 cm
- 6 cm / 2 cm / 3 cm
- 7 cm / 8 cm/ 9 cm

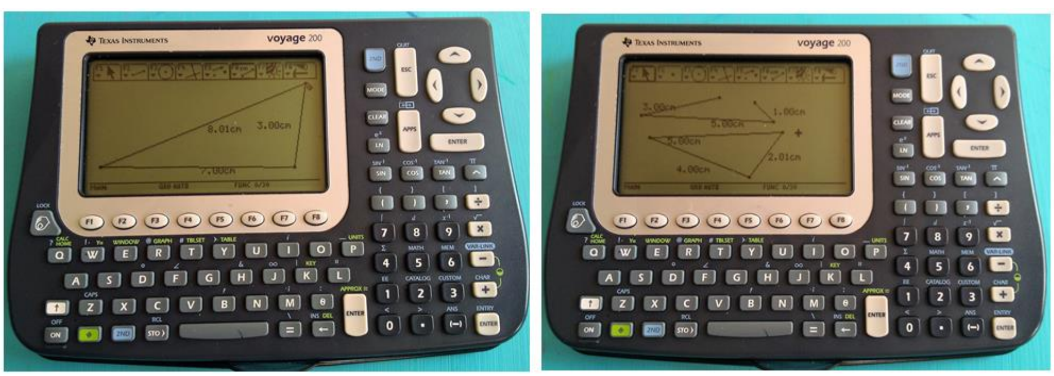


Figura 19. Construcción de la actividad ¿Tres segmentos siempre forman un triángulo? Usando la calculadora.

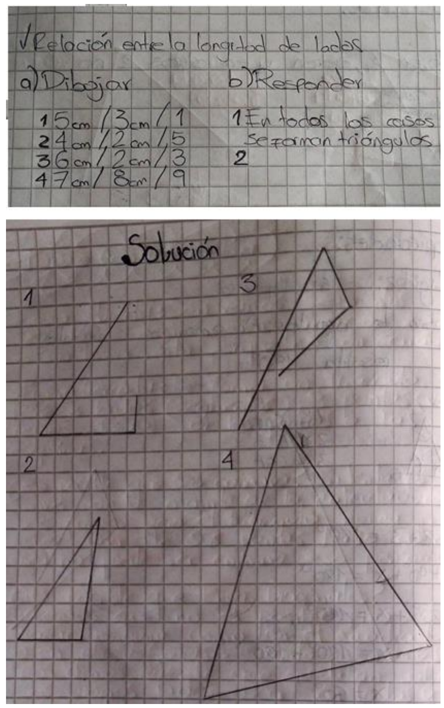


Figura 20. Construcción de la actividad ¿Tres segmentos siempre forman un triángulo? Usando lápiz y papel

Revisión de la implementación (reconocimiento de fallos en la implementación y sus efectos, mejoras para una próxima implementación). Por disponibilidad del material de trabajo fue necesario ajustar la planeación y realizar este paso de la acción en dos momentos: en el primero los estudiantes debieron hacer las construcciones con lápiz y papel; es esta sesión se evidenciaron dificultades como el uso inadecuado de la regla y sentimientos de inseguridad y/o frustración cuando se daban cuenta que su trabajo difería al de otro compañero que había podido realizar las construcciones adecuadamente y por lo tanto debían repetirlo. En la segunda sesión realizaron las construcciones utilizando la calculadora. En esta ocasión, manifestaban las ventajas de la herramienta en cuanto les permitía manipular las construcciones hasta lograr obtener lo que se había propuesto.

Paso 6 de la acción. Sumando ángulos.

<u>Objetivo:</u> Verificar cual es el resultado de la suma de la medida de los ángulos internos de cualquier triángulo.

<u>Descripción:</u> Cada grupo construyó un triángulo. Seguido, realizaron la medición de sus tres ángulos. Posteriormente, utilizando la función calcular del cabri (f6 – 6) los estudiantes realizaron la sumatoria de las medidas de los ángulos obtenidas previamente para responder a las cuestiones ¿Cuál es el resultado de la suma? Si se utiliza la función de arrastre para mover los vértices del triángulo ¿Qué sucede con la medida de los ángulos? ¿Qué sucede con el resultado de la suma?

En un segundo momento se reunieron dos grupos para compartir el resultado de la experiencia y finalmente se realizó una plenaria para establecer acuerdos y conclusiones.

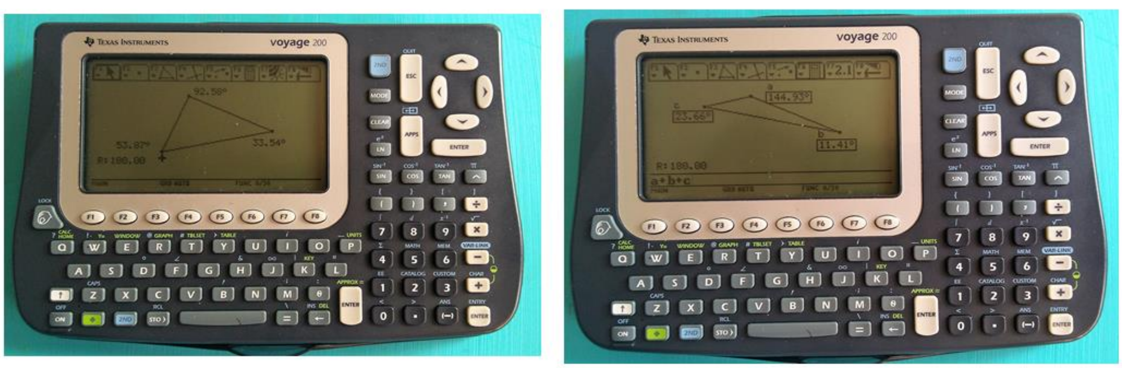


Figura 21. Construcción y Suma de ángulos internos.

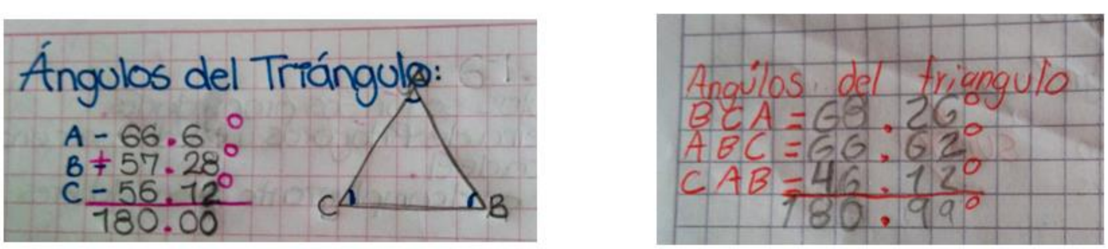


Figura 22. Conclusiones de la actividad sumando ángulos

Revisión de la implementación (reconocimiento de fallos en la implementación y sus efectos, mejoras para una próxima implementación). Se evidencia que algunos estudiantes aún no han adquirido la habilidad para medir adecuadamente los ángulos utilizando la calculadora por lo que la actividad se les dificulta.

Antes de continuar se propuso que cada grupo realizara varios ángulos para practicar el proceso de su medición, clasificación y otros elementos conceptuales que se pudieran trabajar.

El espacio de trabajo en grupo y la plenaria final, resultan provechosas en la medida que los estudiantes establecen acuerdo sobre la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo, verificada en la realización del ejercicio.

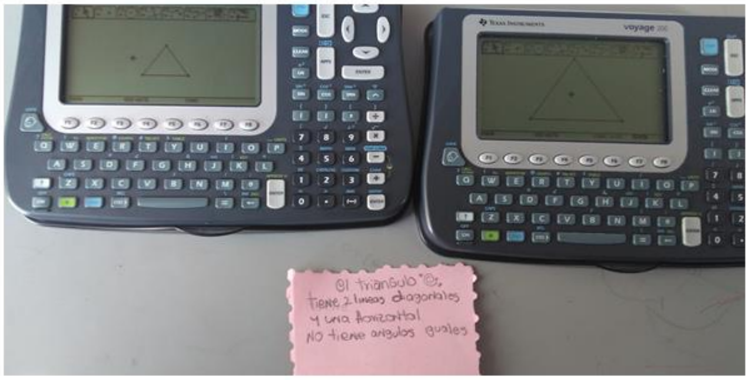
Es conveniente antes de realizar la actividad proponer una mejor exploración de la herramienta de medición con la calculadora.

Paso 7 de la acción. Adivina como es mi figura

Objetivo: Utilizar diferentes registros para representar objetos geométricos de acuerdo a las características descritas.

Descripción: Cada grupo utilizó las herramientas ofrecidas por el Cabri para construir un polígono. Seguidamente en una ficha de cartulina realizaron la descripción de dicha figura y la intercambiaron con otro grupo. Luego, cada grupo intentó reproducir la figura descrita por sus otros compañeros teniendo en cuenta la información suministrada por ellos. Finalmente se mostró en el televisor la figura inicial y la figura realizada por los otros compañeros para saber qué tanto acertaron de acuerdo al registro dado.

Se dio a los estudiantes un espacio para reflexionar e identificar los posibles fallos en la realización de la actividad.



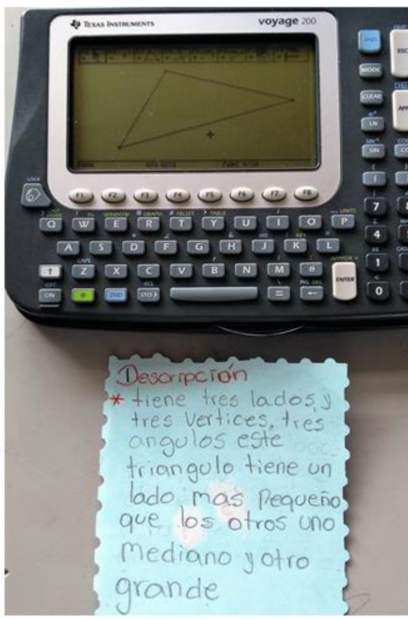


Figura 23. Registros de la actividad "Adivina cómo es mi figura"

Revisión de la implementación (reconocimiento de fallos en la implementación y sus efectos, mejoras para una próxima implementación). Los estudiantes limitaron sus construcciones a triángulos. La información suministrada por algunos grupos en el registro verbal no fue lo suficientemente clara como para que sus otros compañeros reprodujeran el registro gráfico.

De acuerdo a lo anterior, esta actividad se puede realizar en el inicio del plan de acción y puede servir para identificar los términos geométricos que manejan los estudiantes, además que al no estar estudiando un solo objeto, es posible que no se limite la construcción de los registros.

Paso 8 de la acción. Veo – Pienso- Me pregunto

Objetivo: Identificar características de triángulos que permitan clasificarlos.

Descripción: Los estudiantes observaron tres triángulos proyectados en el televisor desde la calculadora. Luego diligenciaron la ficha de la rutina de pensamiento "Veo – Pienso – Me Pregunto". Se socializaron los resultados de la actividad y se realizó una lluvia de ideas con los aportes de los grupos.

Posteriormente la docente transfirió los triángulos a cada calculadora para que los estudiantes realizaran la exploración necesaria para contestar las siguientes cuestiones: ¿Las observaciones registradas en la ficha de la rutina de pensamiento son ciertas?, En el triángulo que tiene tres lados con la misma longitud ¿Cómo son sus ángulos?, En el triángulo que tiene dos lados con la misma longitud ¿Cómo son sus ángulos?, En el triángulo que tiene tres lados con diferente longitud ¿Cómo son sus ángulos?. Finalmente se socializó el ejercicio.

Revisión de la implementación (reconocimiento de fallo en la implementación y sus efectos, mejoras para una próxima implementación). Los estudiantes tienen un mejor dominio de las herramientas para realizar mediciones de longitud y ángulo y en general del ambiente Cabri.

En cuanto a los registros en la ficha de la rutina de pensamiento las respuestas del "Veo" en algunos grupos son muy limitadas y superficiales y en ocasiones lo confunden con el "Pienso", por lo tanto es indispensable continuar fomentando en ellos la habilidad visual.

Pese a lo anterior, las conclusiones de un significativo número de estudiantes son cada vez más claras y elaboradas, mostrando mayor apropiación y reconocimiento de los objetos de estudio.

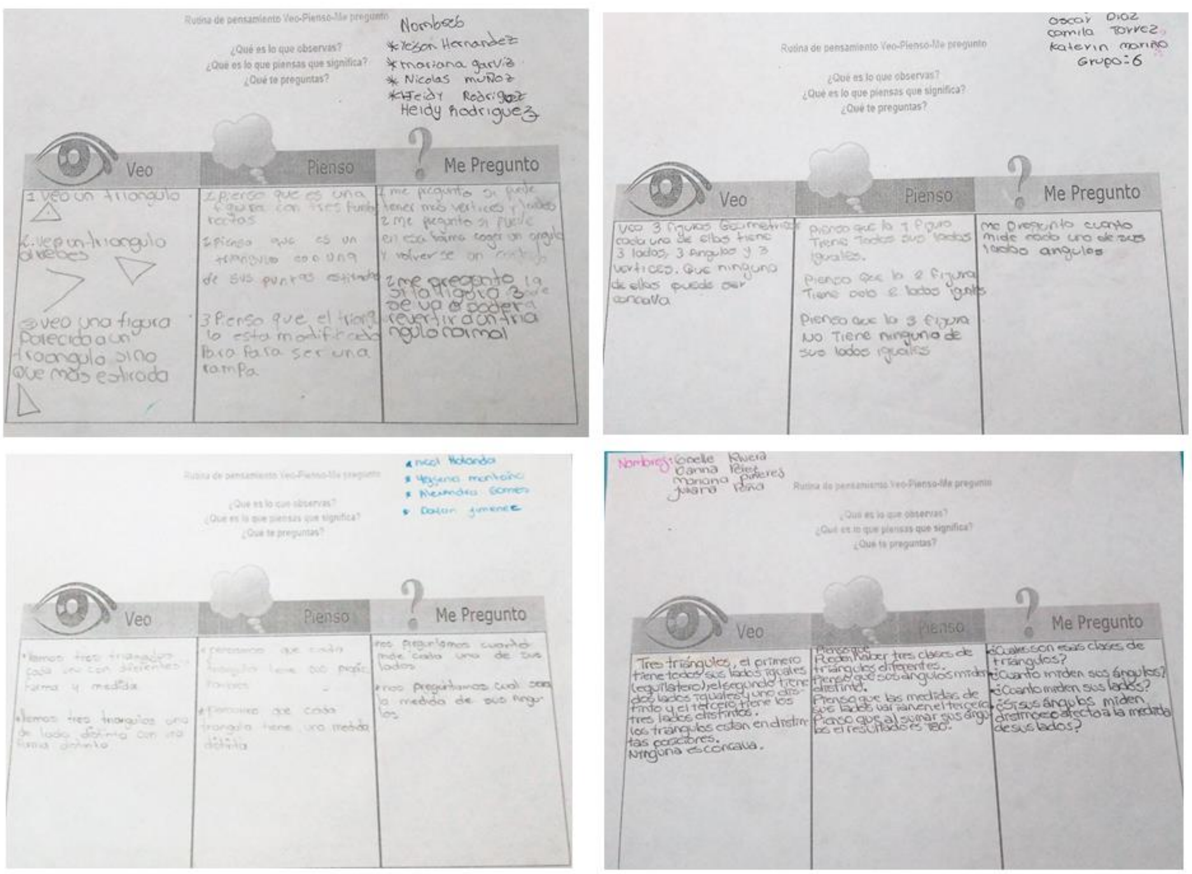


Figura 24. Rutina de pensamiento Veo - Pienso - Me pregunto

Capítulo 5. Análisis

5.1 Hallazgos y resultados

A continuación se presentan los hallazgos de las actividades que se detallaron en el plan de acción con el siguiente esquema: se muestran los datos generales que obedecen a los resultados con algunas observaciones, posteriormente se realiza el análisis a la luz de la teoría de acuerdo con las categorías: Niveles de Van Hiele y Práctica docente.

5.1.1 Prueba de diagnóstico – parte 1

A continuación se presentan los resultados de la parte 1 del diagnóstico. El test fue respondido en su totalidad por 37 estudiantes.

***Pregunta 1*.**

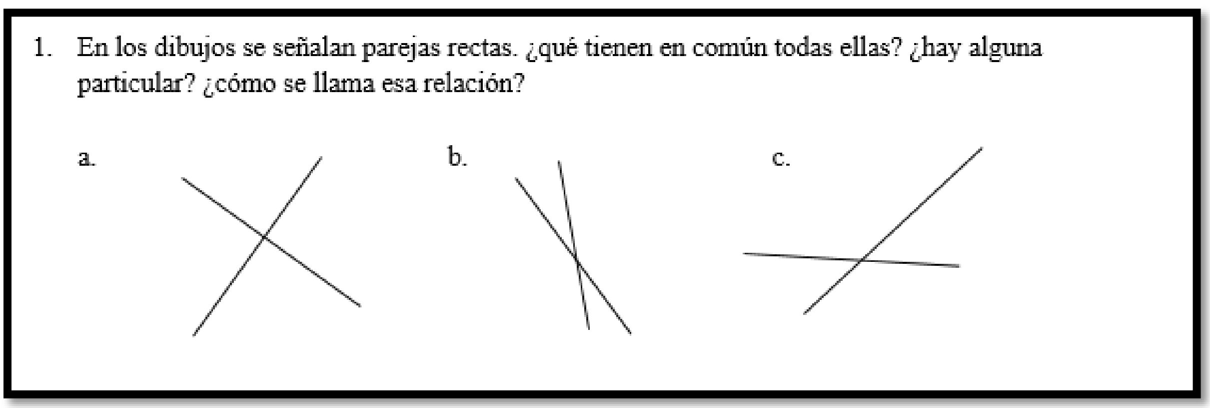


Figura 25. Pregunta 1 - Diagnóstico parte 1

Al ser una pregunta abierta se agruparon las unidades de análisis de acuerdo a la similitud que hay entre ellas, estableciendo una proposición con la que se expresara la idea central de cada respuesta. La codificación utilizada corresponde al número de cuestionario y de estudiante respectivamente (Ver Anexo 7).

De lo anterior se obtuvo que: 18 estudiantes identifican que todas las parejas de rectas se unen. Visual y conceptualmente no identifican ninguna relación entre las parejas de rectas. 13 estudiantes identifican que las parejas de rectas tienen un único punto de intersección y dicen de la primera que tiene forma de "equis". 2 estudiantes identifican como característica común entre las parejas de rectas "que se unen o son intersecciones" y las relacionan con la letra "x". 1 estudiante habla de objetos matemáticos presentes en las intersecciones (ángulos) y dice que identifica en una de las parejas la relación de paralelismo, aunque aclara no estar seguro y no dice cuál de las parejas cumpliría dicha relación. 1 estudiante identifica en la primera pareja de la relación de perpendicularidad. 1 estudiante visualmente percibe que al unirse las dos rectas se dividen en cuatro segmentos (cada una en dos) y relaciona cada pareja con una letra equis y 1 estudiante no identifica relación alguna entre las parejas de resta, su respuesta no es coherente con la pregunta realizada.

Pregunta 2. Es una pregunta de selección múltiple con única respuesta e indaga sobre cuál(es) polígono(s) de un grupo de cuatro presentados es cuadrado.

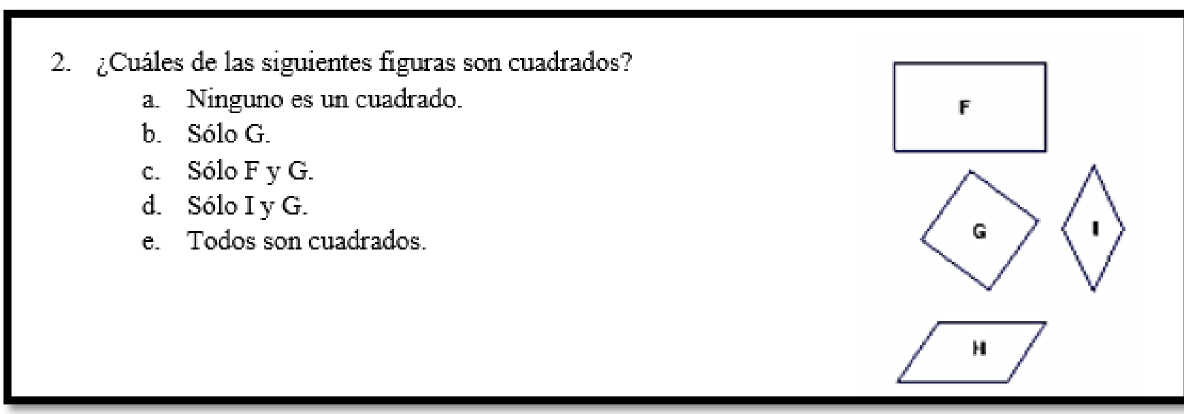


Figura 26. Pregunta 2 - Diagnóstico parte 1

En la siguiente figura se muestran los resultados obtenidos:

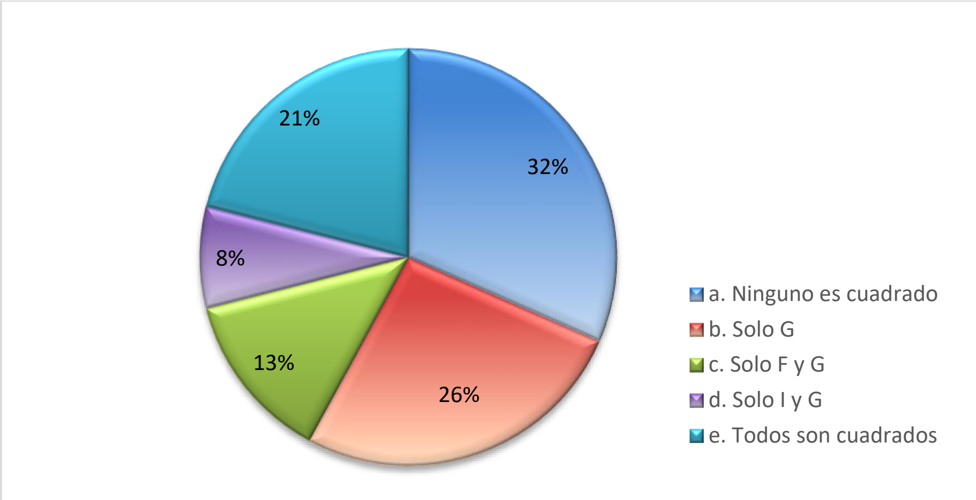
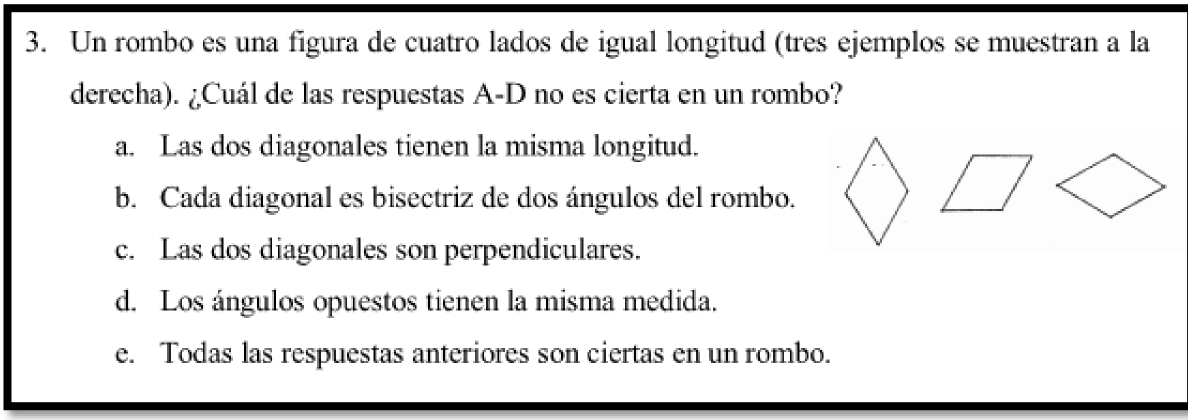


Figura 27. Resultados de la pregunta 2 - Test diagnóstico, parte 1

Fuente. Elaboración propia

Se puede observar que la mayoría de los estudiantes no reconoce el polígono cuadrado al no aparecer en la posición que normalmente acostumbran a representarlo. Una cantidad representativa afirma que ninguno de los polígonos presentados corresponde a un cuadrado y otro número significativo de estudiantes reconoce a todas las figuras formadas por cuatro segmentos como cuadrado.

Pregunta 3. Es una pregunta de selección múltiple con única respuesta e indaga sobre las características del rombo. Se les mostró a los estudiantes algunos rombos y se enunciaron cinco proposiciones de las cuales deberían escoger la que no correspondía a un rombo.



3. Un rombo es una figura de cuatro lados de igual longitud (tres ejemplos se muestran a la derecha). ¿Cuál de las respuestas A-D no es cierta en un rombo?
    a. Las dos diagonales tienen la misma longitud.
    b. Cada diagonal es bisectriz de dos ángulos del rombo.
    c. Las dos diagonales son perpendiculares.
    d. Los ángulos opuestos tienen la misma medida.
    e. Todas las respuestas anteriores son ciertas en un rombo.

Figura 28. Pregunta 3 - Diagnóstico parte 1

La respuesta de la mayoría de los estudiantes es correcta. Sin embargo, tal como se observa en la figura 29, ningún estudiante escoge la opción b, donde aparece el concepto de bisectriz, ya que manifiestan desconocer su significado. Además, varios de ellos indagan por el significado de perpendicularidad que aparece en la opción c, la segunda con mayor porcentaje de selección.

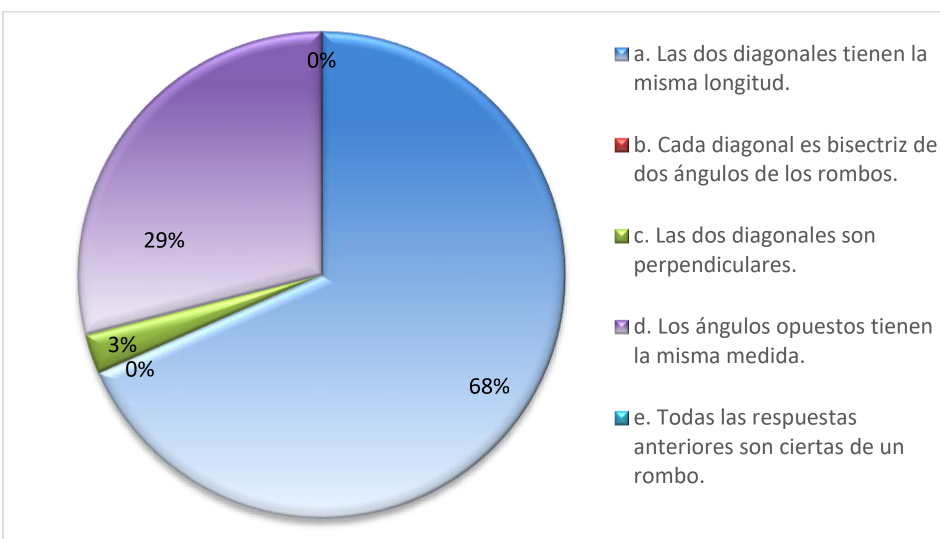


Figura 29. Resultados de la pregunta 3 - Test diagnóstico, parte 1

Pregunta 4. Es una pregunta abierta donde los estudiantes deben elaborar una definición para el objeto geométrico polígono, a partir de seis imágenes que se muestran.

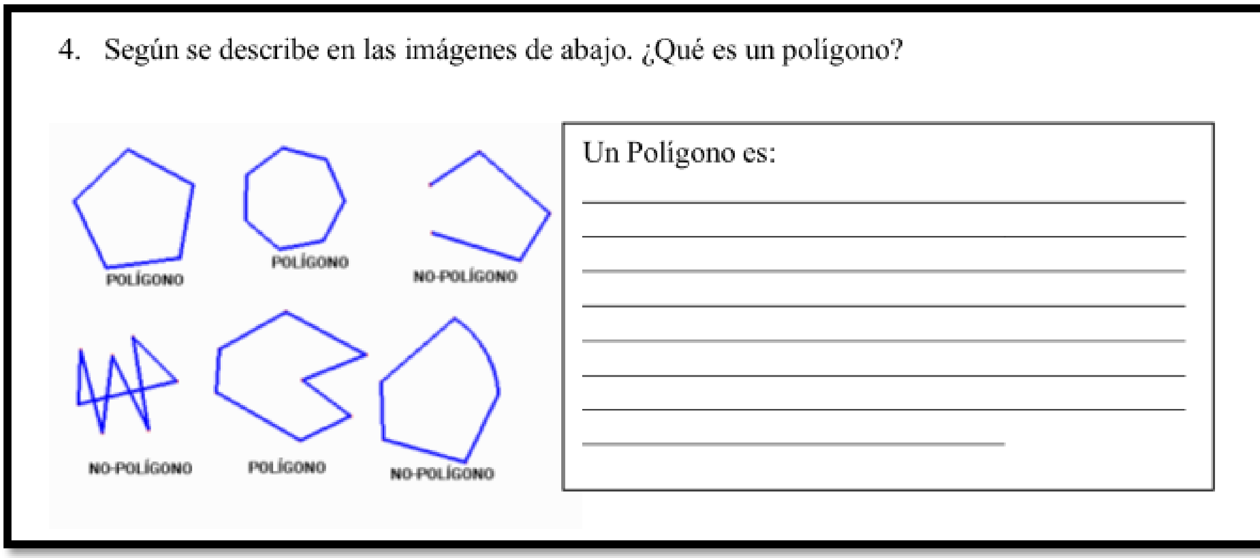
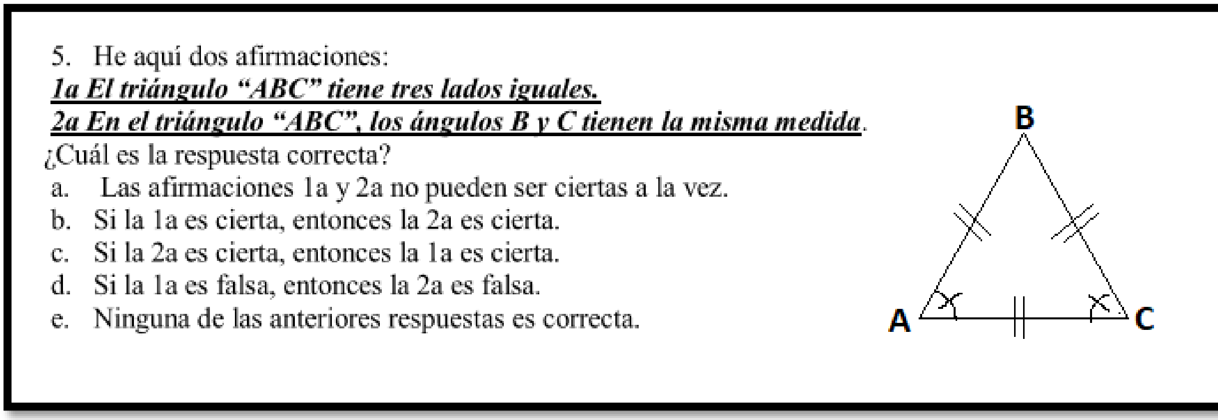


Figura 30- Pregunta 4 - Diagnóstico 1

Por ser una pregunta abierta, se agrupan las unidades de análisis de acuerdo al contenido semejante que se extrae de ellas (Ver anexo 8) y se obtienen los siguientes hallazgos: 15 estudiantes definen un polígono como una figura cerrada de lados rectos, 1 de ellos afirma además que los lados deben tener diferente medida, 12 de ellos llaman a los segmentos que forman el polígono “lados” y los otros 3 los llaman “líneas rectas”. 6 estudiantes definen polígono como una figura de cinco o más lados rectos y cerrados y 7 estudiantes definen el polígono como una figura de cinco o más lados de la misma medida, estos 13 estudiantes realizan mediciones antes de escribir su definición. 4 estudiantes dicen que el polígono es una figura de 5 o más lados de diferente medida. 1 estudiante llama polígono a las figuras de dos o más lados y 4 estudiantes dicen que son figuras cerradas de dos o más lados y afirman que cuentan con elementos como vértices y lados.

Pregunta 5. Se muestra un triángulo ABC y sobre él se plantean dos afirmaciones con respecto a la relación entre la medida de sus ángulos y su lados.



5. He aquí dos afirmaciones:

1a El triángulo "ABC" tiene tres lados iguales.

2a En el triángulo "ABC", los ángulos B y C tienen la misma medida.

¿Cuál es la respuesta correcta?

a. Las afirmaciones 1a y 2a no pueden ser ciertas a la vez.
b. Si la 1a es cierta, entonces la 2a es cierta.
c. Si la 2a es cierta, entonces la 1a es cierta.
d. Si la 1a es falsa, entonces la 2a es falsa.
e. Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.

Figura 31. Pregunta 5 - Diagnóstico parte 1

Los estudiantes debieron seleccionar la respuesta que establece una relación de implicación correcta entre las dos afirmaciones.

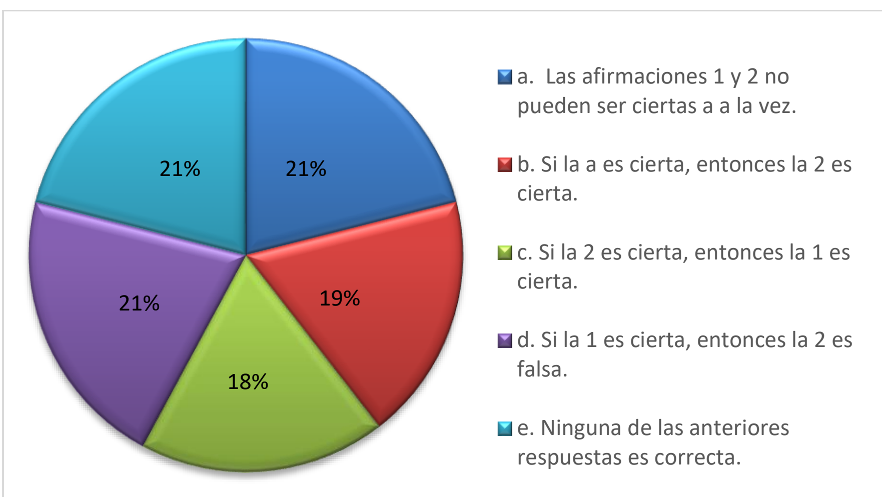
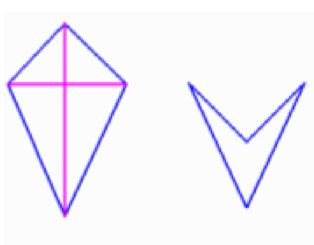


Figura 32. Resultados pregunta 5 - Test diagnóstico, parte 1

En los resultados presentados en la figura 32 se puede apreciar que en las respuestas no hay diferencias significativas, ya que número de estudiantes que seleccionaron cada opción de respuesta es similar (entre 7 y 8 estudiantes por opción de respuesta). De acuerdo a las observaciones realizadas se evidencia que esta fue una de las preguntas que más se les dificultó responder a los estudiantes ya que expresaron “no entender el enunciado ni las opciones de respuesta”. Se acordó hacer una representación gráfica de la situación propuesta en el enunciado, no obstante la mayoría de los estudiantes continuó sin comprender el enunciado y solo el 19% respondió acertadamente.

Pregunta 6. Se presentaron dos imágenes que corresponden a cometas y se pidió a los estudiantes elaborar un concepto de cometa apoyados en los ejemplos.

6. Las figuras de abajo se llaman “COMETAS". Escribe una definición de ¿Qué es una cometa?



Un cometa es: ______________________

Figura 33. Pregunta 6 - Diagnóstico parte 1

En la tabla 16 (ver anexo 9) se muestra la agrupación de las unidades de análisis y de ese proceso se exponen los siguientes resultados: 6 estudiantes definen cometa como un objeto que vuela, 2 estudiantes dicen que es una figura geométrica con varios lados (más de cuatro), 11 estudiantes dicen que es una figura formada por cuatro lados rectos, cuyas medidas son diferentes, uno de estos estudiantes dice que en los cometas se pueden trazar dos líneas a las que cree se le llaman diagonales. 7 estudiantes relacionan el concepto de cometa con un rombo y aclara uno de ellos que tienen la parte superior más corta. 4 estudiantes dicen que es una figura de cuatro lados de igual medida, 6 estudiantes lo definen como una figura de cuatro lados, uno de ellos aclara que es un cuadrilátero por tener cuatro lados y 1 estudiante dice que son figuras con forma de diamante.

De lo anterior se puede afirmar que aproximadamente el 47% de los estudiantes se acerca a una definición básica de cometa, ya que identifican que tienen cuatro lados o se llaman cuadriláteros y que la medida de sus cuatro lados no es igual.

Pregunta 7 y 8. Se plantearon cuatro proposiciones en las opciones de respuestas sobre qué sucedería al trazar la diagonal de un cuadrado y un rectángulo, respectivamente. Los estudiantes debieron seleccionar la afirmación que no es cierta en cada caso.

7. Si trazamos la diagonal de un cuadrado ... ¿qué afirmación NO ES CIERTA?
   a. Lo divido en dos triángulos iguales.
   b. Lo divido en dos triángulos isósceles.
   c. Lo divido en dos triángulos rectángulos.
   d. Lo divido en dos triángulos de igual área.
   e. Alguna de las anteriores respuestas tiene que ser falsa.

8. Si trazamos la diagonal de un rectángulo cualquiera ... ¿qué afirmación NO ES CIERTA?
   a. Lo dividimos en dos triángulos iguales.
   b. Lo dividimos en dos triángulos isósceles.
   c. Lo dividimos en dos triángulos rectángulos.
   d. Lo dividimos en dos triángulos de igual área.
   e. Una de las anteriores respuestas es falsa ...

Figura 34. Preguntas 7 y 8 - Diagnóstico parte 1

Para dar solución al interrogante la mayoría acudió a la realización de una construcción con lápiz y papel que le permitiera visualizar la situación. En las figura 35 y 36, se presentan los resultados obtenidos en las dos preguntas.

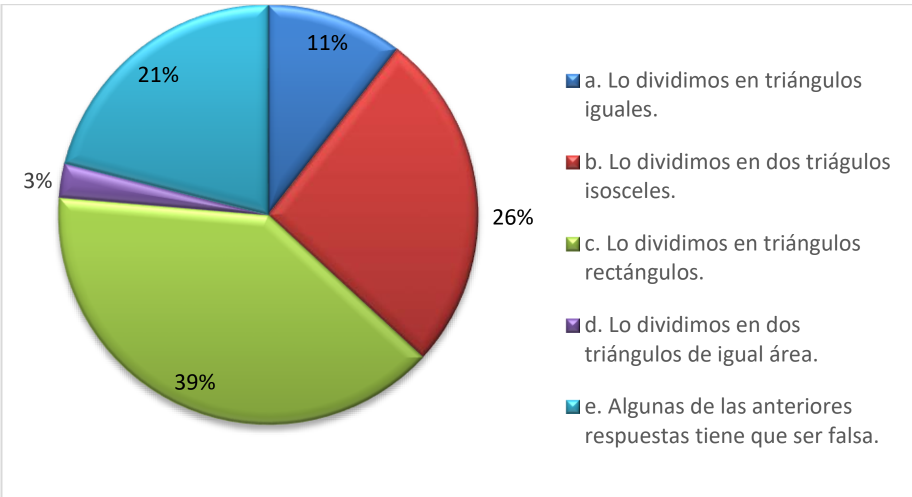


Figura 35. Resultado pregunta 7 - Test diagnóstico, parte 1

Fuente. Elaboración propia

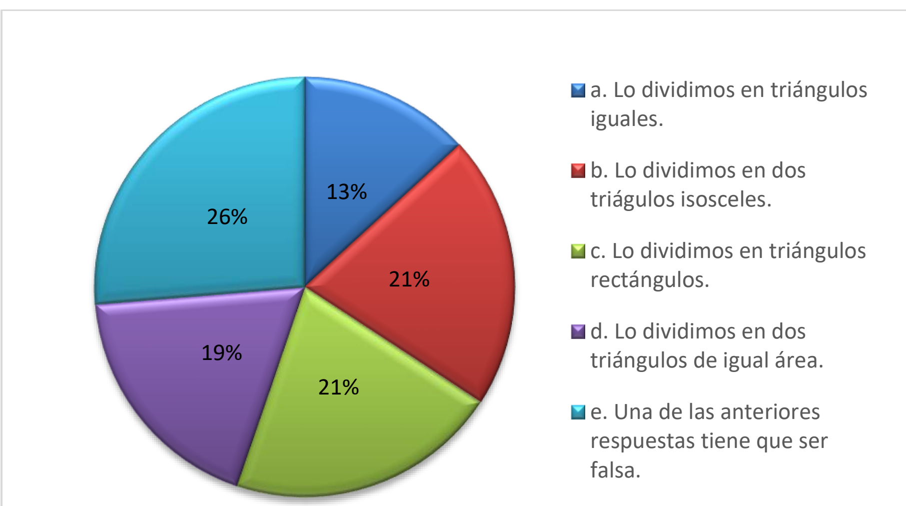


Figura 36. Respuestas pregunta 8 - Test diagnóstico, parte 1

Fuente. Elaboración propia

En la figura 35 se observa que las opciones más seleccionadas no son correctas, ya que ambas afirmaciones son ciertas, sin embargo en el desarrollo de la actividad los estudiantes manifiestan desconocer qué son triángulo rectángulo y triángulo isósceles.

Para la pregunta 8 la mayoría de los estudiantes dan una respuesta errada (ver respuestas en la figura 36). El desconocimiento de términos del lenguaje geométrico, al igual que en otras preguntas del test, limita la realización de la actividad por tanto los estudiantes manifiestan tensión e inseguridad en la sesión.

5.1.2 Prueba de diagnóstico –parte 2.

Esta actividad está conformada por siete ejercicios de exploración, observación y manipulación, donde los estudiantes debieron responder a las cuestiones planteadas.

Actividad 1. Se solicita a los estudiantes que recorten un grupo de polígonos y posteriormente los organicen utilizando el criterio que consideren importante.

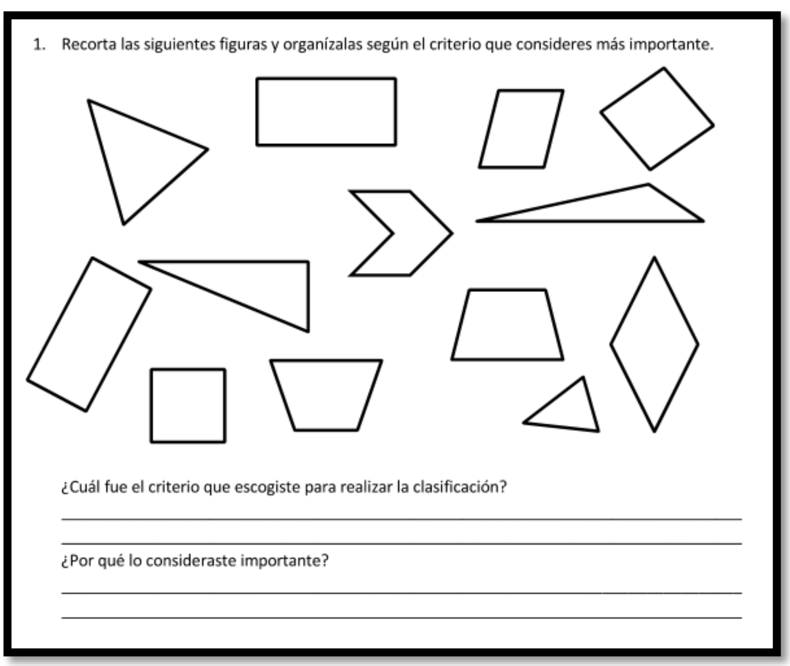
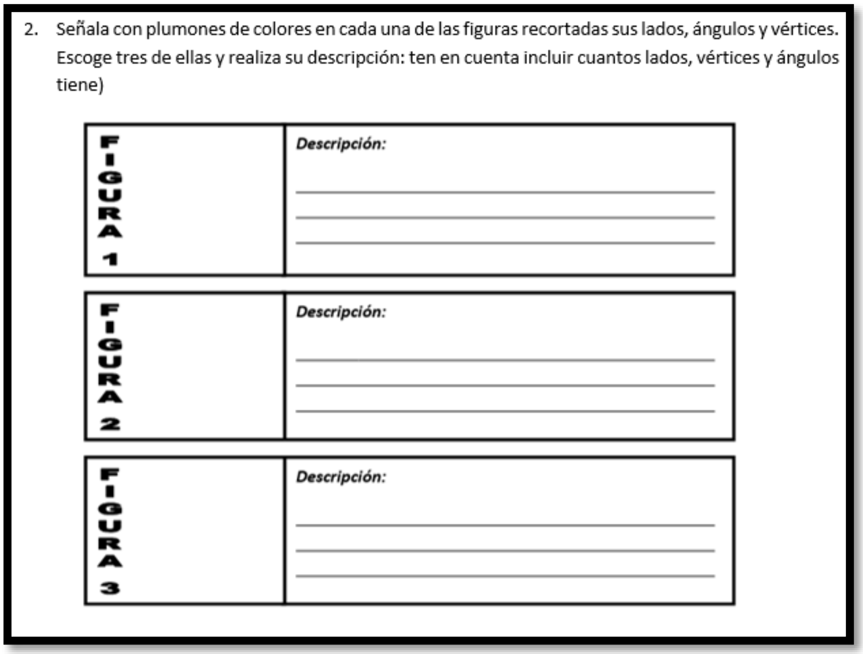


Figura 37. Actividad 1 - Diagnóstico parte 2

Para analizar los hallazgos, se hace una descripción de lo realizado por 38 de los estudiantes y se organizan las unidades de análisis teniendo en cuenta sus respuestas (ver anexo 10). En el proceso de clasificación de los polígonos se tiene que: 10 estudiantes utilizaron el criterio *tamaño*, organizando 2 o 3 grupos a los que nombraron figuras grandes, figuras medianas y figuras pequeñas. 18 estudiantes usaron el criterio *número de lados*, organizando los polígonos en 3 grupos, polígonos de 3 lados (triángulos), polígonos de cuatro lados (cuadriláteros) y polígonos de más de 4 lados (hexágono). 5 estudiantes clasificaron los polígonos de acuerdo a la *forma* organizando 6 subconjuntos: trapecios, rectángulos, triángulos, cuadrados, hexágono, rombos – romboide. 2 estudiantes utilizaron un criterio que denominaron *igualdad o similitud* para referirse a dos grupos de figuras, parejas de congruentes y las que no tenían parejas. 1 estudiante propuso el criterio *apariencia*, para referirse a 3 grupos de figuras, triángulos y un rombo, cuadrados – trapecios – romboide y un rombo, rectángulos. 1 estudiante no utilizó ningún criterio para la clasificación sino que coloreo un grupo de polígonos de verde y el restante de violeta, denominando a su criterio *color.* Finalmente, 1 estudiante no define el criterio de clasificación utilizado, pero crea tres grupos que nombra e integra de la siguiente manera: cuadrados (cuadrados, trapecios, romboide), puntiagudos (triángulos, rombos) y rectángulos.

Actividad 2. Esta actividad estaba compuesta de dos ejercicios: inicialmente en los polígonos de la actividad 1, los estudiantes debían señalar con colores diferentes los elementos básicos (lados, vértices y ángulos). Posteriormente escogieron tres de estos polígonos para realizar una descripción detallada de los mismos.



2. Señala con plumones de colores en cada una de las figuras recortadas sus lados, ángulos y vértices. Escoge tres de ellas y realiza su descripción: ten en cuenta incluir cuantos lados, vértices y ángulos tiene)

FIGURA 1	*Descripción:*
FIGURA 2	*Descripción:*
FIGURA 3	*Descripción:*

Figura 38. Actividad 2 - Diagnóstico parte 2

De acuerdo al primer ejercicio, se consideran dos aspectos reflejados en la figura 39: los estudiantes que identificaron los elementos solicitados de forma correcta y los que no los identificaron.

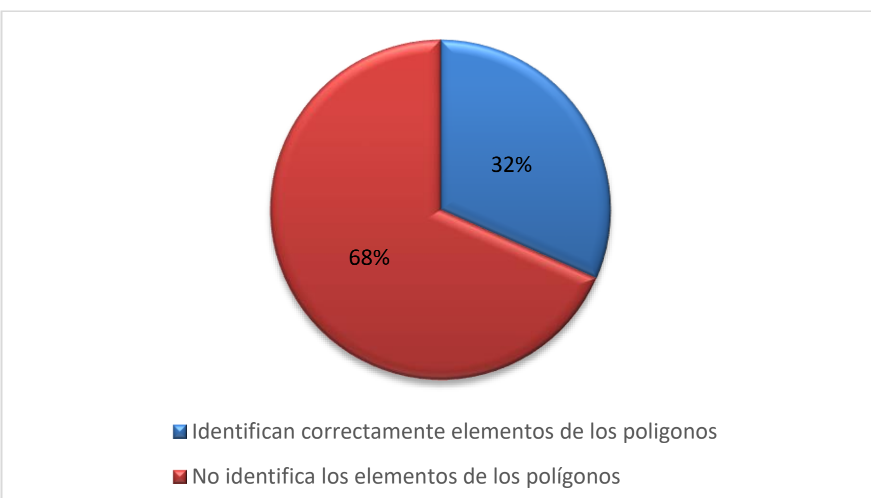


Figura 39. Respuestas primer ejercicio - actividad 2, Actividad de diagnóstico, parte 2

Fuente. Elaboración propia

En la segunda parte de la actividad los estudiantes debían escoger tres polígonos del punto uno, reproducir la imagen y describirlos. Los polígonos seleccionados fueron: cuadrado, hexágono irregular cóncavo, rectángulo, rombo, trapecio isósceles, triángulo equilátero, triangulo acutángulo isósceles, triangulo rectángulo escaleno y triangulo obtusángulo escaleno. Se aclara que los estudiantes no escribieron los nombres de los polígonos, pero se especifican para mayor claridad de los hallazgos.

Las unidades de análisis se agruparon de acuerdo a las proposiciones que representaron respuestas con contenido similar, (ver anexo 11) de las cuales se puede extraer la siguiente información:

Cuadrado. 20 estudiantes seleccionaron este polígono. 4 estudiantes lo describen como un polígono que tiene 4 lados. 4 estudiantes distinguen que tiene 4 lados y que dichos lados son de la misma medida. 8 estudiantes dicen que tiene 4 lados y 4 vértices. 2 estudiantes especifican que el cuadrado tiene 4 lados y 4 ángulos de igual medida, uno de ellos aclara que los ángulos miden 90°. 2 estudiantes identifican que tiene 4 ángulos, 4 vértices y 4 lados, los lados son de la misma medida.

*Hexágono – Irregular – Cóncavo***.** Se encuentran 15 registros de este polígono. 3 estudiantes dicen que es una figura de 6 lados. 3 estudiantes lo describen como una figura diferente, de varios lados. 2 estudiantes especifican que tiene 6 lados de diferente medida. 2 estudiantes identifican 6 lados y 3 vértices. 2 estudiantes identifican 6 lados y 6 vértices. 2 estudiantes identifican 6 lados, 6 vértices y 6 ángulos y 1 estudiante lo describe como un polígono de 6 lados de diferente medida.

Rectángulo. Se encuentra que 21 estudiantes escogieron este polígono para describir, de lo que se tiene: 5 estudiantes dicen solo que es una figura de 4 lados. 8 estudiantes notan que tiene 4 lados y 4 vértices. 5 estudiantes señalan que tiene 4 lados, especificando que los lados que están frente a frente son de igual medida. 2 estudiantes identifican en el rectángulo 4 lados, 4 vértices y 4 ángulos y 1 estudiante no hace la descripción de la figura.

Rombo. 12 estudiantes describen la figura, 4 solo nombran que tiene 4 lados. 3 estudiantes además de identificar los 4 lados, especifican que estos tienen igual medida. 2 estudiantes lo describen como una figura de 4 lados y 4 vértices. 1 estudiante dice que el rombo es un polígono de 4 lados de diferente medida y 2 estudiantes aunque lo escogen, no realizan su descripción.

Trapecio – Isósceles. 12 estudiantes seleccionaron este polígono. 2 estudiantes lo describen como una figura de 4 lados. 4 estudiantes dicen que tienen 4 lados, 2 de ellos de la misma medida y los otros dos de diferente medida, el lado de arriba más corto y el de abajo más largo. 6 estudiantes dicen que es una figura que tiene 4 lados y 4 vértices.

Triángulo equilátero. 11 estudiantes realizan las siguientes descripciones del polígono: 2 estudiantes reconocen que tiene 3 lados. 3 estudiantes dicen que tiene 3 lados de igual medida. 4 estudiantes identifican que es una figura con 3 vértices y 3 lados. 2 estudiantes dicen que el polígono está compuesto por 3 ángulos, 3 vértices y 3 lados de igual medida.

Triángulo Acutángulo Isósceles. Se registran 14 estudiantes que seleccionan este polígono. 6 estudiantes lo describen como una figura de 3 lados. 4 estudiantes dicen que la figura tiene 3 lados, 2 iguales y uno diferente. 2 estudiantes dicen que tiene 3 lados iguales. 1 estudiantes dice que está formado por 3 lados y 3 vértices y 1 estudiante no hace la descripción.

Triángulo Rectángulo Escaleno. 6 estudiantes seleccionan la figura. Se reconocen diferentes descripciones para esta figura: 3 estudiantes dicen que tiene 3 lados y parece la mitad de un cuadrado. 1 estudiante dice que la figura tiene 3 lados iguales y 3 vértices. 1 estudiante lo describe como un triángulo torcido y otro estudiante dice que tiene 3 lados y por eso parece un triángulo, pero es diferente a los que había visto antes.

Triangulo Obtusángulo Escaleno. 3 estudiantes escogen este polígono, 2 de ellos lo describen como una figura que tiene 3 lados y el otro estudiante dice que es un triángulo alargado horizontalmente**.**

Actividad 3. Se presentaron dos parejas de polígonos (rectángulo – cuadrado y triángulo acutángulo isósceles – triángulo rectángulo isósceles), con los cuales los estudiantes realizarían la rutina de pensamiento compara y contrasta, en la que se deben identificar diferencias y semejanzas de los elementos propuestos.

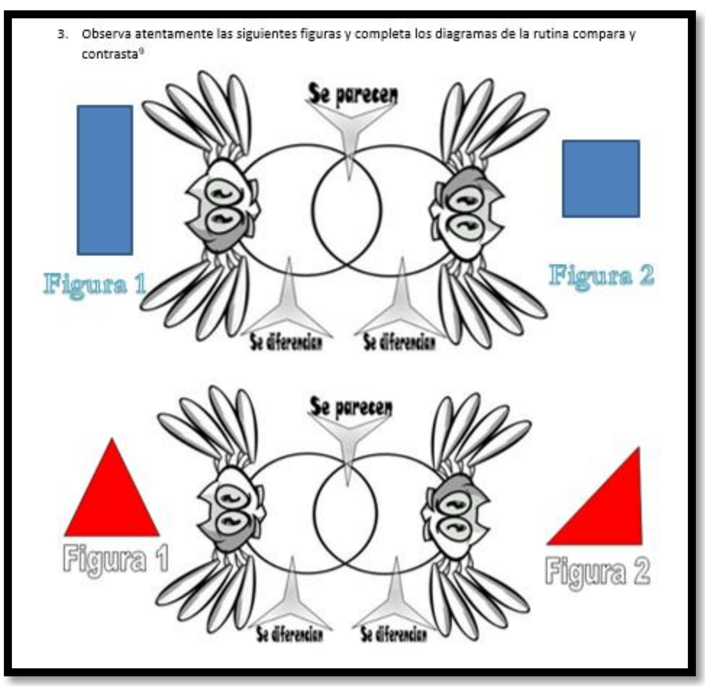


Figura 40. Actividad 4 - Diagnóstico parte 2

Con relación a las semejanzas entre la pareja rectángulo – cuadrado, la figura 41, muestra los porcentajes de estudiantes que identificaron los siguientes aspectos comunes: ambos tienen 4 lados, tienen 4 lados y 4 vértices, tienen 4 lados, 4 vértices y sus 4 ángulos miden 90°. Además se presentó el caso de estudiantes que no respondieron a la actividad.

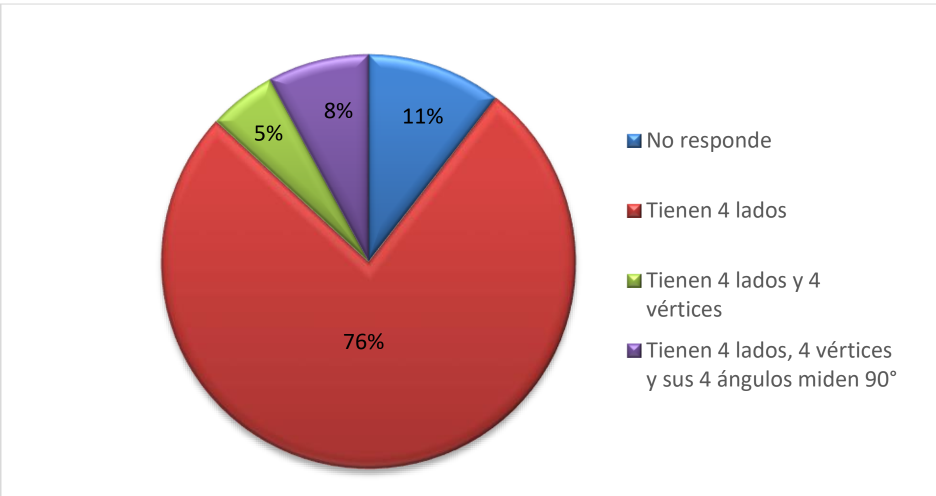


Figura 41. Semejanzas entre rectángulo y cuadrado - actividad 3 diagnóstico, parte 2

Fuente. Elaboración propia

En cuanto a las diferencias de la pareja rectángulo y cuadrado, 17 de los estudiantes establecen que el rectángulo es más largo y el cuadrado es más corto. 6 estudiantes dicen que el rectángulo es más delgado y el cuadrado más ancho. 3 estudiantes refieren que la diferencia está en el tamaño, ya que el rectángulo es más grande y el cuadrado más pequeño. 8 estudiantes dicen que los lados del rectángulo son de diferente medida y los del cuadrado de igual medida y 4 estudiantes no establecen diferencias entre los polígonos (ver anexo 12).

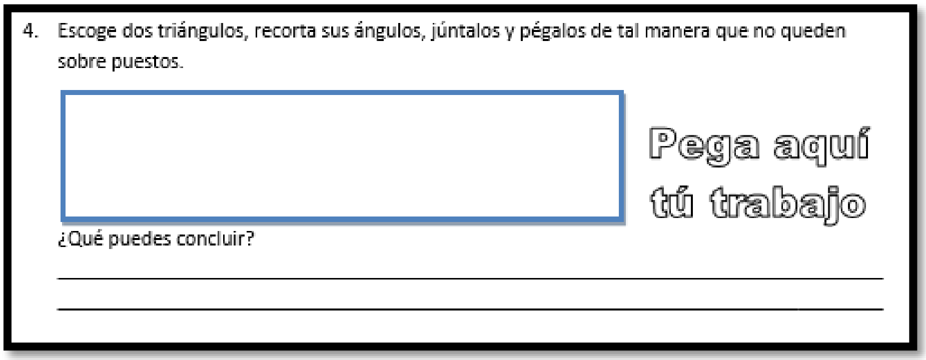
Para la pareja triángulo acutángulo isósceles y triángulo rectángulo isósceles, la figura 42, se muestran los criterios de semejanza identificados por los estudiantes. Se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes solo se refiere a que ambas figuras tiene 3 lados y el segundo mayor porcentaje corresponde a los estudiantes que no solucionó la actividad.

Figura 42. Semejanzas entre triángulo isósceles acutángulo y triángulo isósceles rectángulo- actividad 3 diagnóstico, parte 2

Fuente. Elaboración propia.

Con relación a las diferencias, los estudiantes las describen en las siguientes proposiciones (ver anexo 13): El Triángulo Isósceles Acutángulo es completo o normal y el triángulo Isósceles Rectángulo parece triángulo porque tiene tres lados pero es una figura diferente, 11 estudiantes. El Triángulo Isósceles Acutángulo tiene dos lados largos y uno corto y el triángulo Isósceles Rectángulo dos lados cortos y uno largo, 8 estudiantes. El Triángulo Isósceles Acutángulo es más alto y largo y el triángulo Isósceles Rectángulo más corto y está de lado, 5 estudiantes. Se encuentra que 14 estudiantes no responden.

Actividad 4. Los estudiantes debían escoger dos triángulos del primer conjunto de polígonos, marcar sus ángulos, recortarlos y pegarlos de tal manera que no quedaran sobrepuestos. Posteriormente escribieron la conclusión de lo que podían observar de la experiencia.



4. Escoge dos triángulos, recorta sus ángulos, júntalos y pégalos de tal manera que no queden sobre puestos.

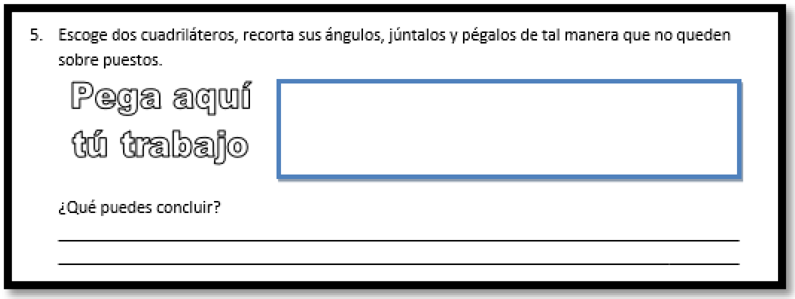
Pega aquí tú trabajo

¿Qué puedes concluir?

Figura 43. Actividad 4 - Diagnóstico parte 2

A partir de las conclusiones construidas por los estudiantes, se agrupan las unidades de análisis de las cuales se pueden extraer los siguientes hallazgos: 20 estudiantes no realizaron la actividad y no escribieron conclusiones, 3 estudiantes concluyeron que al recortar los ángulos y juntarlos se formaba medio óvalo, 2 estudiantes dicen que al juntar los ángulos de los triángulos se forma una figura parecida a una montaña, 10 estudiantes describen en su conclusión que observan que se forma un semicírculo (algunos de ellos lo llaman medio círculo) y 3 estudiantes concluyen que al cortar los ángulos y juntarlos lo que se forma tiene parecido con media circunferencia (ver anexo 14).

Actividad 5. Del grupo de recortables de la actividad 1 los estudiantes escogieron dos figuras de cuatro lados, señalaron sus ángulos, los recortaron, los juntaron y los pegaron de forma tal que no quedaran sobrepuestos.



5. Escoge dos cuadriláteros, recorta sus ángulos, júntalos y pégalos de tal manera que no queden sobre puestos.

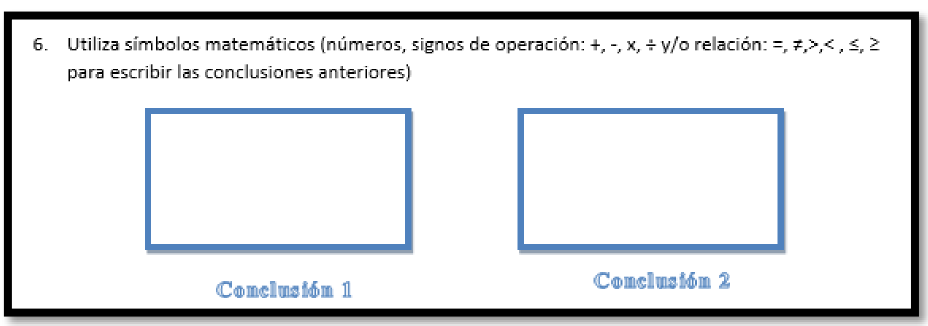
Pega aquí tú trabajo

¿Qué puedes concluir?

Figura 44. Actividad 5 - Diagnóstico parte 2

Luego escribieron las siguientes conclusiones (ver anexo 15): 9 estudiantes dijeron que observaron que al juntar los ángulos se formaba un círculo, 5 estudiantes afirmaron que lo que se formaba era parecido a una circunferencia y 4 estudiantes señalaron que lo que se formaba era un óvalo. 20 estudiantes no realizaron la actividad por lo tanto no escribieron ninguna conclusión.

Actividad 6. Los estudiantes debían escribir las conclusiones de las actividades 4 y 5 usando símbolos matemáticos como números, signos de operación, relación, etc., de acuerdo a lo que consideraran necesario.



6. Utiliza símbolos matemáticos (números, signos de operación: +, -, x, ÷ y/o relación: =, ≠,>,< , ≤, ≥ para escribir las conclusiones anteriores)

Conclusión 1

Conclusión 2

Figura 45. Actividad 6 - Diagnóstico parte 2

En las figuras 46 y 47 se ilustran las respuestas de los estudiantes (téngase en cuenta que la conclusión 1 corresponde a la suma de ángulos internos de un triángulo y la conclusión 2 a la suma de ángulos internos de los cuadriláteros).

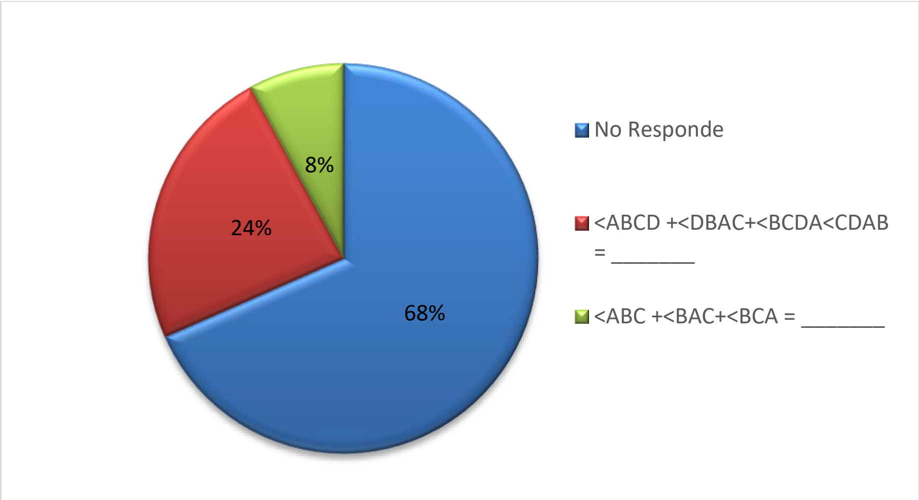


Figura 46. Conclusión 1 - actividad 6, Diagnóstico, parte 2

Fuente. Elaboración propia.

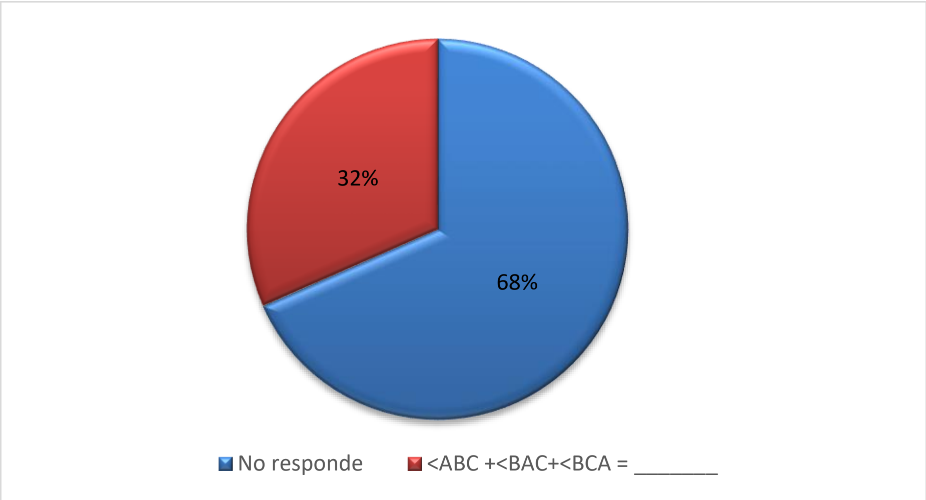


Figura 47. Conclusión 2 - actividad 6, Diagnóstico, parte 2

Fuente. Elaboración propia.

En la figura 46 se puede observar que la mayoría de los estudiantes (en total 26) no escribió la conclusión 1 (suma de ángulos internos de triángulos) y el 32% utilizó correctamente la nomenclatura para ángulos, sin embargo para completar la igualdad emplearon términos como semicírculo, media circunferencia, medio óvalo, montaña, refiriéndose a lo que visualmente les resulto al juntar los ángulos de los triángulos.

Con relación a la conclusión 2 (figura 47 - suma de ángulos internos de cuadriláteros) se puede observar que aunque el 32% de los estudiantes intentaron escribir con lenguaje algebraico lo observado en la actividad 5, solo el 8% nombraron correctamente los ángulos. Se evidencia que el restante 24% utiliza cuatro letras mayúsculas para referirse a un ángulo de los cuadriláteros, lo que es incorrecto.

Actividad 7. A partir de características dadas, los estudiantes debían reproducir cuatro polígonos, usando instrumentos como regla, transportador u otra herramienta considerada necesaria para este proceso.

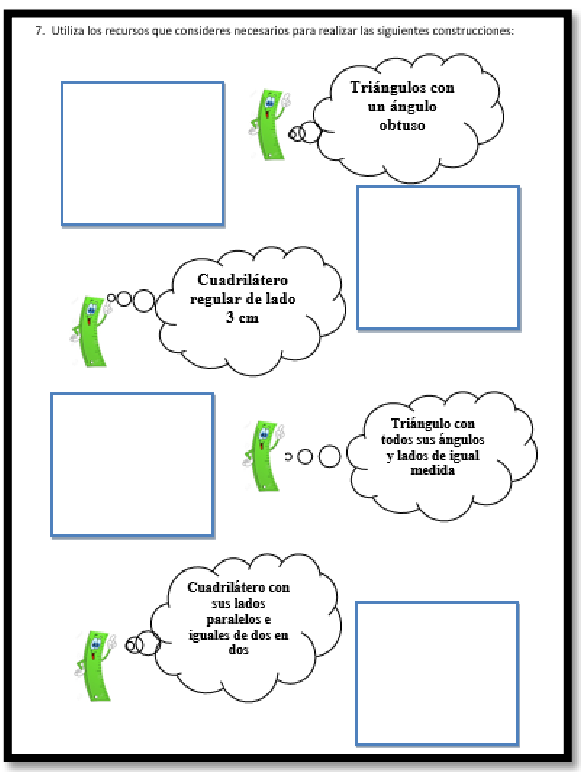


Figura 48. Actividad 7 - Diagnóstico parte 2

Las respuestas guiaron la agrupación de las unidades de análisis (ver anexo 16) de donde se concluye que:

Polígono 1 (triángulo con un ángulo obtuso). 19 estudiantes no realizan la representación. 10 estudiantes dibujan un triángulo obtusángulo, 5 de ellos señalan correctamente en el triángulo el ángulo obtuso. 8 estudiantes realizan un triángulo isósceles acutángulo, 5 de ellos señalan como medida de uno de sus lados un valor mayor que 90° y menor que 180°. 1 estudiante dibuja un triángulo rectángulo isósceles, señala en su representación el ángulo de 90°.

Polígono 2 (Cuadrilátero regular de lado 3 cm). 16 estudiantes reproducen un cuadrado de lado 3 cm, 2 de ellos señalan vértices, ángulos y diagonales. 2 estudiantes representan un cuadrilátero irregular convexo y escriben en uno de sus lados la medida de 3 cm. 7 estudiantes realizan un romboide y en uno de sus lados la medida de 3 cm. 1 estudiante dibuja un rectángulo y en los lados más largos escribe la medida de 3 cm. 1 estudiante realiza un trapecio isósceles y en la base menor coloca la medida 3 cm. Finalmente se tiene que 11 estudiantes no hacen la representación.

Polígono 3 (Triángulo con todos sus ángulos y lados de igual medida). 9 estudiantes realizan un registro que corresponde a un triángulo equilátero cuyos lados miden 2, 3 o 4 cm, ninguno de los estudiantes realiza la medición de los ángulos. 12 estudiantes dibujan un triángulo isósceles acutángulo, los lados iguales miden 2, 3 o 4 cm. 17 estudiantes no realizan ninguna representación.

Polígono 4 (Cuadrilátero con sus lados paralelos e iguales de dos en dos). 7 de los estudiantes dibujan un rectángulo. 14 estudiantes realizan un cuadrado y los restantes 17 no hacen la representación.

Se nota que 10 de los estudiantes que no realizan la actividad aclaran que desconocen el significado de *lados paralelos, cuadrilátero regular y ángulo obtuso* y tal como se acordó, los resaltan en la guía de trabajo.

5.1.3 La prueba de diagnóstico y las categorías de análisis.

Para iniciar este ciclo de Análisis Didáctico se parte del hecho que los estudiantes en grado sexto trabajaron los elementos básicos de la geometría y la conceptualización y clasificación de los polígonos usando criterios como el número de lados, medida de los lados y de los ángulos (ver pág. 70). Este trabajo se realizó con la docente investigadora usando una enseñanza tradicional, donde predominó el interés porque los estudiantes aprendieran las definiciones a partir de objetos estáticos construidos con lápiz y papel.

Análisis de contenido: El objetivo de aprendizaje propuesto en este caso se enfocó en detectar las manifestaciones de los estudiantes con relación al desarrollo de pensamiento, para establecer el nivel de Van Hiele en el que se pueden ubicar.

En la primera parte del diagnóstico se utiliza un test que indagó sobre conceptos básicos de la geometría Euclidiana como las relaciones entre rectas, el concepto de polígono, el concepto de cometa y algunas características de los triángulos y cuadriláteros que involucran el dominio de otros elementos (bisectriz y diagonal).

Se desarrolló una segunda actividad en la que se seleccionó como contenido de trabajo los polígonos, especialmente los triángulos y cuadriláteros; se exploró e indagó sobre sus elementos y características. Para la ejecución de parte de esta actividad fue necesario que los estudiantes manipularan instrumentos como la regla y el compás para realizar construcciones y/o validar sus inferencias.

Análisis cognitivo. De acuerdo a los hallazgos presentados anteriormente para cada prueba, se puede notar que la falta de destreza en la utilización de instrumentos como el compás, la escuadra y el transportador y el deficiente proceso argumentativo evidenciado en la falta de razonamientos utilizados para justificar o explicar los resultados de las actividades desarrolladas o de la selección de sus respuestas (ver figuras 39, 41, 42, 46 y 47), son algunos de los obstáculos de aprendizaje más evidentes en los estudiantes del curso 703.

El hecho de no restringir esta actividad al estudio de un solo objeto, permitió poner en evidencia que los estudiantes también presentan dificultades en cuanto al manejo del lenguaje geométrico básico, según los contenidos establecidos en los estándares curriculares hasta este grado.

En consecuencia, las acciones realizadas por la mayoría de los estudiantes los ubican en el Nivel de Reconocimiento o Nivel 1 de la Teoría de Van Hiele (1986). Lo anterior se puede afirmar al comparar sus respuestas con las características propias de este nivel de acuerdo con Gutiérrez y Jaime (1990; 1998), Jaime (1998) y M. Crowley (1987, citado en Fouz, 2005).

Dentro de estas características se pueden destacar:

- ✓ Algunos estudiantes son capaces de identificar triángulos, rectángulos, cuadrados y otras figuras en un conjunto de polígonos.
- ✓ La mayoría de los estudiantes concibe los polígonos como un todo y no pueden diferenciar los elementos que los conforman.
- ✓ La mayoría de los estudiantes no reconocen relaciones como perpendicularidad.

- ✓ Para describir objetos geométricos, algunos estudiantes utilizan atributos irrelevantes o relaciones con objetos del entorno.
- ✓ Pocos estudiantes señalan los ángulos como esquinas o puntas o los marcan en los polígonos.
- ✓ Si un triángulo varía en su posición algunos estudiantes afirman que no es triángulo.
- ✓ La mayoría de los estudiantes no identifican propiedades de ciertos polígonos y mucho menos las generalizan.
- ✓ Aunque algunos estudiantes diferencian atributos como que los cuadrados tienen lados de igual medida o que sus ángulos miden 90°, se toman como habilidades implícitas del nivel 1 ya que no pueden entender o explicar otras característica o propiedades que se pueden desprender de dichos argumentos**.**

En cuanto al proceso de visualización, se puede decir que la mayoría de los estudiantes alcanza el primer nivel de esta habilidad (percepción global), ya que describen los objetos geométricos por asociación y atributos como el tamaño, el color, la orientación de las figuras son importante para sus descripciones (Acosta , Camargo, Urquina y Castiblanco, 2004).

Finalmente se observa que por la falta de destrezas para manipular elementos utilizados normalmente para la contrucción de objetos geometricos como el compás y el transportador, la mayoría de los estudiantes dificilmente pueden validar que sus construcciones han sido realizada correctamente.

Análisis de instrucción. Para el desarrollo de las actividades de diagnóstico se sugiere a los estudiantes responder de forma individual basados en lo que conocían y podían hacer. Esta decisión inicialmente se piensa con el fin de obtener unos resultados reales y confiables de los conceptos o nociones que cada estudiante tuviera sobre los objetos de estudio. Sin embargo, al encontrar el obstáculo que la mayoría de los estudiantes desconocía términos del lenguaje geométrico, se piensa en que mediante la socialización de ideas entre pares pudieran aclarar algunas dudas, para de esta manera realizar completamente la prueba.

Es importante resaltar que algunos estudiantes optaron por trabajar de forma individual las dos actividades y por no realizar ningún tipo de pregunta, por tanto no respondieron la totalidad de las pruebas. En estos casos, se asume el desconocimiento del objeto geométrico por el cual se indaga como parte de los hallazgos.

El incluir preguntas cerradas y construcción de definiciones en la primera actividad, restringe a los estudiantes quienes manifestaron la dificultad para hacer registros mentales del objeto geométrico requerido. En muchos casos realizaron dibujos de las situaciones planteadas en los interrogantes que es su mayoría fueron equivocados.

En la segunda actividad el material de manipulación da la oportunidad de establecer y verificar conjeturas, sin embargo como se ha anotado anteriormente, la dificultad en el manejo de los instrumentos para realizar construcciones geométricas con lápiz y papel limita el desarrollo de la prueba.

A diferencia de la primera parte del diagnóstico, esta segunda actividad incluye interrogantes que les exigen a los estudiantes justificar sus respuestas y/o los procedimientos realizados con argumentos conceptuales.

Análisis de actuación. Se reconoce que la práctica tradicional desarrollada hasta el momento se ha basado en el estudio memorístico de definiciones geométricas, lo que se puede notar en las respuestas poco acertadas de los estudiantes y/o en el desconocimiento de algunos conceptos, aunque han sido trabajados en años anteriores.

En consecuencia, es importante que dentro de la clase desarrollada se propongan situaciones donde se propicien actividades como la exploración, descripción y construcción de los objetos geométricos, mediante el uso de recursos que ayuden a fortalecer procesos como la comprensión, el análisis, la visualización, la argumentación, entre otros, y que dejen en un segundo plano el uso de un algoritmo y las construcciones rígidas de las figuras (Gamboa & Ballestero, 2009).

5.1.4 Explorando el mundo Cabri y las categorías de análisis.

Análisis de contenido. Los estudiantes a través de la exploración de los menús construyen e intentan definir conceptos como recta, semirrecta, segmento, arco, polígono, polígono regular, circunferencia, rectas paralelas y rectas perpendiculares.

La selección del contenido y la actividad tienen en cuenta los hallazgos del diagnóstico, por lo que se considera importante hacer un reconocimiento de los elementos básicos de la geometría euclidiana y sus representaciones.

Además se considera necesario incluir un recurso que permitiera dinamizar y dibujar facilmente el objeto gemetrico requerido y que a la vez le posiblitara al estudiante el desarrollo de habilidades como la visualización y la argumentación (Cuéllar, 2003), beneficios que según Acosta (2010) son ofrecidos por el software Cabri mediante los procesos de construcción y arrastre.

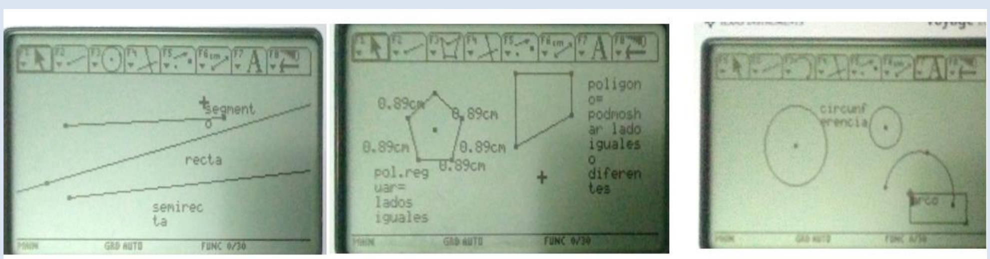
También se piensa en que a través de la creación de la composición geométrica, el estudiante sea capaz de identificar en su entorno objetos que pueda relacionar correctamente con los elementos geométricos explorados previamente a través de la calculadora.

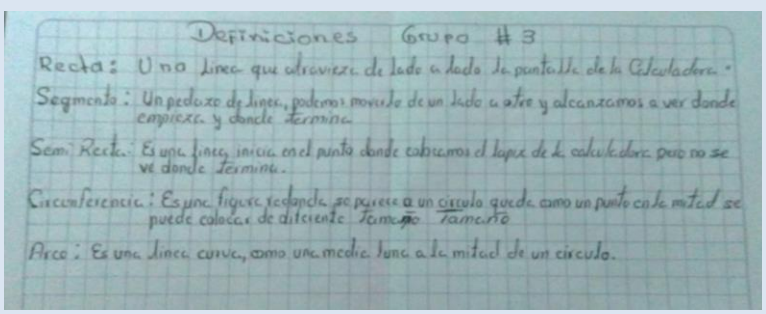
Análisis cognitivo. En la siguiente tabla se muestran los descriptores principales que dan cuenta de lo que los estudiantes son capaces de realizar en esta parte de la intervención, de acuerdo a los niveles de desarrollo de pensamiento geométrico de Van Hiele:

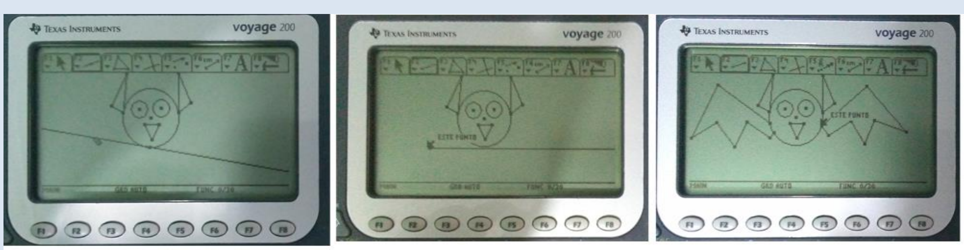
Tabla 7. Descriptores para la Actividad Explorando el mundo Cabri

Descriptores
✓ Realiza construcciones usando las herramientas del Cabri.
✓ Usa el método ensayo y error para realizar una composición geométrica
✓ Describe el aspecto físico de los registros realizados en la calculadora, refiriéndose a características globales.
✓ Utiliza frases como se parece a…, tiene la forma de…, entre otras, para describir los registros realizado de los objetos que encuentra en los menús del Cabri.
✓ Utiliza la medición de longitudes como herramienta experimental que le permite determinar atributos para construir argumentos

Evidencias







Fuente. Elaboración propia.

Se puede evidenciar que los estudiantes van adquiriendo destrezas en el uso de la herramienta, lo que les permite realizar registros y por ensayo y error validar las apreciaciones de lo observado. Por ejemplo, al realizar un polígono regular los estudiantes del grupo 4 lo definen como "una figura que tiene todos sus lados iguales", posteriormente, bajo las preguntas orientadoras se les solicita que den argumentos para explicar la afirmación realizada en la definición de polígono regular, a lo que responden "es evidente porque se nota a simple vista", por su parte el grupo 1, da como argumento que "en el menú f6 hay una opción que permite medir los lados, realizamos la medición y nos dio igual, también vimos que si tratamos de agrandar la figura los lados cambian pero siguen de igual medida" (Ver evidencias tabla 7).

Es así como los recursos de medición que ofrece el Cabri se convierten desde este momento en una herramienta que les permite validar su observación e iniciar el proceso de construcción de argumentos basados en la exploración y la experimentación. Este descriptor apunta a manifestaciones del nivel 2 de Van Hiele, de acuerdo a Aravena, Gutiérrez y Jaime, (2016).

Análisis de Instrucción. Se solicita a los estudiantes realizar la exploración del ambiente del Cabri Geometre mediante la construcción de los objetos de cada uno de los menús. Bajo las preguntas orientadoras ¿Qué ves? ¿Qué te hace pensar eso? Construir un registro escrito como aproximación al concepto de cada objeto construido. Posteriormente realizar una composición geométrica usando diferentes objetos geométricos.

Es pertinente que aunque los grupos de trabajo logran hacer un acercamiento hacia las definiciones de los objetos geométricos requeridos, la docente institucionalice el conocimiento.

Es decir, se haga un consenso y construcción de una definición basado en la lluvia de ideas de los grupos y las aclaraciones de la maestra que actúa como guía del proceso.

En cuanto a los materiales y recursos utilizados, se ponen en manifiesto los beneficios por los cuales fue seleccionados, que no se centran en el simple uso de la tecnología sino en los habilidades básicas (visuales, de dibujo, de razonamiento, de aplicación y de argumentación) que se pueden desarrollar en clase (ver descriptores tabla 7), mediante las tareas de construcción y conceptualización que se han propuesto (García y López, 2008).

Analisis de actuación. Para el desarrollo de la activida no se dio ninguna indicación con relación a la organización de los grupos, lo que facilitó el trabajo de algunos y dificultó notablemente el de otros. Por este motivo la integración intencionada de los estudiantes se convierte en un factor que podría influir en la consecución de los objetivos propuestos y requiere de la atención de la docente en las sesiones posteriores.

Otro elemento de importancia en el trabajo propuesto es el uso de las preguntas orientadoras, ya que le exigen a los estudiantes la necesidad de pensar, explorar y validar estrategias que les permitan conseguir argumentos para enriquecer sus respuestas.

Así también, la utilización de la geometría dinámica va mostrando su pertienencia, toda vez que desde su inclusión en el aula, se evidencia en la mayoría de estudiantes mejor disposición para el desarrollo del trabajo propuesto, apropiación de su proceso de aprendizaje y avances en algunos de los procesos propios de la actividad matemática.

5.1.5 Triángulos en la calculadora… conceptos en mi mente y las categorías de análisis.

Análisis de contenido. Dentro de los contenidos explorados previamente se selecciona el objeto geométrico triángulo para hacer la exploración y desarrollar el resto de la intervención.

Además de ser un tópico que hace parte del plan de estudio de este grado, de acuerdo a los estándares curriculares, da la posibilidad de continuar abordando y reforzando otros elementos de la geometría euclidiana.

El objetivo de aprendizaje de esta actividad tiene que ver con la construccion de la definición de triángulo, reconocimiento de sus elementos e identificación de algunas de sus características.

Los estudiantes exploran y explican mediante las acciones que pueden realizar con la calculadora la noción de concavidad y utilizan contraejemplos usando otros polígonos como cuadriláteros y pentágonos.

Análisis cognitivo. En esta etapa de la intervención se evidencia un mejor manejo de la herramienta por parte de los estudiantes, lo que les permite hacer uso adecuado del recurso y facilita el objetivo de aprendizaje establecido.

Con relación a la teoría de Van Hiele (Fouz y De Donosti, 2005), nuevamente aparecen características propias del Nivel 2, que se pueden observar en las evidencias del trabajo que aparecen en la tabla 8, donde se puede notar que los estudiantes reconocen y señalan los elementos que constituyen el polígono. Además concluyen que al intentar trazar una diagonal en el triángulo no es posible, porque representa un lado por lo tanto se atreven a afirmar que en ningún triangulo es posible trazar diagonales.

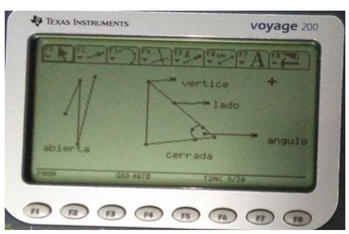
También se determina que los triángulos son polígonos convexos y utilizando el arrastre se valida la posibilidad de que no existen triángulos cóncavos, aunque la definición de concavidad, aparece de forma implícita, ya que se comprende pero bajo la ejemplificación por asociación de este concepto con otras situaciones. Sin embargo no se comprenden otras propiedades derivadas del concepto de concavidad, como el hecho de que uno de los ángulos del polígono mida más de 180° o que al menos una de las diagonales quede por fuera del polígono.

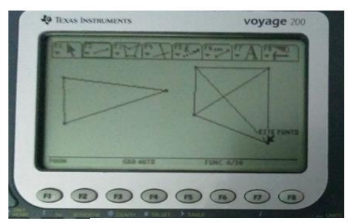
Como complemento de lo anterior, en la tabla 8 se mencionan otros descriptores relacionados con manifestaciones del nivel de Análisis, con relación a lo que los estudiantes pueden hacer, apoyados en la facilidad de manipular las construcciones que ahora tienen mediante el Cabri.

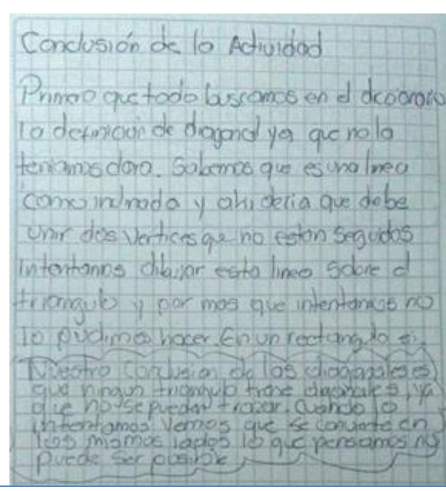
Tabla 8. Descriptores para la Actividad Triángulos en la calculadora… conceptos en mi mente

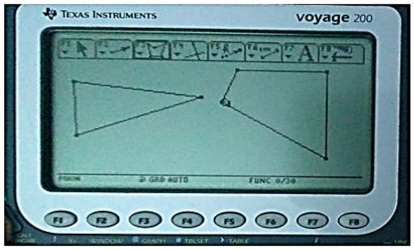
	Descriptores
✓	Realiza construcciones usando las herramientas del Cabri.
✓	Construye el concepto de triángulo y reconoce elementos constitutivos del polígono.
✓	Usa el método ensayo y error determinar el número de diagonales de un triángulo.
✓	Usa el método de ensayo y error para determinar si un triángulo es cóncavo o convexo.
✓	Utiliza con sentido los cuantificadores todos o ningunos, para referirse a la cantidad de diagonales de los triángulos.
✓	Utiliza con sentido los cuantificadores todos o ningunos, para referirse a la posibilidad de que triángulo sea un polígono cóncavo o convexo.

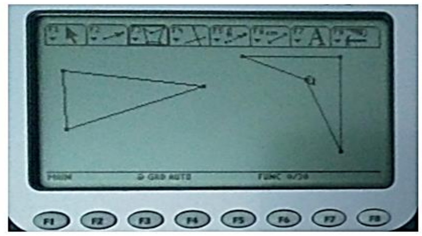
Evidencias

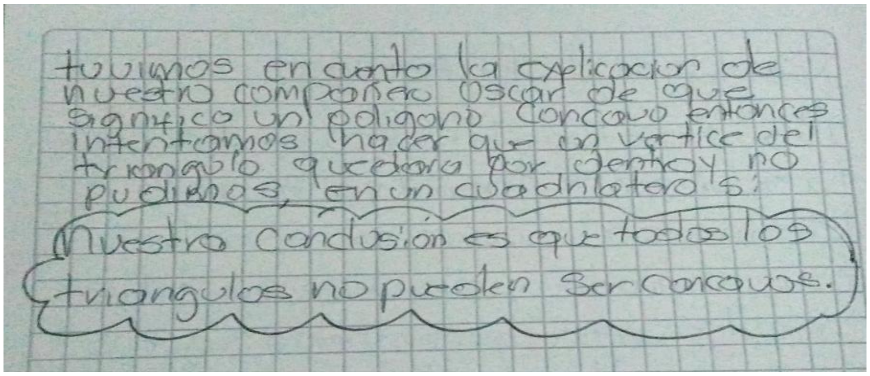





Conclusión de la Actividad
Primero que todo buscamos en el diccionario
la definición de diagonal ya que no la
teníamos claro. Sabemos que es una linea
como inclinada y ahí decía que debe
unir dos vertices que no estan seguidos
intentamos dibujar esta linea sobre el
triangulo y por mas que intentamos no
lo pudimos hacer. En un rectangulo si.
Nuestra conclusión de las diagonales es
que ningun triangulo tiene diagonales, ya
que no se pueden trazar. Cuando lo
intentamos vemos que se convierte en
los mismos lados lo que pensamos no
puede ser posible







Fuente. Elaboración propia

Análisis de instrucción. De acuerdo a la actividad propuesta se da la posibilidad a los estudiantes de que en equipo exploren las herramientas de la calculadora y decidan cuál o cuáles utilizar para la construcción de las poligonales abiertas y cerradas (ver figura 16).

Nuevamente las preguntas orientadoras sirven como direccionamiento en el acercamiento a la construcción del concepto de triángulo, la identificación de sus elementos y el reconocimiento de características propias de este polígono (ver figura 17 y evidencias de la tabla 8).

Se permite que los estudiantes utilicen el diccionario para consultar términos desconocidos y/o los discutan entre los grupos con el fin de que luego exploren la forma de representarlos usando el Cabri. Esto da la posibilidad de que la actividad se enfoque más a construcción y la descripción del dicho proceso más que a la instrucción o a la enseñanza del concepto.

Análisis de actuación. La figura de la docente no puede perder la importancia en el proceso desarrollado, es indispensable que constantemente se supervise el trabajo realizado al interior de los grupos. Ya que si bien en la mayoría de los estudiantes se evidencia compromiso y atracción hacia las actividades propuestas, con la utilización del software se corre el riesgo de que los estudiantes se dispersen y enfoquen su atención en otras acciones, o que algunos de los integrantes de los grupos trabajen y otros no. Lo anterior se debe a la posibilidad que cada grupo tiene para trabajar a su propio ritmo y explorar libremente la herramienta.

Como consecuencia de las situaciones anteriormente descritas, se hace necesaria la delimitación de los tiempos para la ejecución de cada tarea, teniendo en cuenta las destrezas de los grupos.

Esto también de da lugar a las socializaciones parciales y oportunas de los resultados producidos por los grupos y a la unificación conceptual con las aclaraciones que tuvieran lugar.

Particularmente fue necesario precisar en las definiciones de diagonal y concavidad, sin embargo se evidencio que la comprensión de este último se le dificulta a varios estudiantes, por lo que será necesario proponer nuevas tareas con las cuales se logre avanzar en el aprendizaje y significación de este término.

5.1.6 Una figura indeformable y las categorías de análisis.

Análisis de contenido. El propósito de la actividad es que los estudiantes, con la ayuda de la herramienta de arrastre del Cabri, redescubran por ellos mismos que los triángulos son polígonos que no se deforman cuando actúan sobre él fuerzas.

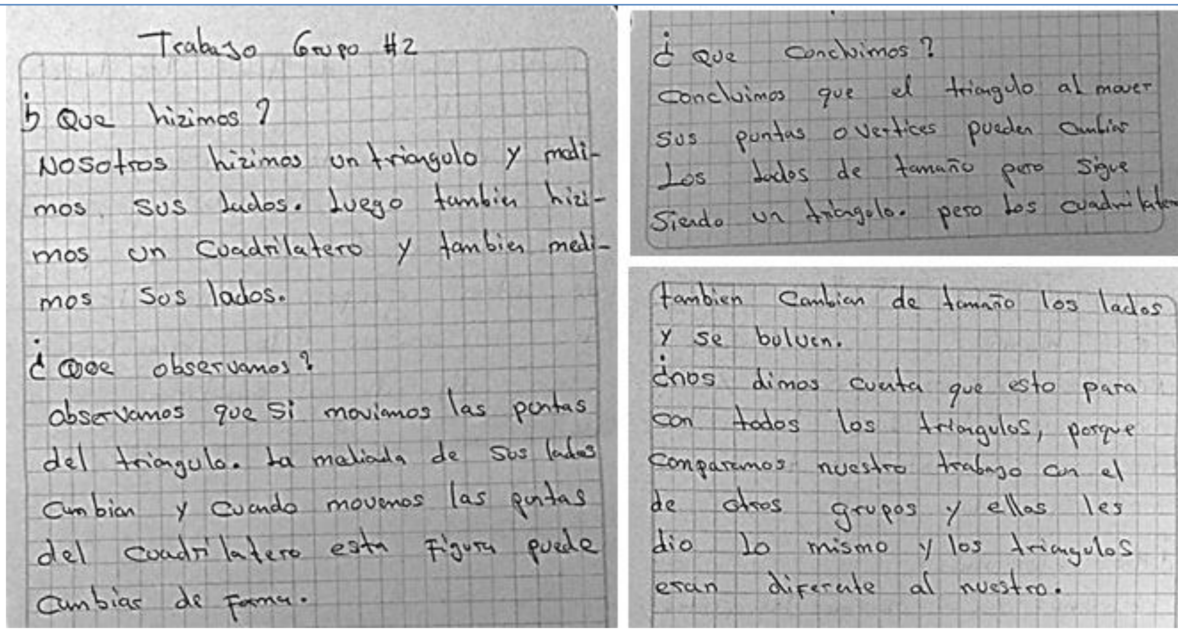
Para el cumplimiento de este objetivo se requiere que además de identificar los elementos de los polígonos, los estudiantes utilicen la herramienta del arrastre en su modalidad de búsqueda, que les permitirá examinar las construcciones realizadas y hacer inferencias sobre las propiedades invariantes de los objetos geométricos dibujados (Larios, 2006).

Análisis cognitivo. Los estudiantes ya son capaces de escoger las herramientas que ofrece el Cabri y que le permiten desarrollar de forma acertada la instrucción propuesta por el docente. Algunos de los grupos logran entender que los triángulos pueden cambiar de posición y tamaño al mover sus vértices mediante el arrastre, pero siguen siendo triángulos, lo que no pasa con otros polígonos que escogen para su experimentación como cuadriláteros o pentágonos.

También se observa cómo, de forma libre y espontánea, intercambian conjeturas, construcciones y metodologías utilizadas, entre grupos, antes de la socialización. Se pone en manifiesto como las habilidades de comunicación, construcción y visualización (Bressan, Reyna, y Zorzoli, 2003), avanzan en su proceso de fortalecimiento, lo que se evidencia en el trabajo realizado por algunos grupos y los descriptores que dan cuenta de los avances de los estudiantes con relación a la Teoría de Van Hiele (ver la tabla 9).

Tabla 9. Descriptores para la Actividad una figura indeformable

Descriptores
✓ Realiza construcciones usando las herramientas del Cabri.
✓ Usa el método de ensayo y error para verificar al mover los vértices de un triángulo este no se deforma.
✓ Utiliza con sentido los cuantificadores todos, algunos, para expresar conclusiones.
✓ Identifica la rigidez como una característica los triángulos.
Evidencia


Trabajo Grupo #2

¿Que hizimos?

Nosotros hizimos un triangulo y medimos sus lados. Luego tambien hizimos un Cuadrilatero y tambien medimos sus lados.

¿Que observamos?

observamos que si movimos las puntas del triangulo. La medida de sus lados cambian y cuando movemos las puntas del cuadrilatero esta figura puede cambiar de forma.

¿Que conclvimos?

Conclvimos que el triangulo al mover sus puntas o vertices pueden cambiar los lados de tamaño pero sigue siendo un triangulo. pero los cuadrilateros tambien cambian de tamaño los lados y se bulven.

¿nos dimos cuenta que esto para con todos los triangulos, porque comparamos nuestro trabajo con el de otros grupos y ellos les dio lo mismo y los triangulos eran diferente al nuestro.

Fuente. Elaboración propia

Análisis de instrucción. Se presenta un ambiente por las acciones y retroacciones propias del Cabri (Acosta, 2010), donde el docente no interviene para entregar directamente el conocimiento sino que le permite a los estudiantes construir su conocimiento mediante la exploración y la utilización del software como medio de validación.

La interacción entre el estudiante y el ambiente del Cabri se da mediante la intención planteada, que en este caso particular, es la construcción de un triángulo y otro polígono no triángulo.

Para lograrlo inicialmente se requiere que los estudiantes hagan unas representaciones mentales, que posteriormente traducirán en las construcciones con las herramientas del Cabri (retroacción estática) y que deberá interpretar y validar para saber si cumple con los requisitos conceptuales (características y propiedades de los objetos elementos construidos).

Seguido se da una retroacción dinámica, cuando mediante la función del arrastre se mueven los vértices de los polígonos. A partir de esta última actividad, los estudiantes deben validar o invalidar el hecho de que sus construcciones después de los movimientos realizados, conserven las características y propiedades que los hacen triángulo y el otro polígono escogido por el grupo (Ballesteros y Rojas, 2011).

Análisis de actuación. En el proceso descrito en el análisis de instrucción, no se requiere que el docente intervenga para entregar directamente el concepto. La importancia de la participación del docente radica en el acercamiento que hace a los estudiantes con concepto durante las preguntas orientadoras que se pensaron inicialmente o las que van surgiendo en el transcurso de la sesión.

En este sentido, se logra que los estudiantes relacionen los resultados obtenidos en esta actividad con situaciones trabajadas en otras asignaturas como tecnología, donde construyeron estructuras a base de triángulos que posteriormente utilizaron para soportar objetos pesados. Los estudiantes hablan sobre esta clase y expresan entender porque realizaron dichas estructuras.

Con esta conexión se infiere que además de comprender lo redescubierto para los triángulos, pueden transferirlo a aplicaciones en el contexto.

5.1.7 ¿Tres segmentos siempre forman un triángulo? y las categorías de análisis.

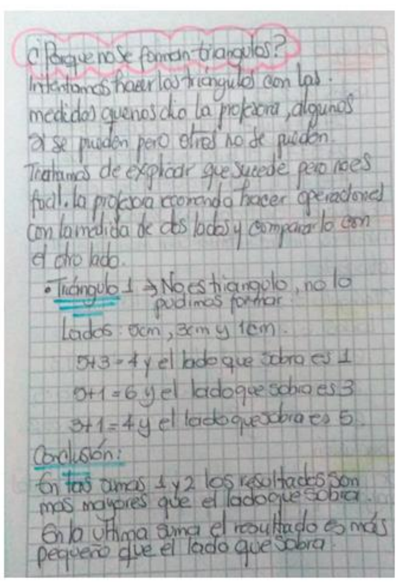
Análisis de contenido. Se proponen triadas de segmentos a partir de los que se pretende validar si es posible en todos los casos construir triángulos. Por lo tanto para la realización de esta actividad es necesario que el estudiante utilice adecuadamente las herramientas para medir longitudes.

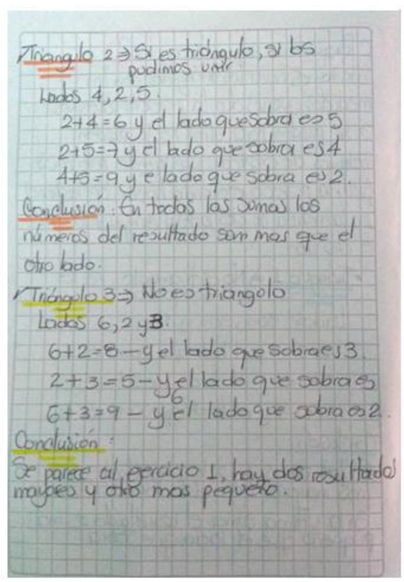
Se presenta como uno de los pasos que apuntan a favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico en el reconocimiento del concepto de triángulo, sus elementos y propiedades.

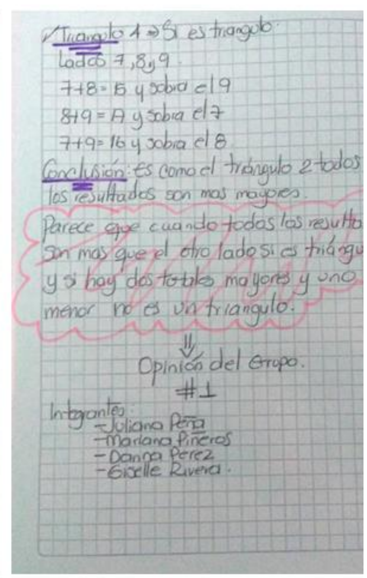
Análisis cognitivo En la tabla 10 se enlistan los descriptores de lo que los estudiantes logran hacer a partir de la experiencia.

Tabla 10. Descriptores de la actividad ¿Tres segmentos siempre forman un triángulo?

Descriptores
✓ Realiza construcciones usando las herramientas del Cabri y otros instrumentos como la regla, para verificar en casos es posible formar un triángulo y en cuáles no.
✓ Usa el método de ensayo y error para determinar la posibilidad de formar un triángulo a partir de una triada de medidas dadas.
✓ Induce las condiciones de medida que debe tener una triada se segmentos para formar un triángulo.
✓ Identifica la relación de la medida de los lados de los triángulos como una propiedad que caracteriza a este objeto geométrico.
Evidencias







Fuente. Elaboración propia

En la lista de descriptores es posible notar que las características propias del Nivel de Análisis de acuerdo con la teoría de Van Hiele se continúan fortaleciendo.

En el proceso de adquisición de dicho nivel aparecen propiedades de los triángulos que no se conocían y que ahora pueden ser verificadas usando las herramientas del Cabri, que como se ha dicho previamente, permite dinamizar el objeto de estudio para explorarlo de mejor manera.

Dicha exploración posibilita que el estudiante infiera que las figuras están dotadas de propiedades que ahora puede deducir de manera informal (Jaime y Gutiérrez, 1990). Con la lista de propiedades que han empezado a descubrir, los estudiantes son capaces de enriquecer la definición que hasta el momento tenían del triángulo.

Análisis de instrucción. Por dificultades en el desarrollo de la planeación se decide realizar la actividad inicialmente utilizando con lápiz y papel y luego usando el Cabri.

Esta intervención permitió que los estudiantes tuvieran la oportunidad y los argumentos para comparar los procesos de enseñanza tradicional con lápiz y papel y las ventajas que ofrece la geometría dinámica. De esta forma, en la observación realizada se cuentan con registros que permiten validar la teoría con relación al uso de las TICS en el aula, dentro de las que se destaca el fortalecimiento del componente actitudinal de la evaluación, ya que los estudiantes expresan su gusto e interes ante las clases en las que se utiliza la calculadora y sugieren que con este recurso puedan ser abordados los objetos numéricos y estadísticos.

Análisis de actuación. Las preguntas orientadoras de la actividad inicialmente fueron poco reflexivas, esto se evidenció en la reacción de los estudiantes ante la imposibilidad de formar triángulos con algunas triadas tanto con lápiz y papel como con el Cabri.

Antes de realizar alguna construcción, varios grupos habían contestado que en todos los casos era posible formar un triángulo, ya que son figuras formadas por tres segmentos. Sin embargo, ante la exploración de otros compañeros se dieron cuenta que dicha afirmación era incorrecta, pero atribuyeron el error al no saber cómo usar adecuadamente las herramientas para hacer las construcciones.

Es en este momento cuando se requiere la intervención oportuna del docente, quien debe incentivarlos a reflexionar sobre lo que ocurre, sugerirles plantear de contraejemplos y elaborar de conjeturas que puedan ser validadas con el uso de las herramientas del Cabri y argumentadas con los elementos conceptuales que han aprehendido, antes de pensar en que hay un error del procedimiento o del programa. Esto significa, que el trabajo del docente en todo momento debe contribuir a que los estudiantes construyan el sentido de las acciones realizadas (Etcheverry, Reid y Botta, 2009).

Por lo anterior se reconoce la importancia de fortalecer las preguntas orientadoras con el fin de continuar enriqueciendo los procesos de argumentación, razonamiento, comunicación y visualización, y lograr direccionar a los estudiantes en el desarrollo de su pensamiento geométrico.

5.1.8 Sumando ángulos y las categorías de análisis.

Análisis de contenido. Se pretende que los estudiantes por medio de la exploración redescubran la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo, para lo que se requiere el uso adecuado de la herramienta que ofrece el Cabri para dicho trabajo.

Se pretende además reforzar el concepto de ángulo, sus elementos, clasificación y notación. Ya que esta temática ha sido abordada en años anteriores de manera tradicional y direccionada por las actividades que se proponen en los libros de texto.

Análisis cognitivo. Uno de los principales obstáculos para el trabajo es la resistencia que los estudiantes tienen al tema de ángulos, porque consideran complejo el uso del transportador para realizar mediciones. Sin embargo, el carácter dinámico de las construcciones realizadas y la herramienta de medición con la que cuenta el software hace el trabajo más sencillo.

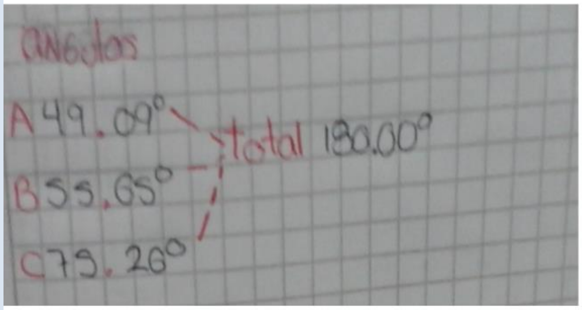
Cada grupo de estudiantes se detuvo en el reconocimiento de la propiedad de la suma de ángulos internos, para los ejemplos concretos que ellos construyeron y socializaron entre sí. Sin embargo, ninguno comprende que los ejemplos no constituyen un argumento abstracto de generalización, por tanto su razonamiento se mantiene en el Nivel 2 (Jaime y Gutiérrez, 1990).

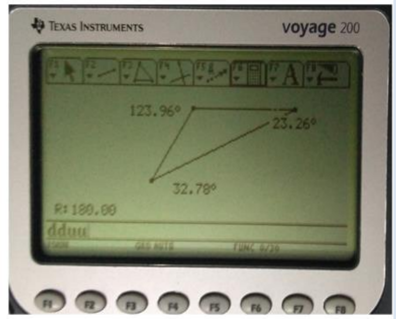
Para varios de los grupos comunicar simbólicamente y/o generalizar la propiedad para todos los triángulos resultó un proceso complejo, por lo que tuvieron la necesidad de verificarla con varias construcciones. Indudablemente este proceso con lápiz y papel hubiera durado más tiempo. No obstante, el alcance y las ventajas de la calculadora permitieron contrastar los resultados obtenidos en cada caso, fortalecer la visualización en el nivel de percepción de elementos constitutivos y comprender mejor la propiedad (Rey, Hernández , Tapia y Tarifa, 2010).

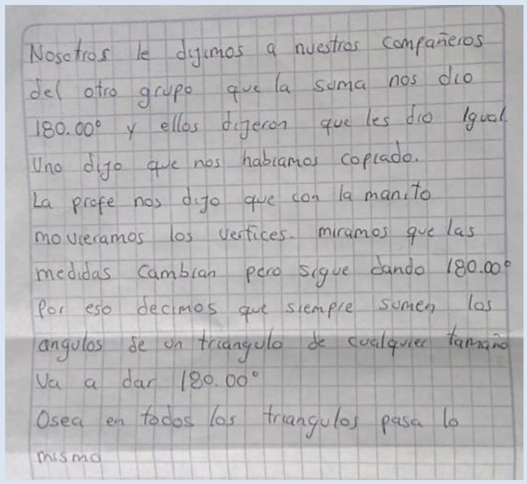
Así podemos enunciar los siguientes logros de los estudiantes:

Tabla 11. Descriptores de la actividad Sumando Ángulos

Descriptores
✓ Utiliza las herramientas del Cabri como recurso para deducir una propiedad de los triángulos (suma de ángulos)
✓ Reconoce la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo, verificando que el resultado es cierto para ejemplos concretos.
✓ Usa con sentido el cuantificador todos, para verbalizar la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo.
Evidencias






Nosotros le dijimos a nuestros compañeros del otro grupo que la suma nos dio 180.00° y ellos dijeron que les dio igual. Uno dijo que nos habiamos copiado.
La profe nos dijo que con la manito movieramos los vertices. miramos que las medidas cambian pero sigue dando 180.00° por eso decimos que siempre sumen los angulos de un triangulo de cualquier tamaño va a dar 180.00°
Osea en todos los triangulos pasa lo mismo

Fuente. Elaboración propia.

Análisis de instrucción. En la planeación inicial, se propone que los estudiantes construyan varios ángulos y realicen la medición de los mismos. Posteriormente, elaboren un triángulo, realicen la medición de sus ángulos internos y sumen dichas medidas, describan el proceso realizado y los resultados, para luego socializarlo con el resto del curso.

Los estudiantes de algunos grupos expresan las dudas de si esta propiedad se cumple con todos los triángulos, de hecho afirman que "el resultado entre grupos pudo ser copiado". Esta situación genera la necesidad de proponer que cada grupo realice varias construcciones de triángulos (con diferente forma y posición, ya que aún no se habla de tipos de triángulos), y analicen lo sucedido.

Ante la dificultad para escribir las conclusiones usando símbolos del lenguaje matemático, se propone a los grupos que expresen sus resultados utilizando la simbología o notación que consideren adecuada. Se observa que algunos estudiantes no conocen la forma de notar ángulos y triángulos.

Lo anterior suscita un espacio para analizar lo propuesto que requiere la intervención docente.

Análisis de actuación. Tal como se describe anteriormente, para la docente investigadora fue necesario generar un espacio para realizar una discusión, donde se analizara la pertinencia de las diferentes formas como los estudiantes expresaron las conclusiones de la actividad, con el fin de unificar criterios sobre los símbolos del lenguaje matemático para la notación (Rey, Hernández, Tapia y Tarifa, 2010), aclarando que el uso adecuado de los mismos y la utilización de un lenguaje común, dan lugar a un mejor entendimiento entre los miembros de la clase y permiten la institucionalización de los aprendizajes.

Es así como se considera necesario pensar en continuar reforzando el manejo de los símbolos matemáticos para la notación como parte del fortalecimiento del proceso de comunicación.

Otro factor de importancia en la actividad fue la posibilidad de pensar en espacios de socialización de conclusiones entre los grupos, lo que favoreció la reflexión crítica donde se fomenta y mejora la expresión de las ideas, a la vez que se permite la autonomía del estudiante en la selección de los recursos, los modelos y alternativas de solución de situaciones propias de la actividad matemática (Aravena y Caamaño, 2013).

5.1.9 Adivina cómo es mi figura y las categorías de análisis.

Análisis de contenido. Teniendo en cuenta el desempeño de los estudiantes y sus dificultades en las sesiones realizadas hasta el momento, se propuso una actividad en la cual hicieron uso de las herramientas del Cabri para construir de un objeto matemático, que luego describieron haciendo uso de las definiciones trabajadas y de símbolos de notación matemática.

Para tal fin los estudiantes ponen en juego conceptos como ángulos, relaciones de posición entre rectas, elementos de los polígonos (vértices, ángulos, lados, diagonales), entre otros que consideran adecuados para el registro verbal y simbólico de la construcción hecha previamente.

Análisis cognitivo. En el desarrollo de la actividad se evidencia que los estudiantes sesgan sus registros a los triángulos, porque dicen, “es el tema que estamos trabajando y manejamos mejor”.

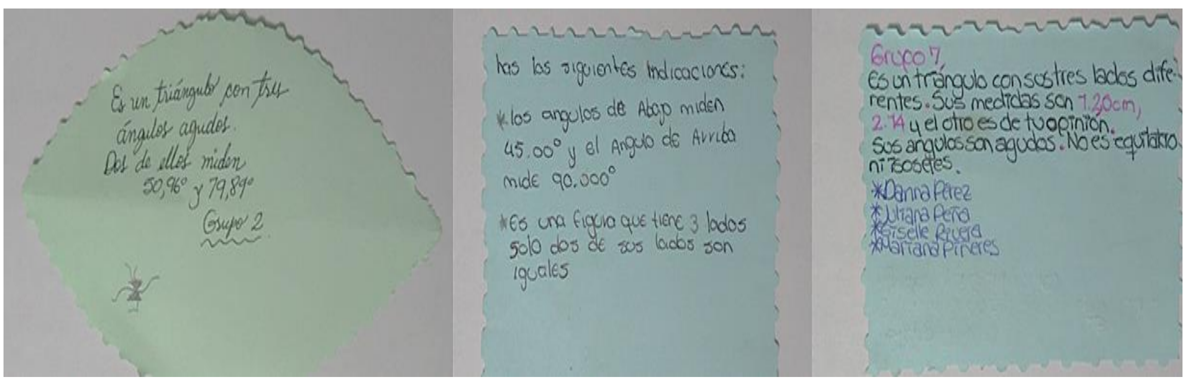
Se observa que hay reconocimiento por parte de los mismos estudiantes sobre lo que dominan y no dominan, se puede decir que hay una apropiación del proceso de aprendizaje en cuanto a sus fortalezas y debilidades.

En este paso del plan de acción los descriptores que dan cuenta de lo que pueden hacer los estudiantes son reducidos y siguen correspondiendo al nivel 2 del razonamiento de Van Hiele, a pesar que se ha notado en los pasos anteriores un reconocimiento de la habilidad comunicativa y visual, los mismos estudiantes en la socialización y evaluación de la actividad expresan que “aún no contamos con el dominio de términos suficientes que nos permiten hacer una buena descripción de las figuras, por ese motivo se dificultó la actividad”.

En las evidencias de la tabla 12 y la figura 23 se puede notar que los estudiantes no se acostumbran al uso de símbolos del lenguaje matemático para hacer el registro de los objetos geométricos, porque dicen "no los manejan correctamente".

Tabla 12. Descriptores para la actividad Adivina como es mi figura

Descriptores
✓ Da información de características que permiten hacer el registro gráfico de una figura.
✓ Utiliza las herramientas del Cabri como recurso para reproducir el registro gráfico de una figura, teniendo en cuenta características y/o propiedades dadas.
Evidencias



Fuente. Elaboración propia.

Con lo anterior se pone en manifiesto el carácter local de los niveles de razonamiento, debido a que lo estudiantes se desenvuelven en distintos niveles ante una actividad, demostrando mayor experticia para dar solución a unas situaciones o para dominar unos temas que para otros (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Análisis de instrucción. A los estudiantes se les propone que realicen un registro gráfico de un objeto geométrico, que posteriormente deben describir con los elementos que consideren necesarios y suficientes para lograr que otro grupo lo reproduzca.

Posteriormente se hace una lectura de la descripción y se proyecta ante la clase el registro gráfico construido que se compara con el inicial.

Se evidencia que aunque varios grupos se acercan en la construcción del objeto descrito, este proceso se ve torpedeado por las dificultades que tienen algunos estudiantes para comunicar correctamente un concepto.

Se genera finalmente un espacio donde cada grupo puede revisar y socializar las dificultades que evidenciaron en la ejecución de cada tarea y las oportunidades de mejora para una próxima actividad.

Análisis de actuación. Aunque en la planeación de la sesión se definió una ruta para la realización del trabajo, las situaciones de aula van generando la necesidad de direccionarlo de forma diferente y/o repensar lo propuesto.

Inicialmente se pensó que los estudiantes iban a utilizar las diferentes herramientas de Cabri y los objetos geométricos que con ellas se pueden construir. Sin embargo se evidenció como restringen su trabajo solo a los triángulos, hecho que se da por iniciativa propia.

La mediación constante del docente, se requiere para tres actuaciones puntuales: generación de preguntas orientadoras que incentiven a la exploración y generación de conjeturas, aclaración de dudas de los grupos y la unificación de conceptos, a partir de los aportes de los grupos.

De acuerdo a lo anterior las mayores dificultades se presentaron en la redacción de los registros escritos con los que los estudiantes describieron sus construcciones, ya que se les pidió claridad y utilización adecuada de los conceptos preferiblemente expresados en lenguaje matemático con símbolos de notación según el caso.

En esta tarea se dieron las mayores indicaciones y se concluye la necesidad de generar más espacios para reforzar el proceso de adquisición y uso de la comunicación matemática.

5.1.10 Veo – pienso – me pregunto y las categorías de análisis.

Análisis de contenido. Teniendo en cuenta que “uno de los objetivos fundamentales del docente en el salón de clase debe ser que el alumno analice, critique y extraiga conclusiones a partir de la información que se le pueda suministrar” (Gamboa, 2007, pág. 16), se presentan unos registros gráficos a partir de los cuales los estudiantes realizan la rutina de pensamiento veo – pienso – me pregunto.

Para la realización del trabajo se requiere que el estudiante utilice principalmente conceptos como: ángulos y clasificaciones, medidas de segmentos y otros que cada gupo considere necesario, a partir de los que propondrán criterios para clasificar los triángulos, que posteriormente se unificarán en las las clases de triángulos según la medida de sus lados (equilátero, isósceles y escaleno) según la medida de sus ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusánglo) y las relaciones que hay entre ellos.

Los estudiantes tambien utilizan las diferentes herramientas del cabri, como medición de distancias y ángulos, que manejan con mayor destreza para verificar sus conjeturas, lo que fue de gran ayuda en el trabajo .

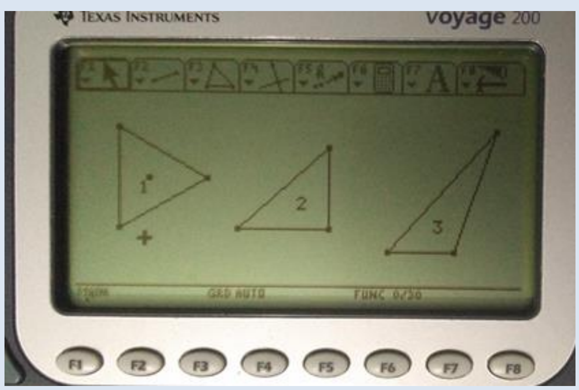
Análisis cognitivo. A pesar de que la clasificación de triángulos es un tema que ha sido abordado en niveles de primaria, al ser analizados por separado el criterio de clasificación según la medida de sus ángulos y según la medida de sus lados, a los estudiantes se les dificulta la aplicación de los dos criterios en una misma figura toda vez que hasta el momento, estos conceptos han sido abordados tradicionalmente.

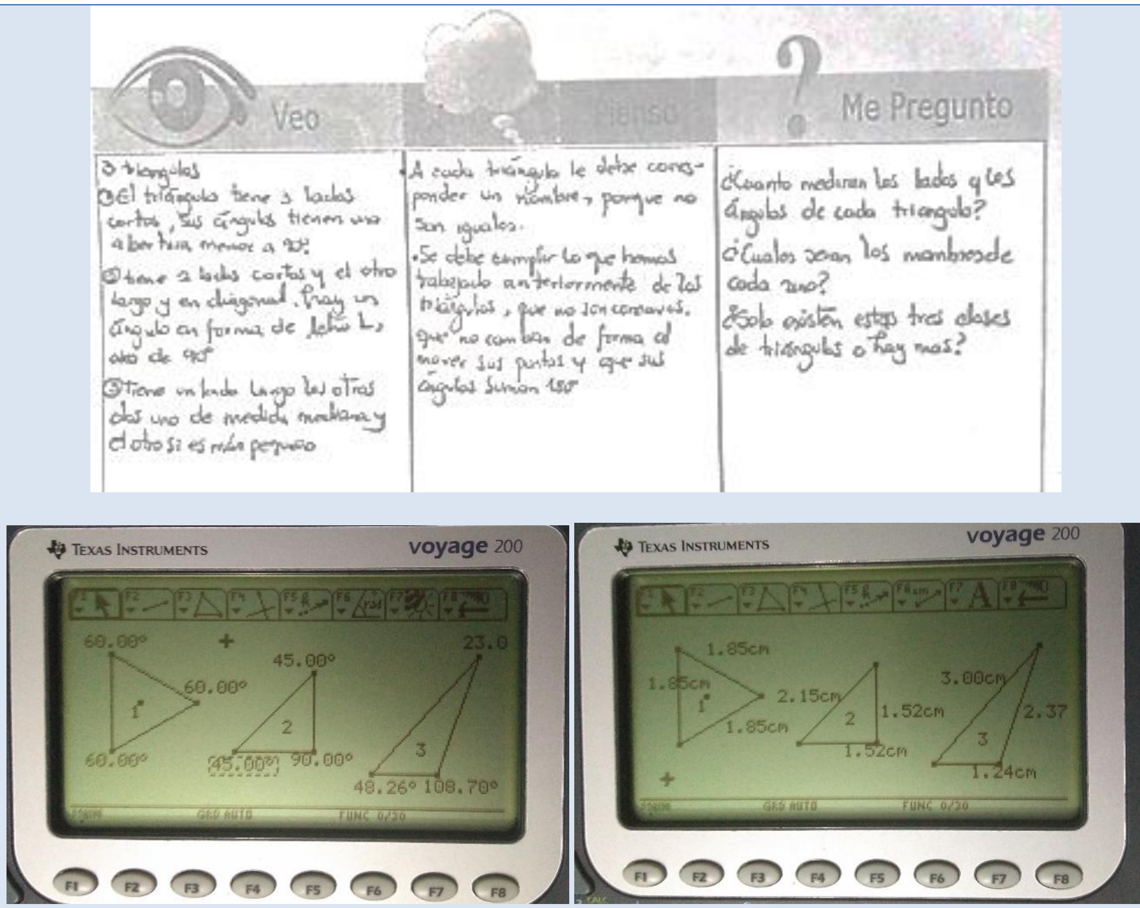
Sin embargo, como parte de la las actividades anteriores, se ha permitido que el estudiante identifique de los elementos constitutivos del triángulo, sus propiedades y características, que ahora también le permitirán inducir criterios de clasificación.

La acción de reconocer la tipología de los triángulos, corresponde al Nivel de Análisis en la teoría de Van Hiele. Aunque es importante aclarar que no la realizan todos los grupos y que un par ellos se limita a descripciones con atributos insignificantes y reducidos a una percepción visual global que todavía se ubica en el Nivel de Reconocimiento (Ver figura 24 y evidencias de la tabla 13).

A continuación se describen y evidencian los logros identificados en la mayoría de los grupos:

Tabla 13. Descriptores para la actividad veo - pienso - me pregunto

Descriptores
✓ Inventa criterios para clasifica triángulos a través de los atributos observables de los registros dados.
✓ Identifica de forma independiente propiedades de los triángulos que permiten clasificarlos.
✓ Comprueba criterios que caracterizan las clases de triángulos, mediante la experimentación y el uso de las herramientas del Cabri.
Evidencias




Fuente. Elaboración Propia

Análisis de instrucción. A los estudiantes se les presentan tres construcciones realizadas previamente por el docente. En los grupos de trabajo deben diligenciar el formato de la rutina de pensamiento Veo – Pienso – Me pregunto.

Es importante la orientación del docente para que los estudiantes respondan por lo que se les pregunta y no confundan por ejemplo lo que ven con lo que piensan. Por lo tanto es necesario que al interior de los grupos se generen otras preguntas que obliguen a los estudiantes a potenciar la visualización, el razonamiento y la comunicación.

Análisis de actuación. Al igual que en el resto de las actividades de la intervención, los momentos de intervención del docente para aclarar dudas, unificar criterios y direccionar el trabajo, soporta su labor como guía en el proceso de reconstrucción de saberes.

Sin embargo, se reconoce la necesidad de que las actividades propuestas en las clases de geometría se centren en el fortalecimiento de las habilidades comunicativa, visual, de construcción, de razonamiento, de transferencia y de ubicación (Bressan, Reyna y Zorzoli, 2003) y por ende en permitan que los estudiantes continúen avanzando en su proceso de desarrollo del pensamiento geométrico.

5.2 Conclusiones

Producto de la aplicación y el análisis detallado de las actividades de diagnóstico, que no evalúan aprendizajes sino que determinan la forma de aprender y los niveles de razonamientos de los estudiantes se identifica que la población de estudio se ubica en el nivel 1 de acuerdo con el modelo Van Hiele, sustentado en el análisis cognitivo realizado de esta etapa (ver pág. 116 - 117), donde se enlistan los descriptores de lo que los estudiantes pueden realizar en este momento, así como las dificultades que presentan.

Como resultado de la intervención, se evidencian manifestaciones que permiten asegurar el avance de algunos estudiantes del Nivel 1 al Nivel 2 en la Teoría de Van Hiele, además del fortalecimiento de la habilidades propias de la geometría, entre las cuales se pueden nombrar la visualización, comunicación o uso adecuado del lenguaje geométrico y la construcción (Bressan, Reyna y Zorzoli, 2003).

Lo anterior se afirma teniendo en cuenta descriptores referidos a lo que los estudiantes pueden hacer durante y posterior a la realización de las actividades usando el software Cabri Geometre.

Dichos descriptores se han adaptado de acuerdo a los planteamientos provenientes de investigaciones previas relacionadas, desarrolladas por autores que han centrado su atención en la Teoría de los Van Hiele.

Dentro de los descriptores alcanzados por los estudiantes tenemos:

- ✓ Usar los métodos de ensayo y error para validar conjeturas referidas a las propiedades de los triángulos, como se evidencia en las figuras 17, 20 y 22, y las tablas 8, 9, 10 y 11)
- ✓ Realizar construcciones usando las herramientas del Cabri, permite identificar los elementos que constituyen el objeto de estudio (triángulos) y verificar características, como muestran las figuras 16, 18, 20 y 21, y las tablas 8, 9 10 y 11)
- ✓ Identificar las propiedades que caracterizan los triángulos, evidenciado en las figuras 16, 18, 20 y 21 y las tablas 8, 9, 10, 11, 12 y 13)
- ✓ Utilizar con sentido cuantificadores como todos, algunos, ninguno, para describir características propias de los triángulos (ver figuras 20 y 22, y las tablas 7, 8, 9, 10,12 y 13)

Se evidencia además cómo parte los estudiantes desarrollan el dominio de algunos términos del lenguaje geométrico y símbolos de notación (ver figuras 23 y 24 y tablas 10 y 12), de tal manera que lo pueden utilizar en diferentes contextos y para referirse a objetos estudiados en clase. También se sienten seguros para expresar sus ideas y socializar las conclusiones obtenidas en sus grupos de trabajo. Así las definiciones alrededor de los objetos estudiados son reconstruidas en colectivo validando o refutando los argumentos aportados por todos.

Para que lo anterior pueda ser posible, tal como plantean Aravena Gutiérrez y Jaime (2016), en las prácticas de aulas de los docentes de matemáticas es necesario utilizar estrategias de enseñanza orientadas a favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico, por tanto, se exige que, desde la formación de los docentes se reconozca el Modelo de Van Hiele como una guía de enseñanza de la geometría.

Pensar en el aprendizaje y la evaluación basada en el modelo de Van Hiele, requiere que el docente se apropie o por lo menos tenga un imaginario del nivel de razonamiento en el cual se encuentran sus estudiantes, para que le sea posible generar actividades donde se controlen factores como el uso del lenguaje y se determine de que forma se guiará dicho proceso (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Todo lo anterior no puede ser posible si el docente de matemáticas piensa su práctica solo teniendo en cuenta las generalidades de los documentos que se suscitan desde las políticas internacionales, nacionales o institucionales, o atendiendo a las exigencias de que los estudiantes obtengan buenos resultados en las pruebas externas, ya que la práctica pedagógica desde el área de matemáticas requiere una intervención consciente basada y pensada en las condiciones de los estudiantes y sus intereses (Gómez, 2002).

La planeación de las clases o unidades de intervención en matemáticas debe ser un conjunto articulado de elementos, el diagnóstico que brinda la base o el punto de partida, la selección de contenidos, lenguaje adecuado, establecimiento de objetivos de aprendizaje, reconocimiento de posibles dificultades, propuesta y puesta en marcha de actividades acorde con lo antes mencionado y la reflexión en torno objetivos propuesto, donde no solo se evalúa la actuación del estudiante, sino además el papel del docente como guía de procesos asertivos.

Es así como el modelo de Análisis Didáctico, da luces en el proceso de trasformación de las prácticas de aula, donde se deja de lado la enseñanza tradicional para dar paso a un ciclo de constante reflexión pensada siempre entorno al estudiante y el favorecimiento de sus procesos de pensamiento.

Para la presente investigación se evidencia que la decisión de seleccionar un contenido desde el que se pudieran reforzar y/o abordar implícitamente otros, permitió que los estudiantes establecieran relaciones entre conceptos. Además generó la posibilidad de relacionar dichos temas con situaciones de diferentes áreas y/o de su cotidianidad, encontrando significado y sentido a los aprendizajes.

Se reconoce la importancia de plantear tareas enfocadas a desarrollar acciones como la exploración y la argumentación. Tal como se ha planteado anteriormente, el papel del docente es de guía y facilitador más que de poseedor y dador de saberes. Sin embargo es importante la generación de espacios donde se unifique criterios y se institucionalice el conocimiento.

Para la utilización adecuada de la geometría dinámica, se deben pensar tareas que basadas en la construcción y la descripción de dichas construcciones. Ya que las herramientas ofrecidas por estos softwares dan la posibilidad que los estudiantes interactúen con los objetos geométricos, los exploren y redescubran características de ellos.

La actuación del docente en aula y las decisiones que tome en el proceso de trabajo a partir de sus observaciones y reflexión, son los insumos principales para la proposición de tareas intencionadas dentro de su planeación. En consecuencia, el docente debe tener claro el contenido a trabajar, el objetivo de aprendizaje, los obstáculos que se pueden presentar, cómo se va a abordar la temática, qué recursos se requieren, cómo se va a evaluar y finalmente realice un análisis retrospectivo de las acciones, con el fin último de mejorar su práctica y el proceso de aprendizaje de sus estudiantes.

En la reflexión continua que tuvo lugar en el desarrollo del plan de acción se evidencian dificultades relacionadas con la forma cómo lo estudiantes conforman los grupos de trabajo, por lo tanto, dentro de las actuaciones del docente, se propone la organización intencionada de dichos grupos con el fin de "generar espacios de reflexión y comunicación de los alumnos en el trabajo geométrico, orientándolos a la adquisición del lenguaje matemático, la argumentación y la discusión de sus procesos de resolución, permitiendo así la independencia del pensamiento reflexivo" (Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016, pág. 124).

Como parte de las fortalezas se rescata la motivación y el interés que los estudiantes manifiestan al desarrollar las actividades propuestas, ya que difieren de los esquemas rutinarios de las clases tradicionales.

Por otra parte, la presente investigación le puede agregar a las ventajas que ofrece la geometría dinámica descritas en el apartado de referentes teóricos y validadas en la intervención, la posibilidad que le da a los estudiantes con bajo rendimiento académico y con diagnóstico de necesidades educativas diversas, de ser parte activa de los procesos de aula, ya que este recurso se convierte en un elemento adaptable a las necesidades, ritmos y formas de aprendizajes de los estudiantes "con el propósito de facilitar el acceso y progreso de estudiantes con necesidades especiales en el currículo" (UNESCO, 2004, pág. 110) y ofreciéndole las mismas oportunidades de aprendizaje que tienen los demás estudiantes del curso.

De acuerdo a Carmona y Arango (2013) esta estrategia para el aprendizaje de los estudiantes con necesidades especiales y bajo rendimiento se considera un aula taller, ya que fue un espacio donde se articuló la práctica y la teoría, y donde tanto el docente como los estudiantes participaron activamente de su desarrollo.

5.3 Recomendaciones

Si bien el pensamiento geométrico es un componente del currículo de matemáticas en Colombia, tal como proponen lineamientos (MEN, 1998) y estándares (MEN, 2006), la invitación que se hace desde la presente investigación es a no dejarlo de lado y reducir su trabajo a un momento del año escolar. Es posible desde la geometría lograr que los estudiantes desarrollen habilidades y procesos de pensamiento como la visualización, el razonamiento y la resolución de problemas, ejemplificados durante la presente investigación en la utilización asertiva de las definiciones que se fueron reconstruyendo como argumentos le permitieron a los estudiantes plantear y validar conjeturas usando métodos como el ensayo y el error, la exploración y selección de herramientas para representar una situación y redescubrir características propiedades de los objetos geométricos y la posibilidad de describir estos descubrimientos comunicándolos a través de lenguaje matemático.

Es deseable que este trabajo se inicie a partir del diagnóstico que se tenga de los estudiantes, con el fin de utilizar el mismo nivel de lenguaje que ellos para propender por encaminarlos a mejorar la comprensión de los objetos matemáticos que se quieren abordar. Es importante que el docente de matemáticas no realice una planeación general y descontextualizada, sino que, usando herramientas como el Análisis Didáctico, enriquezca su práctica, a partir de la planeación y reflexión consciente, de la misma. Si se tienen en cuenta, por ejemplo las dificultades u obstáculos de aprendizaje, se propone un objetivo que los tenga en cuenta y contemple la realidad de los estudiantes y se seleccionan los contenidos propicios para el desarrollo de la práctica, se identifican fortalezas y debilidades que permitan hacer mejoras a la planeación y ejecución de la práctica los resultados serán más satisfactorios para los estudiantes porque avanzarán en su proceso de aprendizaje y para el docente porque logrará guiar un proceso adecuado

El docente de matemáticas ya no es el transmisor de conocimientos, por lo tanto debe tratar que las prácticas de enseñanza tradicional de la geometría basada en el lápiz y el papel sean complementadas con otros recursos como los softwares de geometría dinámica que le permiten a los estudiantes crear, imaginar, redescubrir, conjeturar, experimentar y validar su pensamiento. Como evidencia de lo anterior se tienen los procesos que los estudiantes pudieron realizar usando las herramientas con las que cuenta el Cabri Geometre, entre los que podemos mencionar la construcción de objetos matemáticos, mediciones de lados y ángulos y movimientos de los dibujos o sus elementos por medio del arrastre.

El análisis de didáctico debe tener en cuenta las ventajas de recursos como la geometría dinámica para apuntar al desarrollo del pensamiento geométrico, atendiendo además a las a necesidad de crear ambientes propicios para el aprendizaje que favorezcan a los estudiantes y que garanticen la consecución de los objetivos propuestos por el docente de matemáticas. En palabras de Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016) “resulta de interés generar espacios de reflexión y comunicación de los alumnos en el trabajo geométrico, orientándolos a la adquisición del lenguaje matemático, la argumentación y la discusión de sus procesos de resolución, permitiendo así la independencia del pensamiento reflexivo” (pág. 124).

Se recomienda que en los grupos numerosos la intervención donde se utilicen ambientes dinámicos como el Cabri, exista la posibilidad de integrar los estudiantes de acuerdo a sus habilidades y niveles de pensamiento geométrico, de esta manera conseguir que aquellos con mayor dominio de la herramienta y un nivel de pensamiento mayor, se conviertan en un apoyo para el docente a la vez que influyen positivamente en el trabajo de sus compañeros. Además de lo anterior, si se cuentan con estudiantes con necesidades educativas especiales, particularmente si estas son de tipo cognitivo, es importante hacerlos participes de los grupos de los niños de educación regular, es decir no dejarlos a todos en un mismo grupo o asignarles un trabajo diferente, pues ellos desde sus habilidades son capaces de explorar y mediante las ventajas que ofrece la geometría dinámica reconstruir conceptos que probablemente antes aprendían de forma memorística.

Por último se propone que el trabajo con TICS y la teoría del Análisis Didáctico, además de ser conocidos, valorados y dominados por docentes de matemáticas, como proponen Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016), puedan ser utilizados no solo para el aprendizaje de la geometría, sino que sirvan para abordar los otros pensamientos y sistemas matemáticos.

Para futuras investigaciones se proponen la siguiente pregunta, a partir de la cual se puede orientar el trabajo:

¿Qué incidencia tiene la utilización d elas TICS en el rendimiento académico de los estudiantes con necesidades educativas especiales y/o bajo desempeño académico en matemáticas?

5.4 Reflexión Pedagógica

Basados en la experiencia producto de la presente investigación y en el cambio que potenció en mí la práctica, es importante detenerme en varios aspectos para la reflexión:

La enseñanza tradicional en el área de matemáticas. Muchas investigaciones hablan de los obstáculos pedagógicos como frutos de los procesos donde los estudiantes se limitan al aprendizaje memorístico y repetitivo de conceptos no contextualizados y aislados. Ante esta situación, tanto a nivel internacional, nacional y distrital, se han propuesto documentos que tratan de guiar los procesos de aula y la transformación del currículo, teniendo en cuenta no solo las temáticas, sino además las condiciones del contexto que rodea la escuela, las experiencias de los estudiantes y las habilidades o procesos que ellos pueden desarrollar en la ejecución de la actividad matemática. Es evidente que el ***rol del docente*** es indispensable para lograr una transformación real, que vaya más allá de lo que se contempla en los documentos, sobre todo en el momento histórico por el que atraviesa la educación donde la información está al alcance de todos. Por tanto, el papel del docente verdaderamente debe pasar *"hacia un papel de copartícipe, apoyo, co-aprendiz, facilitador y asesor en el progreso de los alumnos"* (González, 2001).

La geometría en el currículo y cómo guiar los procesos de aula. Sumado al aspecto anterior, se tiene el bajo posicionamientos que históricamente se le ha dado a la geometría cuando se trata de seleccionar las lecciones o temáticas a trabajar en el aula. En consecuencia, en el desarrollo de la investigación he intentado destacar el valor de la geometría y sus aplicaciones en contextos matemáticos y de otras áreas. Es importante que como docentes propongamos actividades que involucren el desarrollo del pensamiento geométrico teniendo claro las habilidades que se pretenden potenciar en los estudiantes y que por consiguiente generen un aprendizaje significativo.

La importancia de la geometría dinámica en las prácticas de aula. En este punto de la reflexión convergen los dos aspectos anteriores: el cambio del paradigma de la enseñanza tradicional de las matemáticas y la importancia de la geometría en el currículo. Tal como he mencionado anteriormente, la tecnología y su incorporación en la enseñanza obedece al auge que este recurso tiene en la sociedad actual (Acosta, 2010), por lo tanto, su adecuado aprovechamiento constituye un elemento trascendental en la comprensión de los saberes matemáticos. Sabemos que cualquier recurso por sí solo no implica cambio, el cambio real está en la intencionalidad con la que se utilice y el o los procesos de pensamiento que se pretendan desarrollar con su uso.

Todo lo anterior implica pensar en una planeación donde el estudiante sea el centro real de interés, donde sus particularidades de vida y las de su entorno modifiquen la planeación general de la asignatura, donde la ejercitación y la memorización dejen de ser los únicos procesos de la actividad matemática y den paso al razonamiento y la resolución de problemas "con una perspectiva en la que los alumnos tienen la posibilidad de explorar, descubrir, reformular, conjeturar, validar o refutar, sistematizar; en definitiva, ejercer el papel de investigadores sobre cada contenido que se pretende adquirir" (González, 2001).

Referencias

Acosta , M., Camargo, L., Urquina, H., & Castiblanco, A. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales.* Bogotá.

Acosta, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática, 17*(3), 121-140. Recuperado el 02 de 12 de 2016, de http://www.redalyc.org/pdf/405/40517307.pdf

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica

Acosta, M., Ávila, A., & Gómez, M. (2010). Una mirada teoríca sobre la conceptualización de las traslaciones en sexto grado, a través del aprendizaje por adaptación. *11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa: Memorias*, 572 - 581.

Acosta, M., Delgado, C., & Oscar, C. (2010). Nuevas Tecnologías en la Enseñanza del Concepto de Traslación. *11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa: Memorias*, 492 - 499.

Acosta, M., Mejía, C., Rodríguez, C., & Sabogal, S. (2011). Resolución de problemas geométricos a través de matemática experimental y geometría dinámica: construción del lugar geométrico.

Acosta, M., & Rodríguez, C. (2014). Geometría experimental en el espacio: uso de la teoría de homografía y del software cabri 3D para resolver un problema de geometría en el espacio. *Boletín de Matemáticas, 20*(2), 81 - 98.

Aldana , C., & Medina , C. (2015). Proyecto de Media Fortalecida IED Orlando Higuita Rojas: Caracterización. Universidad de la Salle.

Anderson, G., & Herr, K. (2007). El docente-investigador: Investigación - Acción como una forma válida de generación de conocimientos. . En *La investigación educativa. Una herramienta de conocimiento y acción* (págs. 47 - 69). Buenos Aires: Novedades Educativas.

Ángel, J. (2000). La investigación-acción: un reto para el profesorado: guía práctica para grupos de trabajo, seminarios y equipos de investigación. Inde.

Anijovich, R., & González, C. (2011). *Evaluar para aprender: conceptos e instrumentos.* Aique.

Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule: Talca, Chile. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16*(2), 179-211.

Aravena, M., Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las ciencias, 34*(1), 107 - 128.

Ballesteros, I., & Rojas, D. (2011). Conceptualización de área del rectángulo con la mediación del programa Cabri Geometry. *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, (págs. 169 - 172). Bogotá.

Beltrametti, M., Esquivel, M., & Ferrari, E. (2005). Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes del Profesorado en Matemática. *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas: Universidad Nacional del Nordeste.*

Bressan, A., Bogisic, B., & Crego , K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica: mirar, construir, decir y pensar.* Buenos Aires: Novedades Educativas.

Bressan, A., Reyna, I., & Zorzoli, G. (2003). *Enseñar Geometría. Redescubrir una tarea posible. Actividades para grupos escolares de 6 a 12 años.* Buenos Aires: Styrka.

Cantoral, R., Farfán , R., Cordero , F., Alanís , J., Rodríguez , R., & Garza, A. (2005). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Trilla .

Carmona, J., & Arango, C. (2013). Hacia una inclusión educativa en la enseñanza de las matemáticas. *Educación científica y tecnología*, 636 - 640.

Castiblanco, A., & Moreno, L. (2002). *Proyecto "Incorporación de Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas de la Educación Media en Colombia".* Obtenido de Colombia Aprende: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/docentes/1596/article-58808.html

Castro, E., Peley, R., & Morillo, R. (2006). La práctica pedagógica y el desarrollo de estrategias instruccionales desde el enfoque constructivista. *Revista de Ciencias Sociales (RCS), 17*(3), 581 - 587. Recuperado el 25 de 01 de 2017, de http://www.scielo.org.ve/pdf/rcs/v12n3/art12.pdf

Colegio Orlando Higuita Rojas . (2015). Proyecto Educativo Institucional: Comunicación y Derechos Humanos para la Transformación Social.

Colegio Orlando Higuita Rojas . (2016). Proyecto Comunicación Matemática para el Desarrollo del Pensamiento.

Colombia Aprende. (2016). *La red del conocimiento*. Recuperado el 04 de 06 de 2016, de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/siemprediae.

Corberán, R. (1989). *Didáctica de la geometría: el modelo Van Hiele.* Universitat de València.

Cordero , Z. R. (2009). La investigación aplicada: una forma de conocer las realidades con evidencia científica. *Revista Educación, 33*(1), 155 - 165.

Crowley, M. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry*, 1 - 16.

Cuéllar, H. (2003). Argumentación matemática y demostración en Cabri: el problema de la colinealidad. En A. Castiblanco , & L. Moreno , *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.* (págs. 141 - 153). Bogotá: Enlace Editores.

Díaz, D. (2010). Determinación de niveles van hiele en alumnos de primer año medio sobre la transformación isométrica de simetría. *Revista Investigaciones en Educación, 10*(2), 65 - 87.

Dovidoff, L. (1989). *Introducción a la Psicología.* México: McGraw - Hill.

Elliott, J. (1991). *El cambio educativo desde la investigación - acción.* Madrid: Ediciones Morata.

Etcheverry, N., Reid, M., & Botta, R. (2009). Animándonos a la enseñanza de la geometría con Cabri. *Revista Iberoaméricana de Educación Matemática*(17), 102 - 116.

Fernández, J., Duitama, J., & Delgado, J. (2009). Revisión de la literatura en el marco de un proyecto para la validación de estrategias de aprendizaje de la geometría en ambientes apoyados con TIC . *Revista Virtual Universidad Católica del Norte"*. Obtenido de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/98

Flores, G. (2011). De los poliedros a los polígonos usando herramientas tecnológicas para potenciar el avance entre niveles de razonamiento geométrico.

Fouz, F. (2006). Test Geométrico Aplicando el Modelo de Van Hiele. *Sigma Revista de Matemáticas, 28*(5), 33 - 58.

Fouz, F., & De Donosti, B. (2005). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. Módulo 2: Teoría y Práctica en Geometría Objetivo N 3 Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría.*

Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la Geometría. *EMA, 2*(1), 49-58.

Gamboa , R., & Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4*(5), 113 - 136.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 2*(3), 11- 44.

García, S., & López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría: materiales para apoyar la práctica evaluativa.* México, D.F.

Gómez, M. (2011). Pensamiento geométrico y métrico en las pruebas nacionales. Bogotá: Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).

Gómez, M. (08 de 04 de 2014). *Princippia: Enseñando y aprendiendo con tecnología*. Obtenido de http://blog.princippia.com/2014/04/entrena-tus-alumnos-para-ser-buenos.html

Gómez, P. (2002). Análisis didático y diseño curricular en matemáticas. Revista EMA, 7(3), 251-292. *Revista EMA, 7*(3), 251 - 292.

González, E., Guillén, G., & Figueras, O. (2006). Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio. 192 - 204.

González, M. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica. En *iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (págs. 277-290.). Granada: Universidad de Granada.

González, O., & Arévalo , C. (2011). Desarrollo del pensamiento geométrico- espacial en niños de segundo de primaria desde la situación “viaje alrededor del mundo geométrico en ocho días”. *12° Encuentro Colombiano de Matemáticas educativa. Memorias: Experiencia de aula.* Recuperado el 02 de Octubre de 2015, de http://asocolme.org/publicaciones-asocolme/memorias-ecme

Gualdrón , É., & Gutiérrez, Á. (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. *Actas del 11º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 369-380). SEIEM. Recuperado el 22 de julio de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/1275/1/Gualdron2008Una_SEIEM_369.pdf

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemáticas, 16*(3), 103-125.

Guillén, G., Figueras, O., & Corberán, R. (2004). Algunos resultados sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Un estudio exploratorio. *Actas del XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática.* Universitat Jaume I. Castellón.

Gutiérrez , Á., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on learning problems in mathematics, 20*, 27 - 46.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de Geometría Espacial en un entorno de Geometría Dinámica 3 - dimensional. *PNA, 9*(2), 53 - 83.

Guzmán, M. d. (1993). *Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura.* (E. Popular, Ed.) Recuperado el 14 de 11 de 2015, de http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

Hernández, R., Fernández Collado, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de investigación.* México: McGrawHill.

Hernández, V., & Villalba , M. (2001). Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI. En *Documento de discusión para estudio ICMI.*

ICFES. (2012). *Estudios sobre calidad de la educación en Colombia .* Bogotá.

ICFES. (2013). *Análisis de las diferencias de género en el desempeño de estudiantes colombianos en matemáticas y lenguaje.* Bogotá.

ICFES. (2013). *Colombia en Pisa 2012: Informe nacional de resultados, Resumen Ejecutivo.* Bogotá .

ICFES. (13 de 09 de 2015). *Icfes - Información de la prueba saber 11*. Obtenido de http://www2.icfes.gov.co/instituciones-educativas-y-secretarias/saber-11/informacion-de-la-prueba-saber11

ICFES, I. C. (2015). *Informe de pruebas saber Colegio Orlando Higuita Rojas IED.* Bogotá.

Jaime, A. (1998). ¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría? En Á. Gutiérrez, & A. Jaime, *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.* (págs. 23 - 43). Una empresa docente.

Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En *En Teoría y práctica en educación matemática* (págs. 295 - 384). Ediciones Alfar.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *evista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(3), 361 - 382.

Lupiáñez , J., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y Formación Inicial. *PNA, 3*(1), 35-48

Mamián, E. (2010). El Cabri como Potenciador en el Estudiante del Pensamiento Geométrico. *11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa: Memorias*.

Mata, F. (2006). Análisis sobre el razonamiento en el aprendizaje de los conceptos de la geometría analítica: el caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de Van Hiele .

MEN. (05 de 2002). Estándares curriculares, un compromiso con la excelenciaro. *Altablero*. Recuperado el 28 de 07 de 2017, de Altablero: http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87872.html

MEN. (26 de 08 de 2010). *Ministerio de Educación Nacional*. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-244735.html

MEN. (2015). *Colombia, la mejor educada en el 2025: Líneas estratégicas de la política educativa del Ministerio de Educación Nacional.*

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá.

Morales, C., & Majé, R. (2010). Pensamiento Espacial y Desarrollo de Competencias. *11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Memorias*. Recuperado el 30 de Octubre de 2015, de http://funes.uniandes.edu.co/1111/1/472_Pensamiento_Espacial_y_Desarrollo_Asocolme2010.pdf

Morales, F. (2010). Conozca 3 tipos de investigación: Descriptiva, Exploratoria y Explicativa.

Moreno, L. (2001). Ideas geometrícas del Currículum presentadas mediante el Cabri Geometre. En M. d. Nacional, *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia* (págs. 141 - 150). Bogotá: Enlace Editores LTDA.

Moreno, L., & Santos Trigo, L. M. (agosto de 2001). De la herramienta al instrumento: una perspectiva informática. *Educación Matemática, 13*(2), 78-97.

Moreno, L., & Waldegg, G. (1999). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. En D. d. Ministerio de Educación Nacional, *Incorporación de Nuevas tecnologías al currículo de las matemáticas de la educación media en Colombia* (págs. 40 - 66). Bogotá .

Murillo, R., & Lorenzón, G. (2009). Un modelo para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(2), 241 - 256.

Niño Rojas, V. (2011). ¿Cómo se ejecuta el proyecto? En V. Niño Rojas , *Metodología de la Investigación* (págs. 43 - 143). Ediciones de la U.

Novembre, A., Nicodemo, M., & Coll, P. (2015). *Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza.* Buenos Aires: ANSES.

OECD. (2015). *PISA en español*. Obtenido de http://www.oecd.org/pisa/pisaenespaol.htm

Olivero, F. (2003). Cabri as a shared workspace within the proving process . Recuperado el 22 de julio de 2017, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED501055.pdf.

Pérez , S., & Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre crencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. *Investigación en educación matemática*, 295 - 305. Recuperado el 12 de 06 de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/1262/1/Perez2008Estudio_SEIEM_295.pdf

Ramírez, N. (2014). Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo Van Hiele y GeoGebra.

Real, G. (2003). *Orientación Andújar: Recursos educativos accesibles y gratuitos*. Recuperado el 01 de 03 de 2016, de http://www.orientacionandujar.es/2013/01/23/organizadores-graficos-infantil-y-primaria-para-rutinas-de-pensamiento-iii/

Restrepo, B. (1996). Modulo 7: Investigación en educación . En ICFES, *Especialización en Teoría, métodos y técnicas de investigación social .* Bogotá.

Rey, M., Hernández , C., Tapia, L., & Tarifa, H. (2010). Secuencia Didáctica para la enseñanza de triángulos usando herramientas informáticas. En P.Lestón, *Acta Latinoaméricana de Matemática Educativa* (págs. 1195 - 1205). México D. F: Comité Latinoaméricano de Matemática Educativa.

Rico, L. (2013). El método de análisis didáctico. *Revista Iberoamericana de educación matemática*(33), 11 - 27.

Rodríguez, G., & Verónica, H. (2009). Funcionalidad de los juegos e estrategias virtuales y del software Cabri Geometre II en ele aprendizaje de geometría en Secundaria.

Romero, M. (2014). *Análisis de la eficacia de aprendizaje y eficacia de las instituciones educativas mediante el uso de los datos de la Prueba Censal Saber 2009.* Bogotá: ICFES.

Secretaría de Educación Distrital SED. (1999). *Desarrollo del Pensamiento Espacial y Geometríco .* Bogotá.

SED. (2007). *Serie Cuadernos del Curriculo: Orientaciones Curriculares para el campo del pensamiento matemático.* Bogotá.

Segovia , A. (2000). El pensamiento: una definición interconductual. Revista de Investigación en Psicología. *Revista de Investigación en Psicología, 3*(1), 23 - 38.

Serrano , J. P. (2000). Modelos de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: aplicaciones prácticas. Narcea Ediciones.

Sordo, J. (2005). Estudio de una estrategia didáctica basada en nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría.

UNESCO. (2004). *Temario Abierto sobre Educacion Inclusiva: Materiales de Apoyo para Responsables de Políticas Educativas.* Obtenido de http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001252/125237so.pd

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and archivement in secondary y school geometry.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.*

Vargas, G., & Araya, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencias, 27*(1), 74 - 94.

Villarroel, S., & Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria . *Numeros: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 73–94.

Anexos

Anexo 1. Cuestionario para docentes

Respetado docente: el siguiente cuestionario tiene como propósito evidenciar diferentes concepciones sobre la enseñanza de la geometría y su importancia dentro del currículo de matemáticas. Por este motivo solicito su colaboración para responder las preguntas que encontrará a continuación de forma clara y haciendo una reflexión consiente de su práctica y labor como docente del área. Es importante aclarar que, por tener un fin investigativo y pedagógico, los resultados serán manejados con profesionalismo y responsabilidad.
Muchas Gracias.

CONCEPCIONES SOBRE LA GEOMETRIA
1. ¿Qué le viene a la mente cuando escucha la palabra geometría?[4] 2. ¿Cree usted que la geometría tiene aplicaciones en la vida cotidiana? ¿Qué aplicaciones destacaría de la geometría en la vida real? 3. ¿Cree usted que la geometría se relaciona con otras áreas del conocimiento? Si su respuesta es afirmativa ¿Qué relaciones destacaría?

EL DOCENTE Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA
4. ¿Cuáles son los conocimientos y habilidades que un docente de matemáticas debe dominar para una adecuada enseñanza de la geometría? 5. ¿Cree usted que a sus estudiantes les gusta la geometría? ¿Piensa que les parece interesante? Explique su respuesta. 6. ¿Cree usted que la geometría que se enseña en la primaria es suficiente para desarrollar las temáticas de la secundaria? Explique su respuesta. 7. Indique las fortalezas que usted ha evidenciado usualmente en los estudiantes durante las clases de geometría. Mencione el grado(s) en los que las ha detectado 8. Indique las dificultades que usted ha evidenciado usualmente en los estudiantes durante las clases de geometría. Mencione el grado(s) en los que las ha detectado. 9. Teniendo en cuenta su práctica pedagógica, enumere tres habilidades que un estudiante potencie al trabajar la geometría. 10. Mencione tres recursos que faciliten al estudiante el aprendizaje de la geometría. Justifique su respuesta.

LA GEOMETRIA Y EL CURRICULO
11. En los lineamientos curriculares del área de matemáticas se establecen cinco pensamientos

[4] Adaptado del formato diseñado por Sergio Pérez y Gregoria Guillen (2007).

que conforman el currículo denominados conocimientos básicos.
Si tuviera limitaciones de tiempo para impartirlos todos, señale con un 1 el pensamiento que eliminaría en primer lugar, con un 2 el que eliminaría en segundo lugar, y finalmente con un 3 el que eliminaría en tercer lugar:[5]

(   ) Pensamiento numérico y sistemas numéricos
(   ) Pensamiento espacial y sistemas geométricos
(   ) Pensamiento métrico y sistemas de medida
(   ) Pensamiento aleatorio y sistemas de datos
(   ) Pensamiento variacional y sistemas algebraicos

12. ¿Enseña toda la Geometría que se contempla en el currículo?

SI ( )   NO ( )

Si su respuesta al ítem anterior ha sido NO, marque con una "x" la razón o razones por lo que no lo hace:
( ) Porque no me gusta
( ) Porque no la domino.
( ) Porque no hay materiales apropiados.
( ) Porque no la considero importante.
( ) Porque al tratar otros contenidos me quedo sin tiempo.
( ) Otras razones. Indique cuales.
____

[5] Adaptado del formato diseñado por Gregoria Guillen, Olimpia Figueras y Rosa María Corberán (2004)

Anexo 2. Cuestionario para estudiantes

INSTRUCCIONES:
El presente cuestionario forma parte de un estudio sobre el desarrollo del pensamiento geométrico. La encuesta es realizada por la docente Narelis Taharon, estudiante de maestría en Pedagogía de la Universidad de la Sabana.
La información que suministre contribuirá a comprender mejor los procesos de enseñanza – aprendizaje de la geometría en jóvenes como usted.
Esto no es una prueba. No hay respuestas correctas ni incorrectas. El hecho de que responda las preguntas no afectará a sus notas en esta clase.
Sírvase leer cada una de las preguntas. Responda describiendo claramente lo que se pregunta o marque la mejor respuesta a cada pregunta poniendo una (X) en la opción que considere correcta para usted.
Esperamos que el cuestionario le parezca interesante. Si tiene alguna duda, la docente le ayudará.
Muchas gracias por su ayuda.

1. ¿Qué le viene a la mente cuando escucha la palabra geometría?[6]
____
____
____
____
2. ¿Le gusta la geometría? ¿Le parece interesante? Explique su respuesta.
____
____
____
____
3. ¿Cree usted que la geometría tiene aplicaciones en su cotidianidad? ¿Qué aplicaciones destacaría de la geometría en la vida real?
____
____
____
____
4. ¿Cree usted que la geometría se relaciona con otras de las asignaturas que estudian en el colegio? Si su respuesta es SI, indique con que asignaturas se relaciona y de qué forma.
____
____
____
____
5. ¿Qué tema(s) de geometría se le han facilitado estudiar? ¿Por qué?
____
____
____
____

[6] Adaptado del formato diseñado por Sergio Pérez y Gregoria Guillen (2007).

6. ¿Qué tema(s) de geometría se le han dificultado estudiar? ¿Por qué?
   ____
   ____
   ____

7. ¿Cuánto tiempo del año escolar, ha visto usted que se ha destinado de la clase de matemáticas para temas específicos de geometría
   ( ) Una semana
   ( ) Un periodo
   ( ) Todos los periodos
   ( ) No se estudia geometría durante el año

8. ¿Qué material(es) le facilitan en trabajo en las clases de geometría?
   ( ) Guías de trabajo
   ( ) Audiovisuales y tecnológicos (Videos, Diapositivas, calculadoras, programas de computador, entre otros)
   ( ) Origami
   ( ) Juegos didácticos (tangram, cubos de soma, geoplano, entre otros)
   ( ) Reglas, compas

9. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) actividad(es) se le facilita en el estudio de la geometría?
   ( ) Identificar formas geométricas en objetos el entorno.
   ( ) Resolver problemas relacionados con temas de geometría.
   ( ) Poder deducir propiedades de objetos geométricos de información dada.
   ( ) Utilizar conceptos geométricos para representar situaciones de la cotidianidad

Anexo 3. Diario de Campo [7]

FECHA:

LUGAR:

GRUPO OBJETO DE OBSERVACIÓN:

TIEMPO:

OBSERVADOR:

ACTIVIDAD:

OBJETIVO:

Notas Descriptivas	Pre - categorías
Notas Interpretativa	**Notas Metodológicas**

[7] Adaptado del formato socializado por el Docente Carlos Barreto en el II Seminario de Investigación, Universidad de la Sabana (2015)

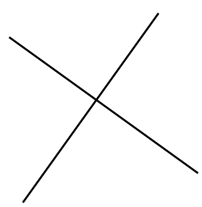
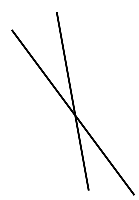
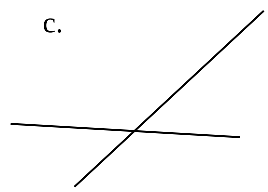
Anexo 4. Pretest-Pensamiento Geométrico

ACTIVIDAD 1[8]

OBJETIVO: Diagnosticar en qué nivel de Van Hiele se encuentran los estudiantes del grado 703 del Colegio Orlando Higuita Rojas JT

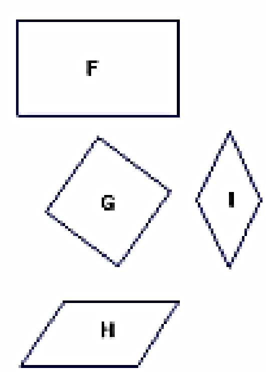
METODOLOGÍA
La prueba consta de una total de 8 preguntas; 5 de ellas de modalidad cerrada, por lo tanto deberás identificar la respuesta correcta y marcarla con una "X" Las otras 3 son preguntas abiertas, requieren de una definición o justificación elaborada de forma personal.

1. En los dibujos se señalan parejas rectas. ¿qué tienen en común todas ellas? ¿hay alguna particular? ¿cómo se llama esa relación?

a.  b.  c. 

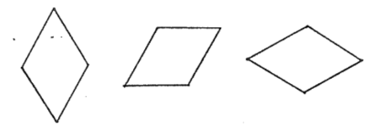
____
____
____
____

2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son cuadrados?
    a. Ninguno es un cuadrado.
    b. Sólo G.
    c. Sólo F y G.
    d. Sólo I y G.
    e. Todos son cuadrados.

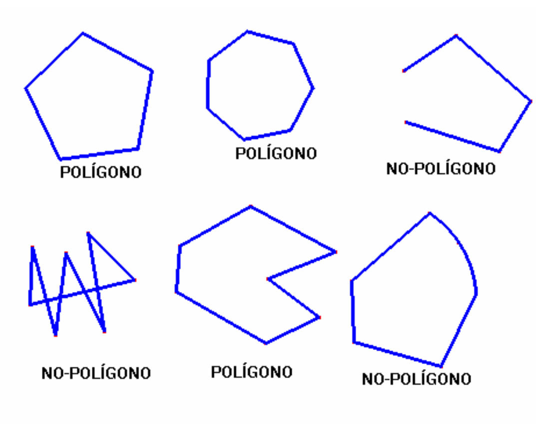


[8] Adaptado tomando como fuente el test de Zalman Usinskin (1986) y el trabajo de Fernando Fouz (2006)

3. Un rombo es una figura de cuatro lados de igual longitud (tres ejemplos se muestran a la derecha). ¿Cuál de las respuestas A-D no es cierta en un rombo?
    a. Las dos diagonales tienen la misma longitud.
    b. Cada diagonal es bisectriz de dos ángulos del rombo.
    c. Las dos diagonales son perpendiculares.
    d. Los ángulos opuestos tienen la misma medida.
    e. Todas las respuestas anteriores son ciertas en un rombo.



4. Según se describe en las imágenes de abajo. ¿Qué es un polígono?



Un Polígono es:

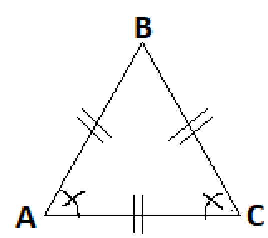
5. He aquí dos afirmaciones:

1a El triángulo "ABC" tiene tres lados iguales.

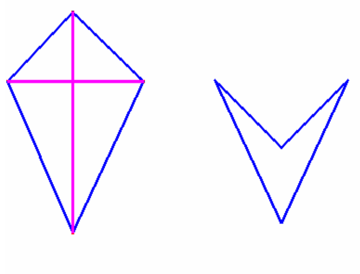
2a En el triángulo "ABC", los ángulos B y C tienen la misma medida.

¿Cuál es la respuesta correcta?

a. Las afirmaciones 1a y 2a no pueden ser ciertas a la vez.
b. Si la 1a es cierta, entonces la 2a es cierta.
c. Si la 2a es cierta, entonces la 1a es cierta.
d. Si la 1a es falsa, entonces la 2a es falsa.
e. Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.



6. Las figuras de abajo se llaman “COMETAS". Escribe una definición de ¿Qué es una cometa?



Un cometa es:
____
____
____
____
____
____
____

7. Si trazamos la diagonal de un cuadrado ... ¿qué afirmación NO ES CIERTA?
    a. Lo divido en dos triángulos iguales.
    b. Lo divido en dos triángulos isósceles.
    c. Lo divido en dos triángulos rectángulos.
    d. Lo divido en dos triángulos de igual área.
    e. Alguna de las anteriores respuestas tiene que ser falsa.

8. Si trazamos la diagonal de un rectángulo cualquiera ... ¿qué afirmación NO ES CIERTA?
    a. Lo dividimos en dos triángulos iguales.
    b. Lo dividimos en dos triángulos isósceles.
    c. Lo dividimos en dos triángulos rectángulos.
    d. Lo dividimos en dos triángulos de igual área.
    e. Una de las anteriores respuestas es falsa ...

Anexo 5. Pretest-pensamiento geométrico

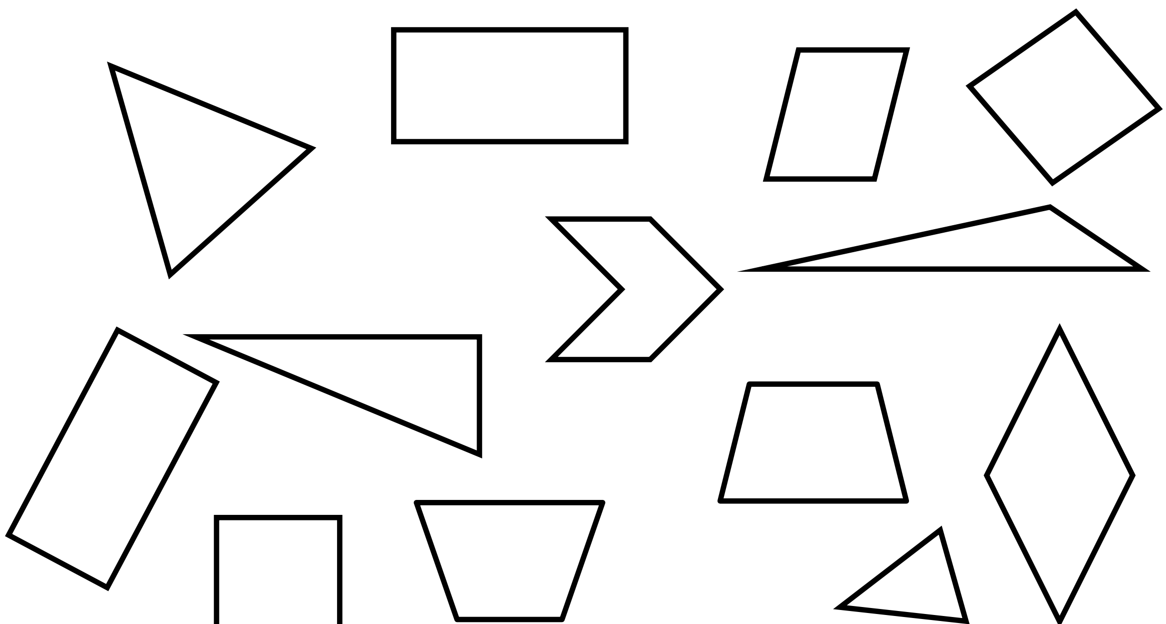
ACTIVIDAD 2[9]

OBJETIVO: Diagnosticar en qué nivel de Van Hiele se encuentran los estudiantes del grado 703 del Colegio Orlando Higuita Rojas JT

METODOLOGÍA

Realiza las actividades propuestas y responde las preguntas, teniendo en cuenta tus observaciones y apreciaciones.

1. Recorta las siguientes figuras y organízalas según el criterio que consideres más importante.



¿Cuál fue el criterio que escogiste para realizar la clasificación?

____

____

¿Por qué lo consideraste importante?

____

____

[9] Teniendo en cuenta lo expuesto por Fernando Fouz (2006), en el documento Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría, donde cita las conclusiones del trabajo realizado por M. Crowley (1987) referido al estudio de cuadriláteros y triángulos.

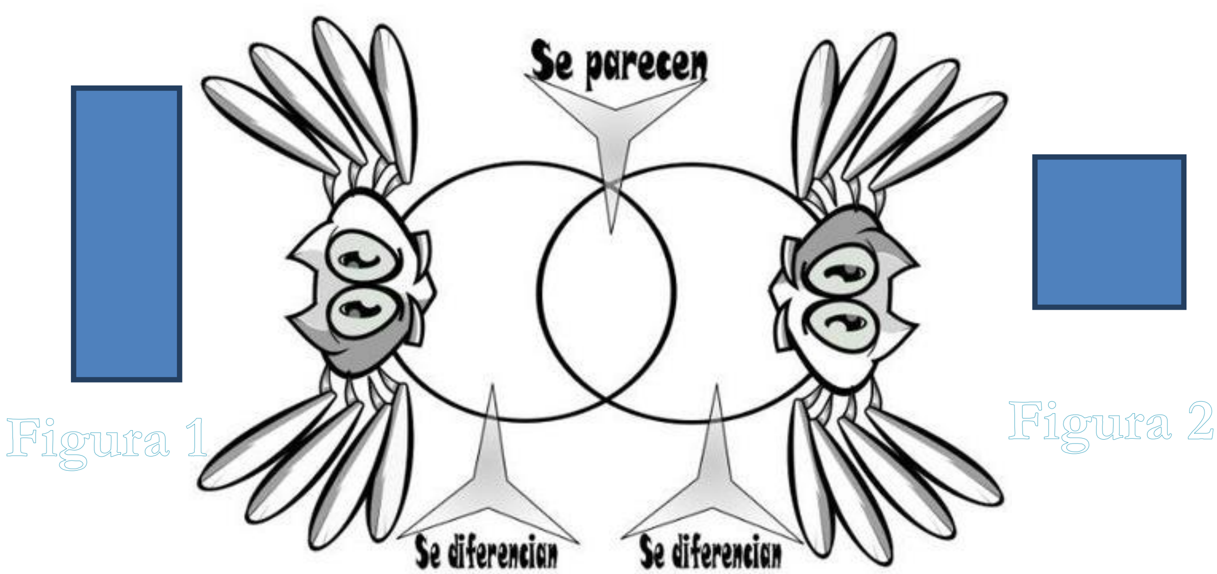
2. Señala con plumones de colores en cada una de las figuras recortadas: sus lados, ángulos y vértices. Escoge tres de ellas y realiza su descripción (ten en cuenta incluir cuantos lados, vértices y ángulos tiene)

FIGURA 1	***Descripción:*** ______ ______ ______

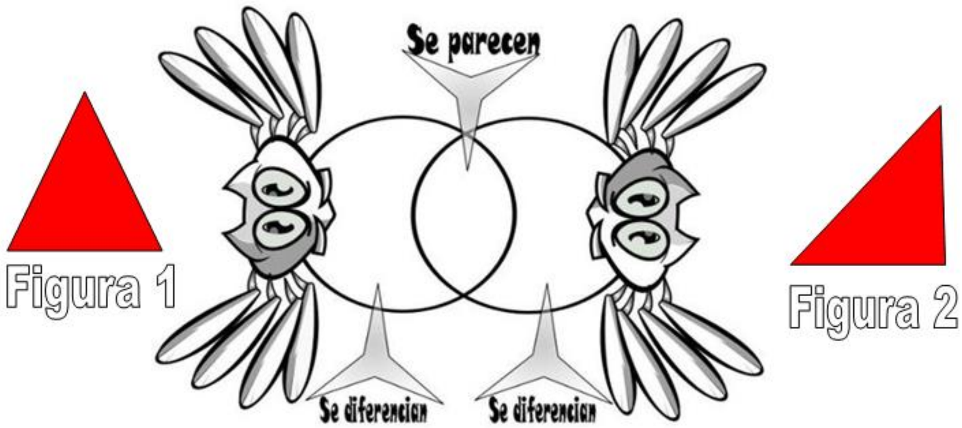
FIGURA 2	***Descripción:*** ______ ______ ______

FIGURA 3	***Descripción:*** ______ ______ ______

3. Observa atentamente las siguientes figuras y completa los diagramas de la rutina compara y contrasta[10]



[10] El diagrama fue tomado de Real (2003).



1. Escoge dos triángulos, recorta sus ángulos, júntalos y pégalos de tal manera que no queden sobrepuestos.

Pega aquí tú trabajo

¿Qué puedes concluir?

____

____

2. Escoge dos cuadriláteros, recorta sus ángulos, júntalos y pégalos de tal manera que no queden sobrepuestos.

Pega aquí tú trabajo

¿Qué puedes concluir?

____

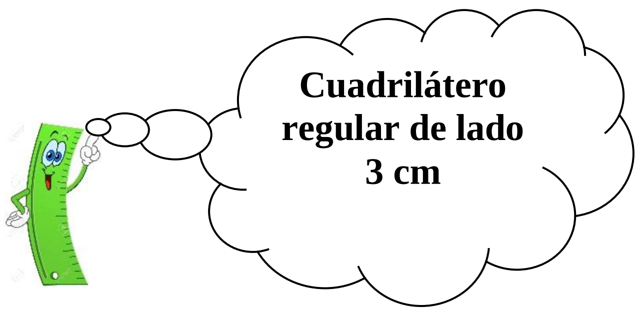
____

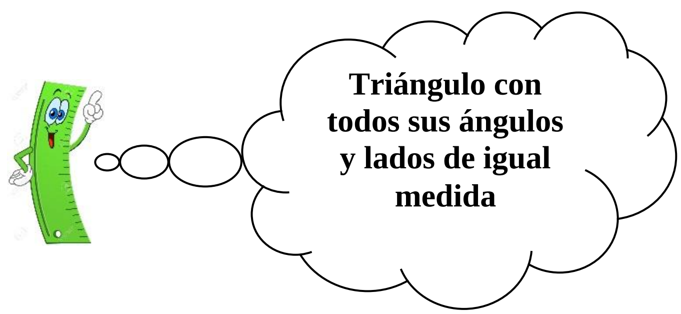
3. Utiliza símbolos matemáticos (números, signos de operación: +, -, x, ÷ y/o relación: =, ≠,>,< , ≤, ≥ para escribir las conclusiones anteriores)

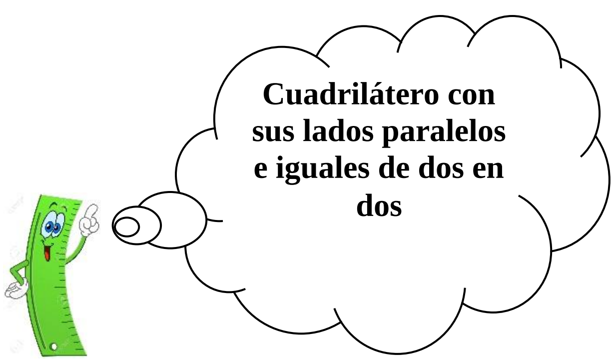
Conclusión 1

Conclusión 2

7. Utiliza los recursos que consideres necesarios para realizar las siguientes construcciones:







Anexo 7. Matriz de Respuestas Actividad de diagnóstico 1 - Pregunta 1

Tabla 14. Matriz de Respuestas actividad de diagnóstico – pregunta 1: Relación entre rectas

Agrupación de unidades de análisis	Proposición	Interpretación
c - 56 - e1 c - 60 - e5 c - 61 - e6 c - 62 - e7 c - 65 - e10 c - 67 - e12 c - 68 - e13 c - 70 - e15 c - 74 - e19 c - 75 - e20 c - 79 - e24 c - 80 - e25 c - 81 - e26 c - 82 - e27 c - 85 - e30 c - 86 - e31 c - 87 - e32 c - 90 - e 35 c - 92 - e 37	Todas las relaciones se cruzan en un punto, no sé si hay alguna particular.	Los estudiantes visualmente identifican que las rectas tienen un punto de corte, sin embargo carecen elementos conceptuales sobre las relaciones entre rectas, por lo que no reconocen particularidades en las parejas de rectas propuestas.
c - 57 - e2 c - 58 - e3	Son intercesiones y las tres tienen la forma de una equis.	Visualmente identifican que las rectas tienen un punto de corte y relacionan las representaciones con un elemento conocido, la letra "x". No cuentan con elementos conceptuales que le permitan establecer una relación entre rectas.
c - 59 - e4	Tienen intersecciones con rectas y forman ángulos, creo que se llaman rectas paralelas	Visualmente identifica que las parejas de rectas tienen un punto de corte y conceptualmente llama a esta relación entre rectas paralelas
c - 63 - e8 c - 64 - e9 c - 66 - e11 c - 69 - e14 c - 71 - e16 c - 72 - e17 c - 73 - e 18 c - 76 - e21 c - 77 - e 22 c - 78 - e23 c - 83 - e28 c - 88 - e33 c - 88 - e36	Todas las relaciones se cruzan en un punto, la primera relación tiene forma de equis.	Visualmente identifican que las rectas tienen un punto de corte y relacionan la primera pareja con un elemento conocido, la letra "x"
c - 84 - e29	Todas las relaciones se cruzan, la relación uno son rectas perpendiculares	Visualmente identifica que las parejas de rectas tienen un punto de corte y conceptualmente identifican la relación de perpendicularidad entre una pareja
c - 89 - e34	Al unirse se dividen en cuatro segmentos, tienen forma de equis	Visualmente se nota que al unirse las dos rectas se dividen a su vez en cuatro semirrectas, relacionan las representaciones con un símbolo conocido, la letra "x"
c - 93 – 38	No hay diferencias entre ellas, no se hay alguna relación en particular	Visualmente el estudiante no identifica relaciones entre rectas, carece de elementos conceptuales para contestarla pregunta.

Nota. Fuente Elaboración propia

Anexo 8. Matriz de Respuestas Actividad de diagnóstico 1 - Pregunta 4

Tabla 15. Respuesta Actividad de diagnóstico 1 - Pregunta 4: definición de polígono

Agrupación de unidades de análisis	Proposición	Interpretación
c - 56 - e1 c - 57 - e2 c - 58 - e3 c - 60 - e5 c - 67 - e12 c - 68 - e13 c - 69 - e14 c - 77 - e 22 c - 82 - e27 c - 83 - e28 c - 84 - e29 c - 85 - e30 c - 89 - e34 c - 90 - e 35 c - 92 - e 37 c - 93 – 38	Figura de lados rectos y está cerrada	Visualmente se identifican características que hacen parte del concepto de polígono.
c - 59 - e4 c - 74 - e19	Son figuras cerradas con más de dos lados, tienen vértices y ángulos.	Se identifican características que hacen parte del concepto de polígono y se nombran algunos de sus elementos.
c - 61 - e6 c - 63 - e8 c - 64 - e9 c - 65 - e10 c - 79 - e24 c - 88 - e33 c - 88 - e36	Una figura de más de cinco lados de igual tamaño	Visualmente se identifica que los polígonos tienen más de cinco lado y se afirma que estos deben ser de igual tamaño.
c - 66 - e11 c - 81 - e26 c - 87 - e32	Es una figura de tres o más lados, tienen vértices y ángulos. Sus lados son rectos y cerrados.	Se realiza una descripción visual de los elementos y características que permiten construir el concepto de polígono.
c - 62 - e7 c - 70 - e15 c - 72 - e17 c - 73 - e 18 c - 75 - e20 c - 78 - e23	Es una figura de cinco o más lados rectos y cerrados.	Se hace una descripción de los que se observa con relación a los ejemplos propuestos.
c - 71 - e16 c - 76 - e21 c - 80 - e25 c - 86 - e31	son figuras con más de cinco lados de diferentes medidas	Visualmente se identifica que los polígonos tienen más de cinco lado y se afirma que estos deben ser de diferente tamaño.

Nota. Fuente Elaboración Propia

Anexo 9. Matriz de Respuestas Actividad de diagnóstico 1 - Pregunta 6

Tabla 16. Respuestas Actividad de diagnóstico 1 - Pregunta 6: Definición de cometa

Agrupación de unidades de análisis	Proposición	Interpretación
c - 57 - e2	Figura geométrica de más cuatro lados o de varios lados	Un cometa se percibe como una figura de más de cuatro lados. Es posible que se tenga en cuenta las diagonales trazadas en algunas de las figuras que se muestran como ejemplo.
c - 64 - e9		
c - 56 - e1	Es una objeto diseñado para volar	Un cometa se describe por el preconcepto del objeto cometa que conocen los estudiantes, más que por lo que observan en los ejemplos.
c - 58 - e3		
c - 63 - e8		
c - 67 - e12		
c - 69 - e14		
c - 82 - e27		
c - 92 - e 37		
c - 59 - e4	Es una figura de cuatro lados con distintas medidas.	Describen la figura de acuerdo a la representación visual, además añaden un elemento para su descripción, geométricamente valido como la medida de sus lados.
c - 62 - e7		
c - 72 - e17		
c - 73 - e 18		
c - 76 - e21		
c - 81 - e26		
c - 83 - e28		
c - 84 - e29		
c - 85 - e30		
c - 86 - e31		
c - 87 - e32		
c - 60 - e5	Una figura de cuatro lados parecida al rombo.	Visualmente identifican que las figuras de los ejemplos están constituidas por cuatro segmentos, sin embargo las relacionan con el rombo, lo que desconocen las propiedades de este último polígono.
c - 61 - e6		
c - 75 - e20		
c - 88 - e33		
c - 90 - e 35		
c - 88 - e36		
c - 93 - 38		
c - 65 - e10	Es una figura de cuatro lados son iguales	Describen la figura refiriéndose a una característica visual (número de lados). Por otra parte afirman que son de igual medida, sin embargo no justifican con argumentos su respuesta.
c - 70 - e15		
c - 78 - e23		
c - 79 - e24		

Nota. Fuente Elaboración Propia

Anexo 10. Matriz de Respuestas diagnóstico 2 – Actividad 1

Tabla 17. Respuesta diagnóstico 2 – Actividad 1: Clasificación de polígonos

Agrupación de unidades de análisis	Proposición	Interpretación
c - 101 - e 36	El tamaño: grandes y pequeñas.	El criterio de organización de las figuras es el tamaño, identifican los grupos: grandes y pequeñas o grandes, medianas y pequeñas.
c -103 - e 28		
c - 105 - e 16		
c - 106 - e 23		
c - 107 - e 30		
c - 107 - e 20		
c - 108- e 24		
c - 109 - e 38		
c - 110 - e 11		
c - 104 - e 18	El tamaño: grandes, medianas y pequeñas.	
c - 99 - e 39	Número de lados: cuadriláteros, triángulos y hexágonos	El criterio de organización de las figuras es el número de lados, se identifican 3 grupos: 3 lados (triángulos), 4 lados (cuadriláteros) y más de 4 lados (hexágono)
c - 111 - e 10		
c - 113 - e 07		
c -114 - e 35		
c - 118 - e 26		
c - 120- e 04		
c - 115 - e 33		
c - 116 - e 34		
c -117 - e 12	Número de lados: 3 lados, 4 lados y más de 4 lados	
c - 119 - e 41		
c - 121 - e 25		
c - 122 - e 05		
c - 123 - e 37		
c - 124 - e 27		
c - 127 - e 21		
c - 128- e 03		
c - 131 - e 29		
c -125 - e 15	Número de lados: 3 lados y 4 o más lados	
c - 95 - e 13	Forma: trapecios, rectángulos, triángulos, hexágono, cuadrado, rombos - romboide	El criterio de organización de las figuras es clase o forma, se identifican 6 grupos: trapecios, rectángulos, triángulos, hexágono, cuadrado, rombos – romboide
c - 98 - e 14		
c - 96 - e 17		
c - 97 - e 09	Clases de figuras: trapecios, rectángulos, triángulos, hexágono, cuadrado, rombos - romboide	
c - 126 - e 19		
c - 113 - e 02	Apariencia: triángulos - rombo, trapecio - cuadrados - romboide - rombo, rectángulos	El criterio de organización de las figuras es la similitud o apariencia, se identifican 3 grupos: triángulos - rombo, trapecio - cuadrados - romboide - rombo, rectángulos
c - 100 - e 08	Igualdad: parejas de figuras iguales y las restantes que no tiene parejas	El criterio de organización de las figuras es la igualdad, se identifican 2 grupos: las parejas de figuras que son congruentes y las que no lo son
c - 130 - e 40		
c - 102 - e 01	La clasificación: cuadrados, puntiagudos y rectángulos	No se define un criterio, se identifican 3 grupos: cuadrados (cuadrados - trapecios - romboide), puntiagudos (triángulos - rombos) y rectángulos.
c - 94 - e 32	Color	Sin tener en cuenta las características de las figuras se dividen en dos subconjuntos y se coloren de verde y violeta.

Nota. Fuente Elaboración propia

Anexo 11. Matriz de Respuestas diagnóstico 2 - Actividad 2

Tabla 18. Respuestas diagnóstico 2 - Actividad 2: Descripción de polígonos

Registro	Agrupación de unidades de análisis	Proposición para describir el registro
CUADRADO	c99 - e39	Figura con 4 lados iguales.
	c127 - e19	
	c96 - e17	
	c131 - e 24	
	c 94 - e32	Figura que tiene 4 lados.
	c103 - e28	
	c106 - e23	
	c114 - e07	
	c112 - e10	Figura que tiene 4 lados y 4 ángulos iguales.
	c126 - e15	
	c105 - e16	Figura que tiene 4 lados y 4 vértices
	c107 - e30	
	c109 - e24	
	c118 - e12	
	c123 - e05	
	c124 - e37	
	c125 - e27	
	c111 - e11	Figura con 4 lados iguales, 4 vértices y 4 ángulos.
	c119 - e26	
	c100 - e08	
HEXÁGONO IRREGULAR CONVEXO	c98 - e14	Figura de 6 lados.
	c129 - e03	
	c130 - e40	
	c97 - e09	Es una figura diferente, de varios lados
	c110 - e38	
	c114 - e07	
	c120 - e41	Tiene 6 lados de diferente medida
	c128 - e21	
	c102 - e01	Es una figura de 6 lados y 3 vértices
	c109 - e24	
	c104 - e18	Es una figura 6 lados y 6 vértices
	c113 - e02	
	c116 - e33	Es una figura que tiene 6 lados, 6 vértices y 6 ángulos
	c125 - e27	
	c122 - e25	Un polígono de 6 lados de diferente medida.
RECTANGULO	c97 - e09	Un figura que tiene 4 lados.
	c98 - e14	
	c101 - e36	
	c102 - e01	
	c103 - e28	
	c104 - e18	Es una figura que tiene 4 lados y 4 vértices.
	c107 - e30	
	c108 - e20	
	c109 - e24	
	c110 - e38	
	c113 - e02	
	c118 - e12	

	c124 - e37	tiene 4 lados y los lados que están frente a frente son de igual medida
	c99 - e39	
	c120 - e41	
	c127 - e19	
	c123 - e05	
	c126 - e15	
	c121 - e04	Una figura que tiene 4 lados, 4 vértices y 4 ángulos
	c117 - e34	
	c119 - e26	No responde
ROMBO	c95 - e13	Figura de 4 lados
	c96 - e17	
	c101 - e36	
	c112 - e10	
	c122 - e25	Figura que tiene 4 lados de igual medida
	c127 - e19	
	c131 - e 24	
	c128 - e21	Figura con 4 lados de diferente medida
TRAPECIO ISÓSCELES	c116 - e33	Figura que tiene 4 vértices y 4 lados
	c117 - e34	
	c100 - e08	No responde
	c121 - e04	
	c97 - e09	Figura de 4 lados
	c129 - e03	
	c95 - e13	Tienen 4 lados, 2 de ellos de la misma medida y los otros dos de diferente medida, el lado de arriba más corto y el de abajo más largo
	c111 - e11	
	c126 - e15	
	c130 - e40	
	c102 - e01	Figura que tiene 4 vértices y 4 lados
	c104 - e18	
	c105 - e16	
	c108 - e20	
	c110 - e38	
	c113 - e02	
TRIÁNGULO EQUILÁTERO	c114 - e07	Figura de 3 lados
	c125 - e27	
	c120 - e41	Figura que tiene tres lados de igual medida
	c122 - e25	
	c131 - e 24	
	c105 - e16	Figura con 3 lados y 3 vértices
	c107 - e30	
	c118 - e12	
	c124 - e37	
	c116- e34	Es un polígono que está compuesto por 3 ángulos, 3 vértices y 3 lados de igual medida
	c119 - e26	
TRIÁNGULO ACUTÁNGULO ISÓSCELES	c121 - e04	No responde
	c95 - e13	Es un polígono que tiene 3 lados
	c98 - e14	
	c106 - e23	
	c111 - e11	
	c115 - e35	
	c130 - e40	
	c99 - e39	Es una figura con 3 lados, 2 iguales y 1 diferente
	c103 - e28	
	c112 - e10	
	c123 - e05	
	c101 - e36	Es un polígono que tiene 3 lados de igual medida

TRIÁNGULO RECTÁNGULO ESCALENO	c128 - e21	Es una figura con 3 lados y 3 vértices
	c108 - e20	
	c117 - e34	Tiene 3 lados iguales y 3 vértices
	c110 - e38	Es un triángulo torcido
	c115 - e35	3 lados y parece la mitad de un cuadrado
	c106 - e23	
	c94 - e32	
	c96 - e17	Parece un triángulo porque tiene 3 lados pero es diferente a los que había visto
TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO ESCALENO	c115 - e35	Una figura que tiene 3 lados
	c129 - e03	
	c95 - e13	Es un triángulo alargado horizontalmente

Fuente. Elaboración propia

Anexo 12. Matriz de Respuestas diagnóstico 2 - Actividad 3

Tabla 19. Respuestas diagnóstico 2, Actividad 3: Diferencias Rectángulo – Cuadrado

Agrupación de unidades de análisis	Proposición para describir el registro
c93 - 13	El rectángulo es más largo que el cuadrado y el cuadrado es más corto que el rectángulo
c98 - e14	
c99 - e39	
c102 - e01	
c103 - e28	
c104 - e18	
c107 - e30	
c109 - e24	
c111 - e11	
c114 - e07	
c117 - e34	
c112 - e10	
c127 - e19	
c129 - e03	
c131 - e 24	
c124 - e37	
c116 - e33	
c125 - e27	El rectángulo es delgado y cuadrado es ancho.
c115 - e35	
c130 - e40	
c94 - e32	
c106 - e23	
c112 - e10	
c96 - e17	La diferencia es el tamaño, el rectángulo es grande y el cuadrado es pequeño
c108 - e20	
c119 - e26	
c97 - e09	La diferencia es la medida de sus lados, el rectángulo tiene sus lados de diferente medida y el cuadrado tiene sus lados de igual medida
c101 - e36	
c105 - e16	
c110 - e38	
c119 - e26	
c126 - e15	
c120 - e41	
c123 - e05	
c113 - e02	No responde
c100 - e08	
c121 - e04	
c128 - e21	

Fuente. Elaboración propia

Anexo 13. Matriz de Respuestas Diagnóstico 2 – Actividad 3

Tabla 20. Respuestas diagnóstico 2, actividad 3: Diferencias triángulo isósceles acutángulo y triángulo isósceles rectángulo

Agrupación de unidades de análisis	Proposición para describir el registro
c94 - e32	El Triángulo Isósceles Acutángulo es completo o normal y el triángulo Isósceles Rectángulo parece triángulo porque tiene tres lados pero es una figura diferente
c95 - e13	
c96 - e17	
c98 - e14	
c101 - e36	
c103 - e28	
c105 - e16	
c114 - e07	
c115 - e35	
c129 - e03	
c130 - e40	
c97 - e09	El Triángulo Isósceles Acutángulo es más alto y largo y el triángulo Isósceles Rectángulo más corto y está de lado
c104 - e18	
c106 - e23	
c108 - e20	
c111 - e11	
c99 - e39	El Triángulo Isósceles Acutángulo tiene dos lados largos y uno corto y el triángulo Isósceles Rectángulo dos lados cortos y uno largo
c102 - e01	
c119 - e26	
c120 - e41	
c125 - e27	
c126 - e15	
c127 - e19	
c131 - e 24	
c100 - e08	No responde
c107 - e30	
c118 - e12	
c124 - e37	
c109 - e24	
c110 - e38	
c121 - e04	
c128 - e21	
c112 - e10	
c113 - e02	
c122 - e25	
c116 - e33	
c117 - e34	
c123 - e05	

Fuente. Elaboración propia

Anexo 14. Matriz de Respuestas Diagnóstico 2 – Actividad 4

Tabla 21. Respuestas diagnóstico 2, actividad 4: suma de los ángulos internos de un triángulo

Agrupación de unidades de análisis	Proposición para describir el registro
c107 - e30	Al unir los ángulos se forma media circunferencia
c111 - e11	
c125 - e27	
c94 - e32	Al juntar los ángulos se forma medio círculo o un semicírculo
c96 - e17	
c97 - e09	
c98 - e14	
c110 - e38	
c111 - e11	
c119 - e26	
c120 - e41	
c128 - e21	
c131 - e 24	
c99 - e39	No responde
c100 - e08	
c102 - e01	
c103 - e28	
c104 - e18	
c106 - e23	
c108 - e20	
c112 - e10	
c112 - e10	
c115 - e35	
c116 - e33	
c117 - e34	
c118 - e12	
c121 - e04	
c122 - e25	
c123 - e05	
c124 - e37	
c126 - e15	
c129 - e03	
c130 - e40	
c105 - e16	Se forma medio óvalo
c109 - e24	
c127 - e19	
c95 - e13	Al unir los ángulos se forma una figura que parece una montaña
c114 - e07	

Fuente. Elaboración propia

Anexo 15. Matriz de Respuestas Diagnóstico 2 – Actividad 5

Tabla 22. Respuestas diagnóstico 2, actividad 5: suma de los ángulos internos de un cuadrilátero

Agrupación de unidades de análisis	Proposición para describir el registro
c99 - e39	No responde
c100 - e08	
c102 - e01	
c103 - e28	
c104 - e18	
c108 - e20	
c110 - e38	
c112 - e10	
c113 - e02	
c115 - e35	
c116 - e33	
c117 - e34	
c118 - e12	
c121 - e04	
c122 - e25	
c123 - e05	
c124 - e37	
c126 - e15	
c129 - e03	
c130 - e40	
c97 - e09	Al unir los ángulos se forma un círculo
c98 - e14	
c101 - e36	
c109 - e24	
c111 - e11	
c119 - e26	
c120 - e41	
c128 - e21	
c131 - e 24	
c94 - e32	Al unir los ángulos se forma una circunferencia
c96 - e17	
c107 - e30	
c114 - e07	
c125 - e27	
c95 - e13	Al unir los ángulos se forma un óvalo
c105 - e16	
c106 - e23	
c127 - e19	

Fuente. Elaboración propia

Anexo 16. Matriz de Respuestas Diagnóstico 2 – Actividad 7

Tabla 23. Respuestas diagnóstico 2, Actividad 7: Registro gráfico polígono 1

Agrupación de unidades de análisis	Proposición para describir el registro
c101 - e36	Dibuja un triángulo obtusángulo y señala correctamente el ángulo obtuso escribiendo su medida
c106 - e23	
c111 - e11	
c115 - e35	
c116 - e33	
c117 - e34	
c118 - e12	
c120 - e41	
c124 - e37	
c131 - e 24	
c99 - e39	Dibuja un triángulo acutángulo isósceles y señala que la medida de sus ángulos es un valor entre 90° y 180°
c110 - e38	
c119 - e26	
c128 - e21	
c130 - e40	
c97 - e09	
c98 - e14	
c114 - e07	
c95 - e13	Dibuja un triángulo rectángulo isósceles
c94 - e32	No responde
c96 - e17	
c100 - e08	
c102 - e01	
c103 - e28	
c104 - e18	
c105 - e16	
c107 - e30	
c108 - e20	
c109 - e24	
c112 - e10	
c113 - e02	
c121 - e04	
c122 - e25	
c123 - e05	
c125 - e27	
c126 - e15	
c127 - e19	
c129 - e03	

Fuente. Elaboración propia

Anexo 17. Matriz de Respuestas Diagnóstico 2 – Actividad 7

Tabla 24. Respuestas diagnóstico 2, Actividad 7: Registro gráfico polígono 2

Agrupación de unidades de análisis	Proposición para describir el registro
c94 - e32	Dibuja un cuadrado de lado 3 cm
c96 - e17	
c101 - e36	
c105 - e16	
c106 - e23	
c107 - e30	
c115 - e35	
c116 - e33	
c117 - e34	
c118 - e12	
c120 - e41	
c124 - e37	
c125 - e27	
c127 - e19	
c131 - e 24	
c99 - e39	Dibuja un cuadrilátero irregular convexo y señala que uno de sus lados mide 3 cm
c100 - e08	
c97 - e09	Dibuja un romboide y señala que uno de sus lados mide 3cm
c98 - e14	
c110 - e38	
c114 - e07	
c119 - e26	
c122 - e25	
c130 - e40	
c111 - e11	Dibuja un rectángulo y señala que uno de sus lados mide 3 cm
c95 - e13	Dibuja un trapecio isósceles y señala que la base menor mide 3 cm
c102 - e01	No responde
c103 - e28	
c104 - e18	
c108 - e20	
c109 - e24	
c112 - e10	
c113 - e02	
c121 - e04	
c123 - e05	
c126 - e15	
c129 - e03	

Fuente. Elaboración propia

Anexo 18. Matriz de Respuestas Diagnóstico 2 – Actividad 7

Tabla 25. Respuestas diagnóstico 2, Actividad 7: Registro gráfico polígono 3

Agrupación de unidades de análisis	Proposición para describir el registro
c96 - e17	No responde
c97 - e09	
c98 - e14	
c99 - e39	
c102 - e01	
c103 - e28	
c104 - e18	
c107 - e30	
c108 - e20	
c109 - e24	
c110 - e38	
c112 - e10	
c113 - e02	
c121 - e04	
c123 - e05	
c126 - e15	
c129 - e03	
c94 - e32	Dibuja un triángulo equilátero. Las medidas de los lados varían entre los 2 y 4 cm. No realiza medición de ángulos.
c100 - e08	
c101 - e36	
c105 - e16	
c116 - e33	
c125 - e27	
c127 - e19	
c131 - e 24	
c130 - e40	
c95 - e13	Dibuja un triángulo isósceles acutángulo. Las medidas de los lados iguales varían entre los 2 y 4 cm. No realiza medición de ángulos
c106 - e23	
c111 - e11	
c114 - e07	
c115 - e35	
c117 - e34	
c118 - e12	
c119 - e26	
c120 - e41	
c122 - e25	
c124 - e37	
c128 - e21	

Fuente. Elaboración Propia

Anexo 19. Matriz de Respuestas Diagnóstico 2 – Actividad 7

Tabla 26. Respuestas diagnóstico 2, Actividad 7: Registro gráfico polígono 4

Agrupación de unidades de análisis	Proposición para describir el registro
c105 - e16	Dibuja un rectángulo
c111 - e11	
c115 - e35	
c116 - e33	
c117 - e34	
c130 - e40	
c131 - e 24	
c95 - e13	Dibuja un cuadrado
c97 - e09	
c99 - e39	
c101 - e36	
c106 - e23	
c110 - e38	
c114 - e07	
c118 - e12	
c119 - e26	
c120 - e41	
c122 - e25	
c124 - e37	
c128 - e21	
c94 - e32	No responde
c96 - e17	
c100 - e08	
c102 - e01	
c103 - e28	
c104 - e18	
c107 - e30	
c108 - e20	
c109 - e24	
c112 - e10	
c113 - e02	
c121 - e04	
c123 - e05	
c125 - e27	
c126 - e15	
c127 - e19	
c129 - e03	

Fuente. Elaboración propia

Anexo 20. Rutina de Pensamiento Veo – Pienso – Me pregunto

¿Qué es lo que observas?[11]

¿Qué es lo que piensas que significa?

¿Qué te preguntas?

Veo	Pienso	Me Pregunto

[11] Formato tomado de Gómez M. (2014).

Anexo 21. Consentimiento informado

Bogotá, ________________________.

Yo____, identificado(a) con la cédula de ciudadanía No ______________________de ___________________, en calidad de padre, madre y/o acudiente del (la) estudiante ____ del curso ________sede _____ del Colegio Orlando Higuita Rojas IED; autorizo de forma consiente y voluntaria a mi representado participar en el desarrollo del proyecto de investigación realizado por la docente Narelis Taharón Ahumada en el curso de la Maestría en Pedagogía de la Universidad de la Sabana.

En este proceso se recogerán datos gráficos y escritos, experiencias orales, se aplicarán guías y se tomarán fotografías y videograbaciones, información que servirá para la realización de material pedagógico, de uso exclusivamente académico, la cual podrá ser divulgada en medios impresos y/o electrónicos. En todos los casos, se tratará la información de manera confidencial y no se usará para otros propósitos fuera de la investigación.

Firma: ______________________________________

C.C: ____