REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE LA PARÁBOLA UTILIZADAS POR LOS ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO

CARLOS YEZID BELTRÁN RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

DICIEMBRE DE 2016

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE LA PARÁBOLA UTILIZADAS POR LOS ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO

CARLOS YEZID BELTRÁN RODRÍGUEZ

ASESOR

JULIÁN RICARDO GÓMEZ NIÑO

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

DICIEMBRE DE 2016

DEDICATORIA

ESTA TESIS SE LA DEDICO A MI ESPOSA E HIJOS, POR SU APOYO, COMPRESIÓN Y AMOR
A MIS PADRES POR SU DEDICACIÓN Y AMOR
A MIS HERMANAS POR SU COLABORACIÓN

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios por darme la vida,
A mi esposa por su amor, dedicación, compresión y apoyo,
A mis hijos por ser pacientes y estar siempre a mi lado,
A mi asesor, el profesor Julián Ricardo Gómez por compartir su conocimiento, por su apoyo, paciencia y dedicación,
A la universidad y al programa de maestría por su aporte en mi formación como persona y como maestro,
Al colegio Alejandro Obregón por la participación en este proceso de formación.

Tabla de contenido

Índice de tablas y figuras

RESUMEN

Esta investigación fue llevada a cabo en el Colegio Alejandro Obregón IED con la participación de estudiantes de grado décimo. El estudio surge al observar el bajo rendimiento académico presentado por los estudiantes en las pruebas internas y externas aplicadas para el área de matemáticas, especialmente, en situaciones problema que involucran el pensamiento métrico geométrico implícito en el concepto de parábola. Algunos estudios realizados sobre la enseñanza de la parábola (López y Bermúdez, 2012; Lara, 2016; Tocto 2016) identifican dificultades en los estudiantes para comprender la definición de parábola, describir los elementos que la caracterizan (vértice, foco, directriz, lado recto, etc.), y reconocer sus diferentes representaciones. Dado que para Duval (2004) comprender un concepto, noción o procedimiento matemático requiere reconocer los diferentes registros de representación del mismo, realizar transformaciones y coordinar diferentes registros de representación, se propone para atender a dichas dificultades, una intervención pedagógica basada en la teoría de registros de representación semiótica que ayuda a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de décimo gado del colegio Alejandro Obregón.

PALABRAS CLAVES: Experiencia pedagógica, proceso de aprendizaje, didáctica, intervención, enseñanza secundaria, progreso escolar.

ABSTRACT

This study was carried out at Alejandro Obregon IED School with the participation of tenth grade students. The investigation was born when observing the low academic performance of students in internal and external examinations applied by the mathematics department especially in exercises that involve metric and geometrical thinking implicit in the concept of parabola. Some studies done about parabola teaching recognized the difficulties in the process of understanding and learning the basics as: the definition of parabola as a geometric locus, description of parabola elements, and recognition of parabola characteristics, is proposed to address these difficulties, a pedagogical intervention based on the theory of registers of semiotic representation that helps to improve the understanding of the mathematical parable object in the students of tenth cattle of the school Alejandro Obregón.

To deal with the diagnosed difficulties this study proposes to describe the necessary representations to address some of the problematic situations related to the study of parabola and additionally describe the treatments and conversions that students use in relation to the parabola.

KEY WORDS: Pedagogical experience, learning process, didactics, intervention, secondary education, school progress.

Introducción

Esta investigación se llevó a cabo con estudiantes de grado décimo del Colegio Alejandro Obregón IED, y surge al observar el bajo rendimiento en el área de matemáticas, el cual se evidencia específicamente en los resultados de las pruebas externas (SABER noveno y SABER once), al igual que en las pruebas internas realizadas en clase y enfocadas al estudio de las secciones cónicas y situaciones problema relacionas con el concepto de parábola. López y Bermúdez (2012) encuentran dificultades en el aprendizaje de la parábola cuando se les pide a los jóvenes que definan la parábola como lugar geométrico, que describan sus elementos, o enumeren las características de este objeto matemático.

Para atender a estas y otras dificultades encontradas en el estudio de la parábola se propone realizar una intervención pedagógica basada en la teoría de registros de representación semiótica para mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de décimo gado del colegio Alejandro Obregón. Esto se sustenta a partir de lo afirmado por Duval (2004) donde para comprender un concepto, noción o procedimiento matemático se requiere reconocer los diferentes registros de representación del mismo objeto a estudiar.

La importancia de utilizar la teoría de representación semiótica reside en que permite la comunicación de las representaciones mentales que tiene una persona sobre un determinado objeto, esto es poder exteriorizar sus pensamientos y hacerlos accesibles a los otros, además, de la importancia de la comunicación, también permite el desarrollo de la propia actividad matemática, de la cual Duval (2004) afirma que parece ser intrínseca al estudio de las matemáticas.

Para el estudio de un objeto matemático se vale de la notación, la definición, la descripción, que son diferentes formas de representación. Entonces para comprender un objeto en matemáticas se necesita representaciones, conocer los diferentes registros de representación, coordinar los diferentes registros de representación, hacer tratamientos y conversiones.

Este trabajo de investigación está dividido en cuatro capítulos. En el primer capítulo se realiza el planteamiento del problema, se exponen los antecedentes de investigación, y se plantea tanto la pregunta de investigación como los objetivos que se pretenden alcanzar.

En el segundo capítulo se exponen los referentes del marco teórico. Donde se describe el concepto de representaciones, se explica el concepto de sección cónica se presenta un breve resumen de los antecedentes históricos de dicho concepto, se expone la definición de parábola, y se presentan sus registros y sus características.

En el tercer capítulo se describe la metodología, el enfoque, el alcance y el diseño que se utiliza en la presente investigación. Además, se describe la población con la cual se desarrolló la investigación, las categorías de análisis, los instrumentos y el plan de acción que se siguió durante el estudio.

En el cuarto capítulo se muestran el análisis de los resultados de cada una de las actividades propuestas y desarrolladas por los estudiantes a la luz de las categorías planteadas en la investigación. Adicionalmente, se presentan las conclusiones del trabajo investigativo, se brindan algunas recomendaciones para la realización de futuras investigaciones y se realiza una reflexión pedagógica en relación con el tema propuesto en este estudio y el cambio en las prácticas pedagógicas del investigador – profesor.

1. Planteamiento del problema

En el trabajo con estudiantes de grado décimo del colegio Alejandro Obregón IED se evidencia de manera constante la dificultad para aplicar algunas de las nociones de la geometría en situaciones reales. Por un lado, el análisis realizado a las pruebas SABER de grado noveno de los años 2013 y 2014 mostró que los estudiantes presentaron bajo desempeño en el componente geométrico-métrico y en la competencia de resolución de problemas. Las competencias que se evalúan y en las que se evidenció bajo desempeño en grado noveno, se describen en los estándares básicos de competencias para el área de matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en donde se manifiesta que un estudiante de grado noveno debe utilizar las diferentes representaciones de la geometría que le permiten resolver y formular problemas del área de matemáticas y de cualquier otra asignatura. Además, según los estándares básicos de competencias mencionados, el estudiante del grado noveno debe ser capaz de identificar las relaciones entre las propiedades de las representaciones gráficas y las propiedades de las representaciones algebraicas. Adicionalmente, los estudiantes deben identificar las relaciones entre los cambios de los parámetros en los registros de representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en su registro gráfico e identificar las relaciones que hay entre las ecuaciones algebraicas y su representación gráfica (ecuación lineal / línea recta, ecuación cuadrática / parábola; MEN, 2006).

De acuerdo a lo dicho en el párrafo anterior, el no desarrollo de las competencias que son evaluadas por parte del ICFES en la prueba SABER noveno, hace pensar que dichas dificultades también se manifestarán en los estudiantes de grado décimo al momento de resolver situaciones problema en las que deban aplicar el concepto de parábola.

De otro lado durante las clases de matemáticas de grado décimo observadas en los años anteriores se ha evidenciado que los estudiantes presentan dificultades en las siguientes acciones: extraer los elementos de la gráfica de una parábola para escribir la ecuación canónica, pasar de la ecuación canónica a la general, y modelar situaciones reales utilizando los elementos de la parábola. Acciones que si se efectúan correctamente, permiten a los estudiantes realizar la conversión entre el registro gráfico y el registro algebraico, fortalecer la coordinación entre registros y así acercarse a comprender el concepto de parábola.

Las dificultades fueron detectadas cuando se realizaron diferentes ejercicios donde los estudiantes debían representar con material físico la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola. Por ejemplo, para la circunferencia los estudiantes construyeron ruedas de chicago; para la parábola se les pidió diseñar y construir puentes; para la elipse los estudiantes diseñaron modelos con el movimiento planetario; y para la hipérbola crearon maquetas de edificios que tuvieran esta forma.

Sin embargo, los resultados no fueron los esperados, ya que después de realizar los ejercicios mencionados se les pidió a los estudiantes dar cuenta acerca de los conceptos, las propiedades y la relación que existe entre los elementos de cada una de las secciones cónicas y sus registros de representación implícitas en cada ejercicio, y fueron pocos los que pudieron sustentar y explicar la construcción realizada haciendo uso de los elementos matemáticos allí presentes. Esta dificultad puede estar relacionada con las evidenciadas en las pruebas Saber dónde se plasma el no desarrollo de las comprensiones de los elementos del pensamiento geométrico. Un ejemplo aún más claro de la falta de comprensión del concepto de parábola se evidencia cuando los estudiantes no modelan situaciones utilizando elementos propios de la parábola, esto ocurre cuando construyen un puente parabólico sin utilizar los elementos matemáticos necesarios, y al momento de realizar la retroalimentación de la construcción, se observa que no utilizan la formación de las representaciones en el registro gráfico, es decir, no trazan la parábola para su construcción, ni realizan una conversión para extraer los elementos de la gráfica, ni para escribir el registro algebraico como por ejemplo la ecuación canónica y viceversa, ni mucho menos realizan tratamientos al interior del registro gráfico para obtener la ecuación general.

A pesar de las estrategias y actividades implementadas para que los estudiantes utilicen las diferentes representaciones de la parábola, realicen tratamientos en un mismo registro, y conversiones entre diferentes registros, se evidencia que pocos logran alcanzar la comprensión de la parábola y además no la utilizan en la solución de situaciones que involucren la parábola. Es por lo anterior que el interés de esta investigación es describir cómo una intervención pedagógica basada en la teoría de registros de representación semiótica ayuda a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de décimo gado del colegio Alejandro Obregón

Duval (2004) afirma que el conocimiento se apoya en representaciones mentales y estas son llevadas fuera de los individuos a través de la semiosis la cual se expresa en forma de signos o símbolos que dan cuenta de los aprendizajes y experiencias de los individuos; por eso sostiene que no hay noesis sin semiósis, donde la noesis son las acciones cognitivas que permiten la compresión de un objeto y la semiosis es la utilización de signos. Se puede afirmar que la utilización de signos, reglas o representaciones de un objeto muestran la comprensión del mismo. Siendo así, si un estudiante hace uso de registros de representación semiótica, realiza tratamientos dentro de un mismo registro y realiza conversiones entre registros estaría dando muestra de la compresión de dicho objeto. Adicionalmente, Fernández (2011) afirma que para lograr comprender un concepto, una noción, un procedimiento, una estructura o un objeto matemático es necesario utilizar varias representaciones lo que permite su caracterización global y una comprensión del mismo; ya que no existe una única representación que pueda encerrar la complejidad de un objeto matemático.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la parábola, López y Bermúdez (2012) describen algunas dificultades de los estudiantes para comprender la parábola como lugar geométrico, por ejemplo, al realizar el registro gráfico los estudiantes no relacionan ni analizan los elementos de la parábola, no extraen elementos como el vértice, el foco y el parámetro para asociarlos con la ecuación canónica y desconocen los procedimientos que permiten visibilizar las conversiones entre la representación del registro algebraico al analítico y al gráfico.

Estas dificultades también se han evidenciado en los estudiantes del colegio. En la práctica y en adición a las dificultades ya señaladas en los estudios mencionados, se han encontrado en algunos estudiantes de la institución otros problemas listados a continuación:

a) ***No extraen los elementos de la gráfica de una parábola para escribir la ecuación canónica:*** *esto se evidencia cuando se les pide que realicen la conversión del registro gráfico al algebraico utilizando las coordenadas del vértice y el parámetro (magnitud de la distancia que separa el vértice del foco o al vértice de una recta denominada directriz) para reemplazarlos en la ecuación canónica.*

b) ***No escriben la ecuación general de una parábola:*** *esto se observa cuando se les pide que realicen un tratamiento al interior del registro algebraico aplicando las propiedades, operaciones y demás elementos de los tratamientos algebraicos que permiten pasar de la ecuación canónica a la ecuación general*.

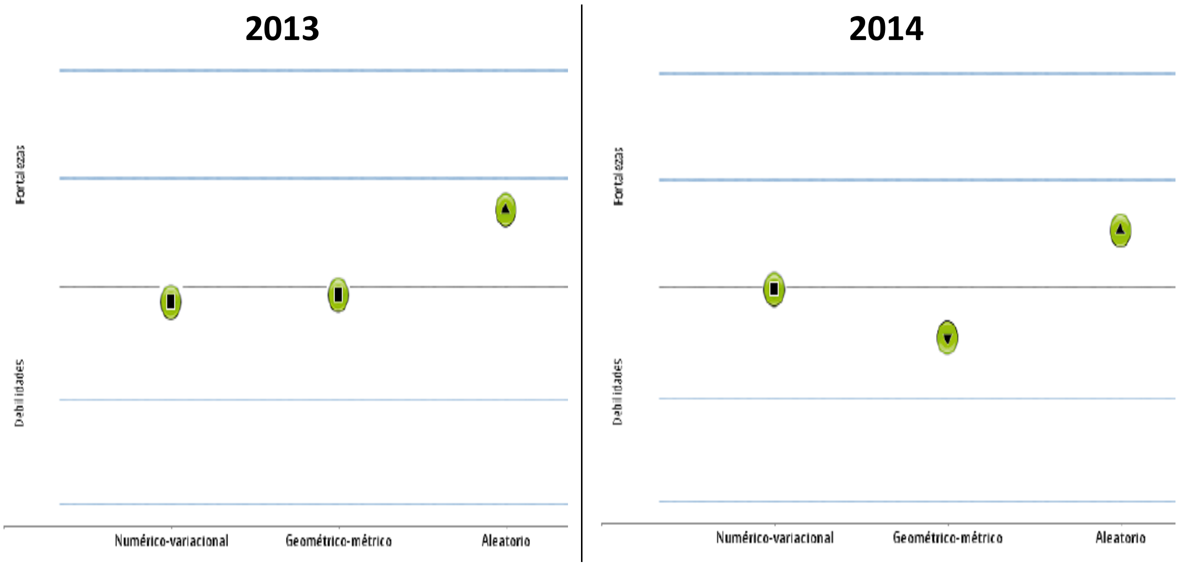
c) ***No modelan situaciones reales utilizando los elementos de la parábola:*** *se evidencia que no hay apropiación del concepto cuando se les pide que utilicen la parábola para construir una maqueta (puentes, torres) o cualquier otro objeto (arcos, pasamanos, vestidos) donde se pueda ver la formación de un registro de representación de la parábola o la utilización de transformaciones que evidencien la comprensión de la parábola*.

Por su parte, Lara (2016) afirma que las dificultades encontradas en los estudiantes en el estudio de la parábola están relacionadas con la forma como se les enseña este concepto, por ejemplo, al predominar la representacion algebraica los estudiantes tienden a enfocarse en procedimietos algorítmicos y en procesos de tipo algebraico memorístico; finalmente, dichos procesos impiden la comprensión de la relación entre el registro gráfico y el registro lenguaje común.

Adicionalmente, Fernández (2011) sostiene que los estudiantes no consiguen interpretar las representaciones gráficas, algebraicas y sus conversiones y afirma que los mismos recurren continuamente a memorizar los procesos por lo cual no logran conceptualizar el objeto matemático. Otros autores citados por Lara (2016) como es el caso de López y Aldana (2013) sostienen que los estudiantes memorizan las ecuaciones y esto no les permite realizar un análisis de la parábola ni relacionar los diferentes registros.

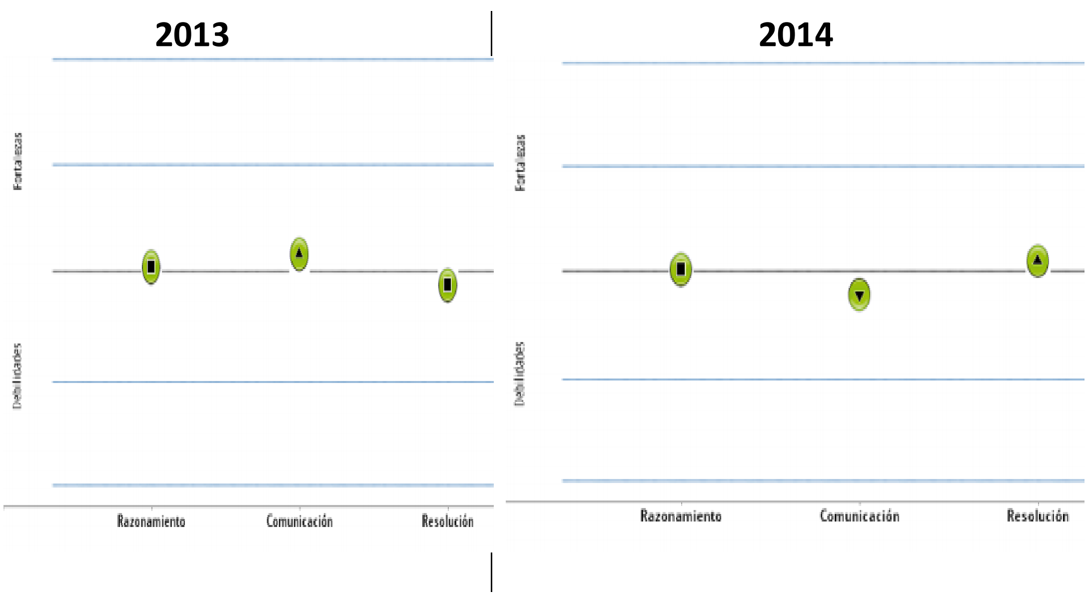
Teniendo en cuenta los antecedentes del problema de investigación podemos pensar que posiblemente las dificultades que se evidencian en los estudiantes de décimo grado sean el reflejo de sus trayectorias de aprendizaje de años anteriores. En el análisis de los resultados de las pruebas SABER de grado noveno los estudiantes muestran dificultades no solo en el componente geométrico - métrico, sino, además en la competencia relacionada con la solución de problemas como se puede observar en la figuras 1 y 2 relacionadas con el informe de dichas pruebas de los años 2013 y 2014:

Figura 1: Componentes Matemáticas Saber 9° en los años 2013 y 2014.



Fuente: Icfes (2013,2014)

Figura 2: Competencias Matemáticas Saber 9° en los años 2013 y 2014.



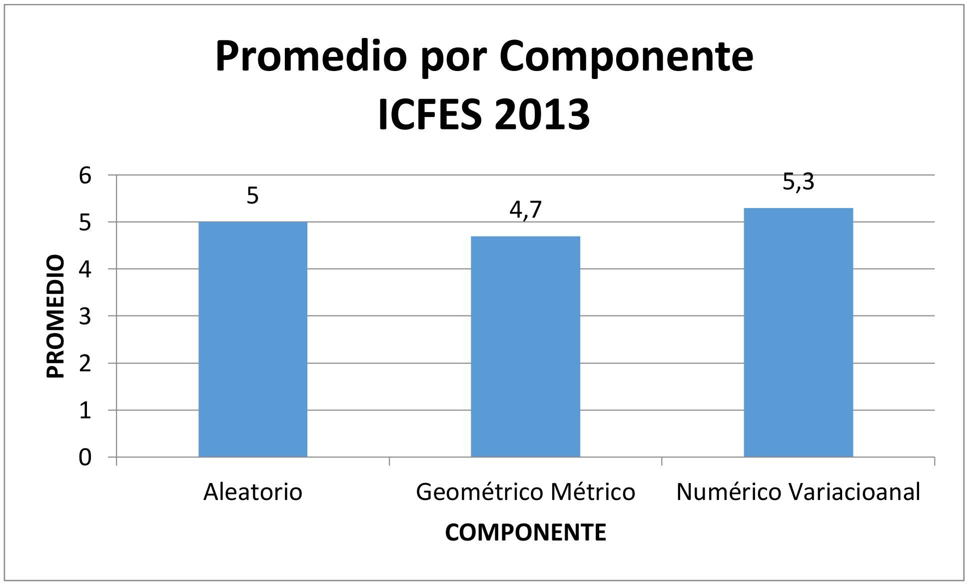
Fuente: Icfes (2013,2014)

En los resultados obtenidos por los estudiantes para las pruebas SABER noveno de los años 2013 y 2014 se observa que el componente geométrico - métrico es una debilidad en los estudiantes de noveno grado de la institución. Del mismo modo, se observa en la Figura2 que la competencia de solución de problemas y la comunicación también son parte de las debilidades presentes en los estudiantes.

Estos resultados en las pruebas SABER de grado noveno son muestra de que los estudiantes presentan un desempeño bajo en lo relacionado al componente geométrico y es posible pensar que las dificultades que se evidencian en grado décimo, en cuanto a la construcción del concepto de parábola, están relacionadas con dicha situación. De igual forma, es importante mencionar que dentro de los estándares curriculares del MEN (2006) la parábola hace parte de los componentes básicos para el grado décimo, dichos estándares son: Observar las propiedades y analizar las relaciones entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones; reconocer y describir curvas y lugares geométricos; identificar las características y propiedades de las figuras cónicas (elipses, parábolas, hipérbolas) y utilizar sus propiedades en la resolución de problemas; resolver problemas en los que se observe cómo se relacionan las propiedades de las figuras cónicas con el álgebra.

Adicionalmente, la dificultad que los estudiantes de noveno grado muestran en los ejercicios relacionados con el componente geométrico-métrico se extiende a los estudiantes de undécimo grado. Lo anterior se puede observar en los resultados prueba Saber 11º del año 2013 que se presentan en la Figura 3:

Figura 3: Comparación Componentes Matemáticas Saber 11° en el año 2013



Fuente: Propia

Aunque en el colegio donde se realiza la investigación los docentes de cada una de las áreas evaluadas realizan un análisis de los resultados de las pruebas SABER y formulan planes para el mejoramiento institucional, éstas siguen sin tener un efecto positivo en los resultados. Algunas de las acciones que se han propuesto dentro de los planes de mejoramiento son las siguientes: diseñar guías que contemplen las competencias y los componentes evaluados en las pruebas SABER, aplicar evaluaciones relacionadas con las preguntas de las pruebas y realizar cursos de refuerzo con los estudiantes que no han cumplido las metas propuestas del periodo anterior. Sin embargo, y a pesar de estas iniciativas, los resultados siguen siendo los mismos.

Por otro lado, un factor que puede influir en la dificultad que tienen los estudiantes en el estudio de las matemáticas y concretamente en las que fortalecen el pensamiento geométrico – métrico en grado décimo, está relacionado con la forma como se enseña. Por ejemplo, Lara (2016) afirma que un buen número de docentes enseñan tal como se les presentan los contenidos en los libros de texto, y para el caso de la parábola, dan mayor valor a su representación algebraica desconociendo así los pre saberes de los estudiantes y la utilización de tratamientos y conversiones de manera explícita que promuevan la aprehensión del objeto matemático.

Esta forma en cómo se enseña al interior de la institución en el área de matemáticas y que se centra en cumplir los planes de estudio presentados en los estándares; iniciando por la explicación por parte del profesor de todos los elementos relacionados con el objeto de estudio; realizando luego ejercicios; y por último resolviendo problemas de texto para verificar su aprendizaje. Adicionalmente, una enseñanza que involucra herramientas tecnológicas y software especializado pero a su vez toma elementos de la enseñanza donde el maestro modela o realiza ejercicios y se evalúa de manera tradicional, puede no aportar a la comprensión del objeto matemático.

Después de haber observado las evidencias presentadas en los párrafos anteriores sobre los bajos resultados en el componente geométrico– métrico en las pruebas estandarizadas del colegio Alejandro Obregón; las evidencias desde otras investigaciones sobre las dificultades encontradas en el aprendizaje de la parábola como lugar geométrico y sección cónica; y las evidencias de los años anteriores en la enseñanza de la parábola en los estudiantes de grado décimo del colegio, se puede sustentar que existe, en definitiva, una gran dificultad por parte de los estudiantes para apropiarse del concepto de parábola lo cual se evidencia cuando los estudiantes no representan la parábola utilizando los registros gráficos, algebraicos, lengua común, no realicen tratamientos al interior de los registros y no realicen conversiones entre registros. Se plantea en la investigación la necesidad de implementar una intervención pedagógica basada en la teoría de registros de representación semiótica que ayude a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de décimo gado del colegio Alejandro Obregón.

1.1.Antecedentes

En la búsqueda de trabajos relacionados con la enseñanza de las parábolas y de las dificultades en su aprendizaje, se encontraron algunas investigaciones previas las cuales se describen a continuación:

Flores, R. (2015), Diseño Instruccional Para El Aprendizaje De Secciones Cónicas.

La investigación fue realizada con 13 estudiantes de sexto semestre de Geometría II, de la facultad de ciencias de la educación de la Universidad de Carabobo, Venezuela. Tenía como objetivo realizar el diseño instruccional para el aprendizaje de las secciones cónicas utilizando la conversión de registros semióticos y los tratamientos al interior de los registros gráficos y algebraicos.

La propuesta de la investigación consiste en realizar una prueba donde los estudiantes deben efectuar conversiones del registro gráfico al registro algebraico y viceversa, y, al mismo tiempo, realizar tratamientos al interior del registro algebraico. La investigación arroja como resultado que la conversión del registro gráfico al algebraico presenta mayores dificultades. El principal aporte de esta investigación es la importancia que tiene desarrollar en los estudiantes las transformaciones en los registros de la parábola, los tratamientos al interior de un mismo registro, así como las conversiones entre los diferentes registros ya que esta coordinación entre registros permite acercarse a la comprensión de un objeto matemático.

Lopes, S. (2014), Uma sequência didática para o ensino de parábola enquanto lugar geométrico.

La investigación de la portuguesa Sandra Lopes consiste en realizar una secuencia didáctica para enseñar la parábola. Para conseguir este objetivo la investigadora plantea actividades donde los estudiantes tienen que realizar tratamientos y conversiones de los registros de representación semiótica de la parábola. La investigación se realiza con cinco estudiantes de enseñanza media y utiliza un enfoque cualitativo así como la ingeniería didáctica.

En la investigación se afirma que los estudiantes encuentran un obstáculo de aprendizaje al pensar que la parábola es solamente el registro gráfico de la función cuadrática, obstáculo que superan luego del trabajo con la utilización de los tratamientos y conversiones. Otro de los aspectos que se realza en este estudio es cómo la construcción del registro gráfico permite la apropiación de los elementos de la parábola y posibilita realizar la conversión del registro gráfico al registro lengua natural. En una de las conclusiones del estudio la investigadora manifiesta que los estudiantes aprendieron el concepto de parábola como lugar geométrico gracias a los tratamientos y conversiones, ya que estos les permiten conocer cada uno de los elementos de la misma además de permitirles realizar una diferenciación de la parábola como objeto matemático y la representación gráfica de la función cuadrática.

Este trabajo sustenta la importancia de utilizar los diferentes registros de representación semiótica de un objeto matemático así como realza la importancia de realizar los tratamientos al interior de un mismo registro, generar conversiones entre registros para su conceptualización y plantear diferenciaciones de otros objetos matemáticos como es el caso de la función cuadrática.

Dávila, M; De Alba, A; Hernández, P; y Antolin, A. (2013), Secuencia didáctica para el aprendizaje de las figuras cónicas y sus diferentes representaciones.

Esta investigación consiste en realizar una secuencia didáctica para el aprendizaje de las secciones cónicas utilizando tratamientos y conversiones de los registros de representación semiótica de la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola. Se realiza con un grupo de 14 estudiantes de tercer semestre de la preparatoria del Tecnológico de Monterrey de la ciudad de Juárez en el curso de geometría analítica.

Los investigadores diseñaron seis actividades para la secuencia didáctica en las que se les pide a los estudiantes que realicen la construcción de cada una de las secciones cónicas, esto con el fin de conocer sus características y sus elementos (registro gráfico). Luego realizan una descripción verbal (registro lenguaje natural), y por ultimo escriben la ecuación (registro algebraico).

El aporte de este trabajo a la presente investigación nos lleva a reflexionar sobre las dificultades que tienen los estudiantes para realizar tratamientos y conversiones en las diferentes secciones cónicas así como otras problemáticas encontradas que están relacionadas con los procesos aritméticos, algebraicos, la habilidad lectora y la argumentación de las operaciones realizadas.

Calderón, A. (2013), Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas en el grado décimo de la institución educativa Villas de San Ignacio de Bucaramanga.

Este trabajo de investigación propone que el aprendizaje de las secciones cónicas se debe desarrollar utilizando actividades de construcción, realizando el trazo de las cónicas y estudiando cada uno de sus elementos.

En las actividades los estudiantes de décimo grado construyen las diferentes secciones cónicas y van reconociendo las características y los elementos propios de cada cónica. Para la evaluación del proceso de aprendizaje de las secciones cónicas el investigador utiliza los niveles del modelo Van Hiele

La contribución de esta investigación se centra principalmente en la aplicación de las diferentes representaciones que se utilizan en la construcción de las cónicas y sus registros, dado que los estudiantes realizan las construcciones de las cónicas con material concreto, conocen los elementos, su definición y las ecuaciones que las caracterizan.

Tocto, E. (2016), Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria.

El propósito de esta investigación es establecer cómo se favorece la compresión de la función cuadrática al transitar por los diferentes registros de representación semiótica dado que los estudiantes utilizan el registro lengua natural, tabular, algebraico y gráfico

Tocto (2016) aporta a la presente investigación la importancia de transitar por los diferentes registros de representación semiótica ya que esto evidencia la comprensión del objeto matemático. En las conclusiones Tocto (2016) expone algunas dificultades en las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, dificultades como conocer las reglas utilizadas para los tratamientos algebraicos y el uso del registro lenguaje común al describir los elementos de la función cuadrática.

Macías, J. (2014), Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje.

Esta investigación tiene como objetivo mostrar la importancia de los registros de representación semiótica y la coordinación existente entre los mismos en el proceso de enseñanza de las matemáticas en la educación primaria.

Los resultados mostrados evidencian la poca importancia que se le da al trabajo con los registros de representación semiótica, los tratamientos y las conversiones, lo cual restringe la posibilidad a los estudiantes de acceder a la comprensión de un objeto matemático. Otro de los aspectos relevantes es lo que sucede en algunas instituciones educativas, donde no se prepara a los estudiantes para la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica y esto dificulta la compresión de los objetos matemáticos.

El aporte de este trabajo a la presente investigación se centra en la importancia que tiene el conocer los diferentes registros de representación semiótica en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así mismo, se resalta la importancia de la utilización de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en la compresión de un objeto matemático.

Los trabajos citados en los párrafos anteriores sobre el estudio de las secciones cónicas y de la parábola muestran elementos en común como son: la forma en que se enseñan los temas mencionados, la relevancia de utilizar categorías que permiten confrontar los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico en los aprendizajes de los estudiantes, y la importancia de coordinar los diferentes registros de representación semiótica en actividades cognitivas que impliquen tratamiento y conversión para la comprensión del objeto matemático.

A pesar de que los elementos encontrados en estas investigaciones son necesarios para el estudio de las secciones cónicas, se considera importante diseñar e implementar una intervención pedagógica basada en la teoría de registros de representación semiótica que ayude a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de décimo gado del colegio Alejandro Obregón.

1.2. Pregunta de investigación

¿Cómo una intervención pedagógica basada en la teoría de registros de representación semiótica ayuda a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de décimo gado del colegio Alejandro Obregón?

1.3. Objetivo General

Describir cómo una intervención pedagógica basada en la teoría de registros de representación semiótica ayuda a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de décimo gado del colegio Alejandro Obregón.

1.3.1. Objetivos específicos

- Diseñar y validar una secuencia actividades que permitan a los estudiantes comprender el concepto de parábola a través de los registros de representación semiótica, tratamientos y conversiones.

- Describir los tratamientos que utilizan los estudiantes en cada una de las actividades propuestas donde se favorece la comprensión de la parábola.
- Describir las conversiones que utilizan los estudiantes en cada una de las actividades propuestas donde se favorece la comprensión de la parábola.

2. Marco teórico

El trabajo de investigación está sustentado desde la teoría de registros de representación semiótica de Raymond Duval (2004), esta teoría sostiene que las representaciones no solo sirven para los procesos de comunicación, sino, además para la construcción de los objetos matemáticos. En este apartado se aborda la definición de representación, se describen algunos registros de representación semiótica de la parábola, se presenta una breve reseña histórica de la parábola como sección cónica, y finalmente se enuncian algunas definiciones de la parábola relacionadas con sus registros gráficos y algebraicos.

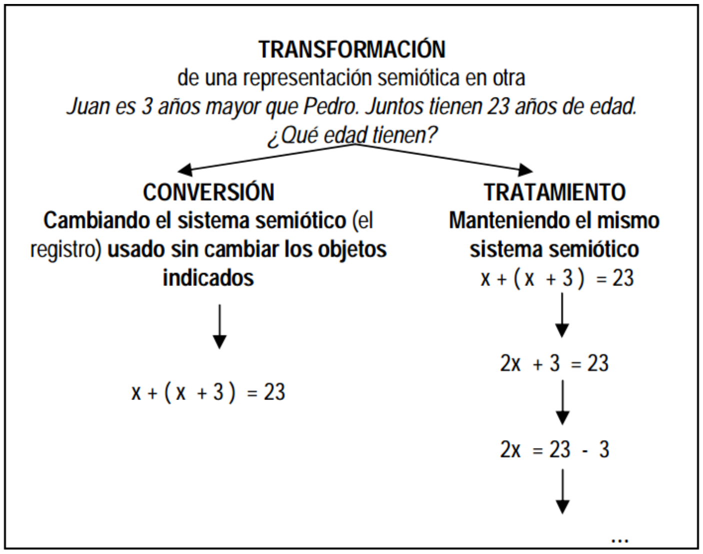
2.1. Las Representaciones

Dentro de los elementos teóricos que fundamentan esta investigación se encuentran el concepto de representación, las representaciones nos permiten describir, formalizar y comprender un concepto matemático. Lupiáñez y Moreno (2001) afirman que las representaciones en matemáticas son los símbolos, gráficas o formas verbales que nos permiten describirlos conceptos, características, propiedades y procedimientos. Al respecto Duval (2004) afirma que las representaciones semióticas son las creaciones donde se emplean signos que pueden ser: enunciados, fórmulas o figuras las cuales tienen la intención de exteriorizar las representaciones mentales del individuo para hacerlas visibles y que puedan ser conocidas por otros. Por su parte D´Amore (2011) afirma que cualquier objeto de estudio matemático es analizado a través de lo que se denomina un "no objeto". Este "no objeto" hace referencia a las representaciones del objeto matemático y de las cuales se sirve para el estudio y la conceptualización. Lo anterior significa que para estudiar un objeto matemático nos valemos de sus diferentes registros de representación semiótica y de realizar actividades cognitivas que Duval (2004) denomina formación, tratamiento y conversión.

Donde la Formación de representaciones es entendida como un registro semiótico particular, que se puede utilizar para expresar una representación mental o para aludir a un objeto real, debe contener una determinación de unidades elementales, las combinaciones posibles en dichas determinaciones y condiciones para formar representaciones más complejas que constituyen lo que se quiere representar.

Mientras que las otras dos actividades cognitivas consisten en transformaciones que puede recibir un objeto matemático, una se denomina tratamiento y la otra conversión. El tratamiento es una transformación de una representación inicial a otra representación final, es una trasformación interna a un registro de representación, es expansión informacional. La conversión es una transformación externa relativa al registro de representación de partida, esto es que un objeto cambia de registro. A continuación se plasma un ejemplo de la transformación:

Figura 4: Ejemplo de transformación



Fuente: Duval(2006), Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.

Otro de los aspectos importantes en las conversiones es que no sucede de manera inmediata, ni con facilidad, esto se puede explicar desde la congruencia entre registros o la no congruencia. Duval (2004) afirma que la congruencia se da si existe una correspondencia semántica del elemento significante, además, si existe univocidad semántica terminal y si existe un orden en el arreglo de las unidades que componen las representaciones. En la figura 4 se muestra un ejemplo de las transformaciones realizadas, este ejercicio permite observar la correspondencia entre el registro lengua común y el registro algebraico, al poder transformar el problema escrito en lengua común y escribirlo como una ecuación, se observa que para cada elemento escrito existe una expresión algebraica que lo representa (univocidad), además existe un arreglo entre las unidades de cada registro.

De acuerdo a lo manifestado por Lupiáñez y Moreno (2001) y D´Amore (2011) las representaciones semióticas permiten la comprensión de los objetos matemáticos lo cual, traducido a nuestra investigación, nos permitiría decir que los estudiantes de grado décimo están en la capacidad de realizar diferentes representaciones de la parábola (formación), de realizar transformaciones en un mismo registro (tratamiento) y realizar conversiones entre diferentes registros (conversión).

2.2. Algunos registros de representación de la parábola

En el estudio de la parábola se utilizan diferentes registros de representación semiótica, estos son: lenguaje natural, lenguaje algebraico, y lenguaje gráfico. Estos registros cumplen con las tres actividades cognitivas que se denominan fundamentales las cuales son: la formación, el tratamiento y la conversión. Los registros son entendidos como el conjunto de signos o caracteres y sus reglas que representan un objeto matemático y con los cuales se pueden realizar las tres actividades cognitivas fundamentales. Para esta investigación el registro se representará con la forma **r**. Por otra parte las representaciones son entendidas como el conjunto de signos y caracteres propios de un registro específico que, partiendo de un estado inicial, se transforma en una nueva representación la cual se encuentra en el mismo registro. Este es el caso de la ecuación canónica, que al realizar un tratamiento genera la ecuación general de la parábola, pero ambas representaciones están en el registro algebraico. Para esta investigación las representaciones en cada registro serán denotadas como **R**.

A continuación se describen los registros de representación semiótica que son utilizados en el estudio de la parábola:

Registro semiótico lenguaje natural (r^1)

Este registro utiliza los signos del lenguaje, la sintaxis y la gramática propia del español, permite realizar explicaciones, y dar definiciones. Se puede evidenciar cuando los estudiantes dan la definición de la parábola como lugar geométrico o como sección cónica, describen sus características y elementos.

Registro semiótico lenguaje algebraico (r^2)

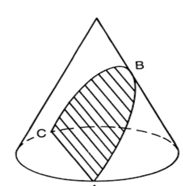
Este registro utiliza los signos y las reglas propias de las matemáticas, concretamente del álgebra (reducción de términos semejantes, productos notables, transposición de términos), y permite escribir la ecuación canónica y la ecuación general de la parábola. Se puede evidenciar cuando a los estudiantes escriben la ecuación canónica de dicha parábola.

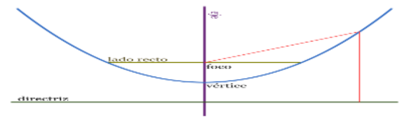
Registro semiótico gráfico (r^3)

Este registro utiliza el plano cartesiano y la relación entre los ejes coordenados para representar la parábola. Este registro permite visualizar la definición, las características y elementos propios a este objeto matemático. Se utilizan elementos de la geometría, como el cono, el plano cartesiano al construir la gráfica de la parábola, los trazos de las curvas, y la construcción de la parábola por envolventes a través de los dobleces de papel. Se puede evidenciar cuando los estudiantes construyen la gráfica de la parábola.

Ahora bien, con el propósito de ejemplificar cada uno de los registros de representación semiótica de la parábola mencionados anteriormente, así como sus representaciones y características, se realiza la siguiente tabla:

Tabla 1: Registros de representación semiótica de la Parábola.

<table>
<tr><th>Registro semiótico</th><th>Representación semiótica</th><th>Característica</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Registro semiótico r^1: lenguaje natural</td><td>Representación semiótica R^1_1: Definición de la parábola como lugar geométrico.</td><td>Conjunto de todos los puntos del plano cartesiano que equidista a un punto externo a la directriz llamado foco y a una recta llamada directriz.</td></tr>
<tr><td>Representación semiótica R^1_2: Definición de la parábola cómo sección cónica.</td><td>Corte de un plano con un cono recto, donde el plano es paralelo a la generatriz.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Registro semiótico r^2: lenguaje algebraico</td><td rowspan="2">Representación semiótica R^2_1: Ecuación canónica.</td><td>$(x-h)^2 = 4p(y-k)$, $donde$ h y k son la coordenadas del vértice y p es el valor numérico del parámetro</td></tr>
<tr><td>$(y-k)^2 = 4p(x-h)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Representación semiótica R^2_2: Ecuación General. Con eje focal paralelo al eje horizontal, al eje vertical respectivamente y no se utiliza la rotación de la parábola en este estudio</td><td>$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$</td></tr>
<tr><td>$Ay^2 + By + Cx + D = 0$</td></tr>
<tr><td>Registro semiótico r^3: gráfico</td><td>Representación semiótica R^3_1: Gráfica de la Parábola como sección cónica.</td><td>
</td></tr>
</table>

	Representación semiótica R^3_2: Gráfica de la Parábola al trazar la curva que es demarcada por la envolvente generada por el doblado de papel.	
	Representación semiótica R^3_3: Gráfica de la Parábola en el plano cartesiano.	

Fuente: Propia

Es importante la utilización de las transformaciones en el estudio de las matemáticas, así como lo afirma Amaya & Medina (2013) en su trabajo, Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal, cuando afirman que el estudio de las funciones en la enseñanza se deberían realizar utilizando todos los registro de representación de la función y realizando las actividades cognitivas de tratamiento, conversión y debería realizarse desde los grados inferiores para que el uso de estas actividades se convierta en una acción cotidiana. Además consideran que no se debe realizar énfasis en un solo registro, sino que se propone propiciar la utilización de varios registros de representación para la comprensión del objeto matemático.

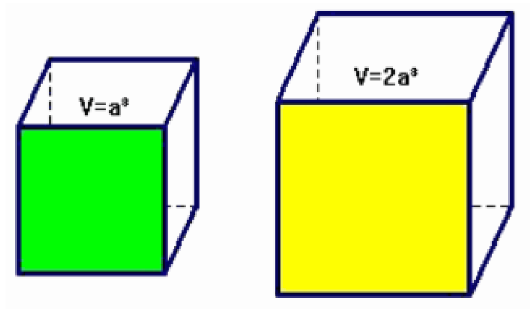
Para esta investigación es importante el uso de los registros de representación semiótica en el estudio de la parábola ya que permite movilizar diferentes registros de representación semiótica de la parábola evitando confundir el objeto con sus representaciones y al mismo tiempo permite reconocer los diferentes registros de representación semiótica en los cuales se puede estudiar la parábola, ya que un solo registro no permite la comprensión de un objeto matemático sino de un o algunos aspectos en particular. Además permite, optimizar los procesos ya que al conocer varios registros de representación semiótica de la parábola, los tratamientos y las conversiones se puede elegir el más conveniente para la situación de estudio particular. Por ejemplo para un ejercicio en particular donde se le pida al estudiante realizar la gráfica de una parábola cuando se le da la ecuación general (conversión del registro algebraico al registro gráfico) puede utilizar el tratamiento y obtener la ecuación canónica la cual le permitirá obtener información para la construcción de la gráfica, información como el vértice de la parábola, el parámetro y con esta información deducir las coordenadas del foco, la longitud del lado recto. Igualmente promueve la comprensión al integrar varios registros y lograr la coordinación entre los diferentes registros permitiendo la generalización y la movilización a otras situaciones de las matemáticas.

2.3. Secciones Cónicas

El estudio de las secciones cónicas se remonta a los griegos en el 470 antes de Cristo. Ramírez (2013) afirma que la historia de las secciones cónicas inicia al querer solucionar un problema de la época que consistía en duplicar el cubo.

Uno de los primeros en abordar dicho problema fue Hipócrates de Chíos, cuyo aporte consistió en encontrar una relación de proporcionalidad entre la longitud de la arista del cubo inicial y la correspondiente arista del nuevo cubo.

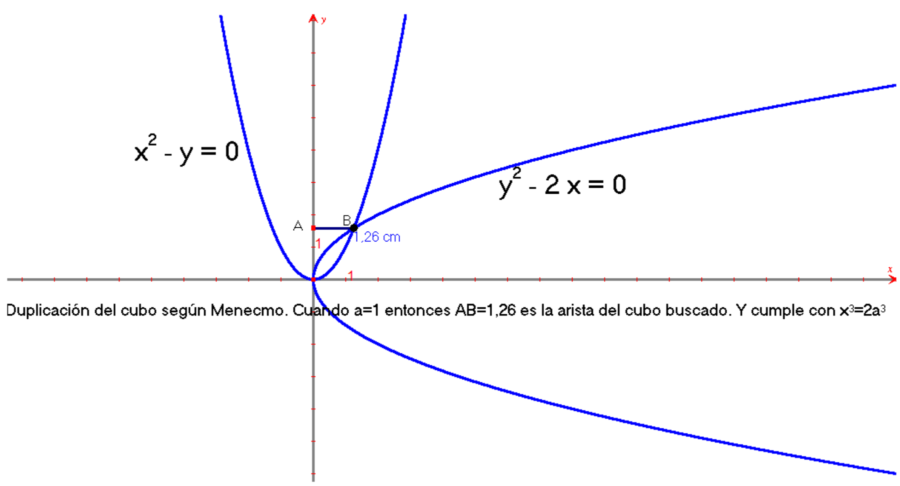
Figura 5: Duplicación del cubo



Fuente: Fernández (2011)

Más adelante, Menecmo, tratando de solucionar el mismo problema, descubrió las secciones cónicas al encontrar que la duplicación de cubo se soluciona al intersecar dos curvas (la hipérbola y la parábola o dos parábolas). Menecmo no pudo encontrar el punto de corte de estas dos curvas por no tener los instrumentos adecuados, sin embargo, años después en 1867 el francés Wantzel encontró la solución a la intersección entre las curvas.

Figura 6: Solución a la duplicación del cubo

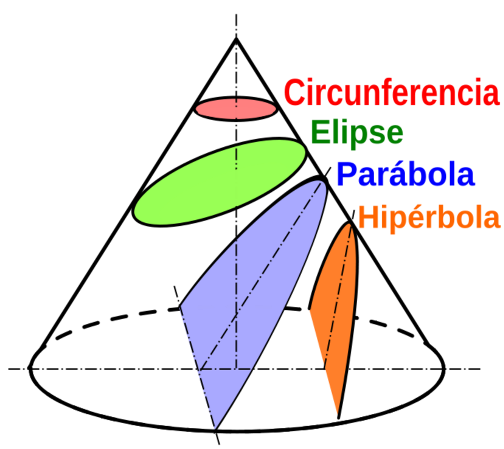


Fuente: Fernández (2011)

El estudio de las secciones cónicas se le atribuye a Apolonio de Pérga quien realizó un gran aporte al tratamiento de dichas curvas. Se le atribuye también a Apolonio el nombre dado a cada una de ellas.

El nombre de Parábola significa equiparación ya que el plano corta al cono de forma paralela. El nombre de Hipérbola significa exceso ya que el plano corta los dos conos y el nombre de Elipse significa deficiencia ya que el plano no es paralelo a ninguna de las directrices de los conos. Al estudiar las secciones cónicas Apolonio demostró que de un solo cono se pueden sacar las tres secciones cónicas contradiciendo así el pensamiento de otros matemáticos de la época que afirmaban que para cada cónica se utilizaba un cono diferente.

Figura 7: Secciones cónicas



Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/76/Cono_y_secciones.svg/720px-Cono_y_secciones.svg.png

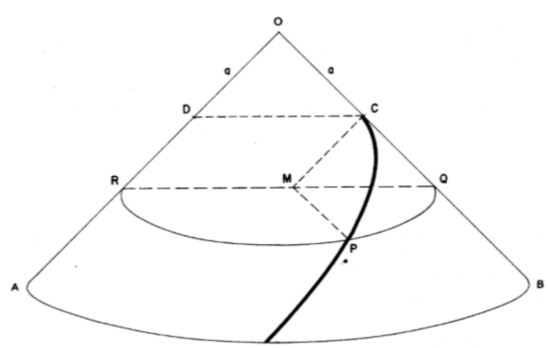
Siglos después Descartes relaciona las diferentes curvas cónicas con ecuaciones de segundo grado que las describen creando así la geometría analítica.

2.4. La Parábola

La parábola es una de las secciones cónicas estudiada por los matemáticos desde la antigüedad y que se enseña en la educación secundaria y en algunos programas de educación superior como es el caso de las ingenierías.

La parábola se define como un lugar geométrico y como una sección cónica que resulta de cortar un cono recto con un plano, el corte es paralelo a la directriz del mismo.

Figura 8: Parábola como sección cónica

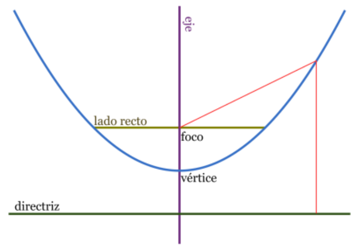


Cono rectángulo en el vértice O y plano perpendicular a la generatriz OB, para formar la parábola como sección cónica,

Fuente: Fernández (2011).

Lemhann (2003, citado por Lara, 2016) en su libro de geometría analítica define la parábola como el lugar geométrico donde un punto de referencia se mueve en un plano de forma que la distancia a una recta fija (directriz), que se encuentra situada en el mismo plano, es siempre igual a la distancia a un punto fijo (foco) y que no pertenece a la recta.

Figura 9: Parábola como lugar geométrico



Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Partes_de_una_par%C3%A1bola.svg

2.4.1. Ecuación de la Parábola

Gracias a los avances realizados por los matemáticos en el estudio de las secciones cónicas y la aparición de la geometría analítica se pueden encontrar expresiones algebraicas que relacionan la parábola con las coordenadas del plano cartesiano. Las ecuaciones para la parábola varían según las coordenadas de su vértice, del foco y de la posición relativa del eje de simetría (eje focal) con respecto a los ejes coordenados.

Las parábolas en el registro algebraico se expresan utilizando dos representaciones: una es el registro algebraico de la parábola que se denomina ecuación canónica y la segunda se denomina ecuación general la cual surge al realizar la actividad cognitiva de tratamiento al interior de este registro. Existen más representaciones en este registro, sin embargo en la investigación se trabajó solo con las parábolas con ejes focales paralelos a los ejes cartesianos y no se realizan rotaciones en el plano.

2.4.1.1. Ecuación canónica de la Parábola

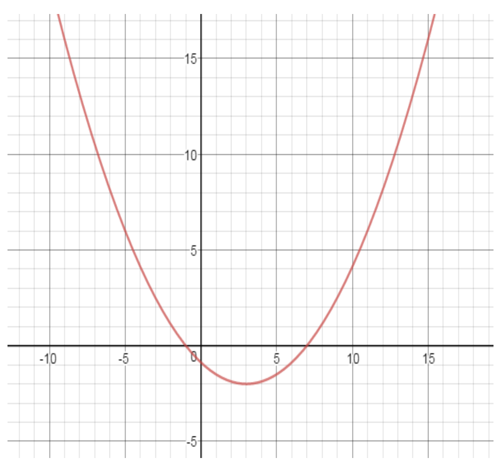
Las ecuaciones canónicas de las parábolas son representaciones algebraicas que dependen de las coordenadas del vértice, del parámetro p y de la posición relativa del eje focal (o de simetría) con respecto a los ejes coordenados.

Las parábolas con eje de simetría paralelo al eje "y" con vértice en V (h, k) tienen por ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

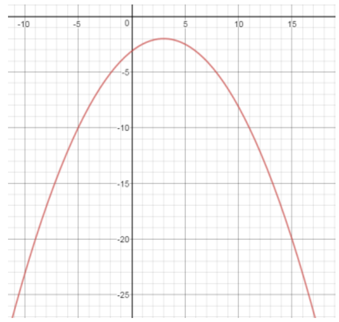
Donde p se denomina parámetro, permite determinar la escala de la parábola y en el caso cuando $p > o$ "abre hacia arriba" o si $p < o$ "abre hacia abajo"

Figura 10: Parábola con eje foca vertical y p>0



Fuente: Propia

Figura 11: Parábola con eje foca vertical y p<0



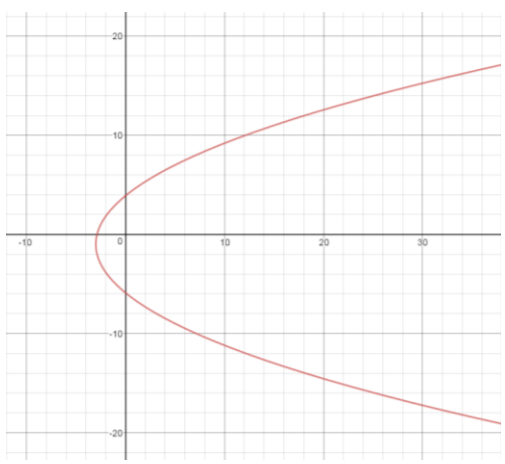
Fuente: Propia

Las parábolas con eje de simetría paralelo al eje “x” con vértice en V (h, k) tienen por ecuación:

$$(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2 = 4\mathrm{p}(\mathrm{x}-\mathrm{h})$$

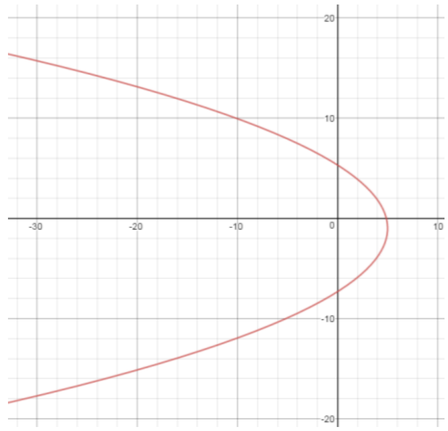
En el caso cuando $\mathrm{p} > o$ “abre hacia la derecha” y si $\mathrm{p} < o$ “abre hacia la izquierda”

Figura 12: Parábola con eje foca horizontal y p>0



Fuente: Propia

Figura 13: Parábola con eje foca horizontal y p<0



Fuente: Propia

2.4.1.2. Ecuación general de la Parábola

Después de un tratamiento al interior del registro algebraico, la ecuación canónica se convierte en la ecuación general, para lo cual se requiere de procesos como la utilización de productos notables, transposición de términos, reducción de expresiones semejantes, entre otros.

La ecuación general de la parábola con eje focal paralelo al eje "y" está definida por:

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$

La ecuación general de la parábola con eje focal paralelo al eje "x" está definida por:

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0$$

3. Metodología

En este apartado del estudio se presentan los principales aspectos de la metodología así como el enfoque, el alcance y el diseño de investigación. De la misma manera, se describe la población con la cual se realizó el estudio y adicionalmente se describen las categorías de análisis, se presentan los instrumentos de recolección de la información y el plan de acción que se llevó a cabo.

3.1. Enfoque Metodológico.

Para la presente investigación se utiliza el enfoque metodológico cualitativo dado que este tipo de enfoque permite realizar una continua revisión de la literatura en las diferentes etapas de la investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). El enfoque cualitativo también permite recolectar datos a partir de la observación de las clases para registrar y describir la formación de los registros de representación semiótica de la parábola (lenguaje natural, algebraico y gráfico), los tratamientos al interior de cada registro, y las conversiones entre los diferentes registros que utilizan los estudiantes en el estudio de la parábola.

3.2. Alcance Metodológico

Hernández, Fernández y Baptista (2006) afirman que el alcance metodológico descriptivo tiene por objeto analizar qué es un fenómeno, cómo se manifiesta y cuáles son sus componentes. Por esto el alcance metodológico para esta investigación es de tipo descriptivo ya que se pretende analizar y describir cómo una intervención pedagógica basada en la teoría de registros de representación semiótica ayuda a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de décimo gado del colegio Alejandro Obregón.

3.3. Diseño de Investigación

Eliott, J. (1990) afirma que la investigación-acción está relacionada con la reflexión sobre las dificultades que se le presentan día a día a los profesores. En otras palabras, la investigación-acción reflexiona sobre la parte práctica del profesor y no solamente sobre la teoría del saber en el cual se desempeña. La investigación-acción también permite profundizar en la compresión de un fenómeno al interior del aula para adoptar una posición exploratoria y descriptiva del mismo, desde el punto de vista de los actores involucrados en cada situación. Asi mismo Hernández, Fernández y Baptista (2006) afirman que la investigación-acción tiene como objetivo solucionar problemáticas cotidianas, mejorar las prácticas y realizar ajustes y reformas estructurales para la mejora de los procesos y los programas al interior del aula.

El diseño que se propone para esta investigación es, entonces, la investigación- acción ya que esta permite el análisis de las situaciones que se dan en el estudio de la parábola, sus registros de representación semiótica y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión. Adicionalmente, la investigación-acción permite la continua reflexión sobre los procesos pedagógicos, sus actores y la relación entre la teoría pedagógica y la práctica en el trabajo en el aula.

3.4. Población

Esta investigación se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de grado décimo cuyas edades oscilan entre los 15 y 16 años. Este grupo está formado por 30 estudiantes entre niños y niñas todos de la jornada mañana del Colegio Alejandro Obregón IED de la ciudad de Bogotá, Colombia. El colegio Alejandro Obregón es una institución educativa pública ubicada en la localidad Rafael Uribe al sur de la ciudad. El Colegio atiende a 1172 estudiantes desde preescolar hasta secundaria. Los estudiantes de grado décimo que participan en la investigación presentan dificultades en pensamiento geométrico métrico de los cuales nos referimos en el capítulo la descripción del problema

3.5 Categorías de análisis

Las categorías de análisis propuestas para la investigación, están relacionadas con las tres actividades cognitivas fundamentales que están presentes en los registros de representación semiótica mencionados por Duval (2004). Estas categorías se presentan a continuación:

La primera categoría de análisis es la **Formación** que se traduce en las representaciones que identifican un objeto. Estas representaciones pueden ser una frase, un dibujo, una fórmula, un esquema, etc. Lo que se observa en esta categoría es el tipo de representaciones entendido como las marcas o conjunto de marcas que utilizan los estudiantes para referirse a las parábolas ya sea en el registro lenguaje natural, registro algebraico o registro gráfico. Estas formas de representar evidencian el grado de apropiación del concepto.

La segunda categoría de análisis es el **Tratamiento** el cual permite evidenciar en los estudiantes el paso de una representación a otra dentro de un mismo registro de la parábola. Por ejemplo, si están en el registro lenguaje natural el estudiante puede definir la parábola como lugar geométrico, pero también lo puede hacer como sección cónica. Los tratamientos de las representaciones deben seguir las reglas propias del sistema para poder generar nuevas representaciones.

La tercera categoría de análisis es la **Conversión** la cual permite a los estudiantes poder cambiar de registro, por ejemplo, pasar de un registro algebraico a un gráfico. En esta categoría se podría observar cómo los estudiantes utilizan sus conocimientos sobre la parábola para extraer información del registro gráfico y utilizarla para construir su representación algebraica (ecuación canónica).

3.6 Instrumentos de recolección de información

La información se recogió a través la observación de las sesiones de clase las cuales se realizaron a través de videos. Los instrumentos serán los videos de observación. La observación se realizó sobre las sesiones de clase y se analizó el proceso de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas. Para el caso de la entrevista, se realizaron videos donde los estudiantes evidenciaron la formación de los diferentes registros de representación semiótica de la parábola, el tratamiento realizado en el interior de cada registro, y la conversión entre los diferentes registros.

3.5. Plan de acción

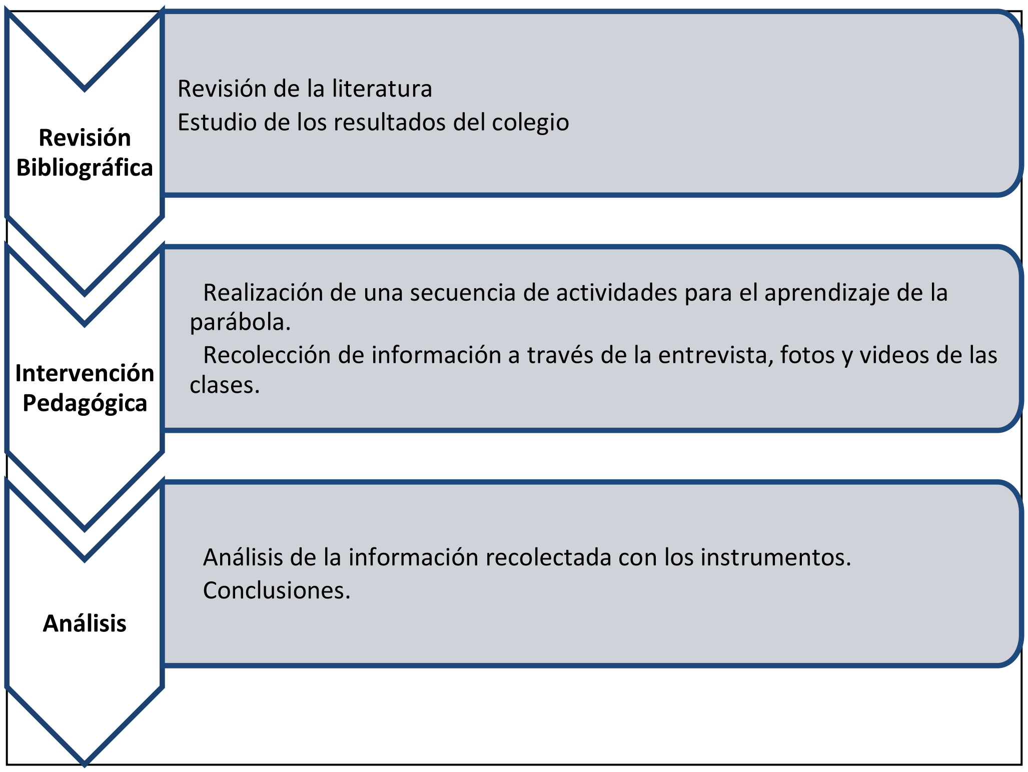
La presente investigación fue desarrollada en tres etapas. En la primera etapa se realiza la revisión bibliográfica y se explora la forma como se ha enseñado la parábola; las dificultades encontradas en el proceso de enseñanza aprendizaje; y los antecedentes del proceso de evaluación que los estudiantes del colegio Alejandro Obregón presentan en las pruebas externas e internas relacionas con el estudio de la parábola.

En la segunda etapa se realiza la intervención pedagógica en la cual se propone la secuencia de actividades a partir de situaciones tomadas de los intereses de los estudiantes y ajustadas a partir de las investigaciones analizadas en la primera etapa. En cada una de estas actividades se da prioridad a la **Formación** de los diferentes registros de representación semiótica de la parábola, al **Tratamiento** al interior de cada uno de los registros y a las **Conversiones** entre los diferentes registros.

En la tercera etapa de la presente investigación se realiza el análisis de las actividades y se describen los diferentes registros de representación semiótica de la parábola a la luz de las categorías. Adicionalmente, se dan algunas conclusiones y recomendaciones para mejorar los procesos pedagógicos de enseñanza- aprendizaje de la parábola.

A continuación en la Figura 13, se presentan los momentos del plan de acción:

Figura 14: Etapas de la Investigación



Fuente: Propia

Etapa 1: Revisión de la literatura

En esta etapa se tuvo por objetivo revisar las investigaciones relacionadas con la forma como se enseñan las secciones cónicas, especialmente, en lo que tiene que ver con el concepto de parábola. También se buscó información sobre las estrategias didácticas utilizadas en el estudio de este objeto matemático, al igual que las dificultades encontradas en los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la parábola como sección cónica y como lugar geométrico.

Otro de los aspectos importantes en el estudio de literatura son los antecedentes sobre la enseñanza de la función cuadrática que dan cuenta de otros registros de representación semiótica y que tienen relación con la parábola como sección cónica y lugar geométrico.

Etapa 2: Intervención Pedagógica

La intervención pedagógica consiste en realizar una secuencia de actividades que permitan el estudio de la parábola por parte de los estudiantes de grado décimo de la institución. A través de esta secuencia se pretende evidenciar y determinar si la secuencia de actividades diseñadas desde la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval permiten la comprensión del concepto de parábola a través de las actividades cognitivas de Formación de los diferentes registros de representación semiótica de la parábola; el Tratamiento al interior de un mismo registro; y la Conversión que se realiza entre diferentes registros.

La secuencia de actividades es producto del análisis realizado a algunas investigaciones sobre el estudio de la enseñanza de la parábola; a la reflexión sobre experiencia como docente en la enseñanza de la misma; y a la revisión de contextos e intereses presentados por los estudiantes a la luz de las actividades propuestas. Pretende potencializar el uso de los registros de representación semiótica, al igual que las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión.

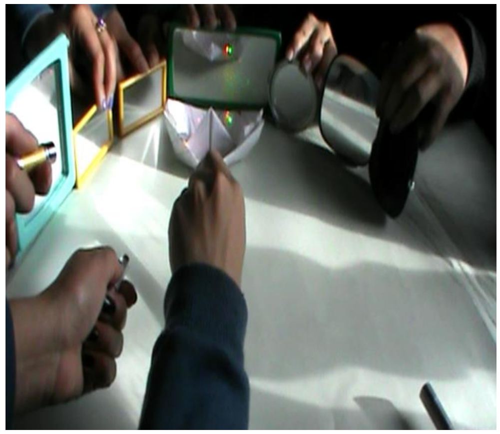
La secuencia de actividades permite utilizar los registros de representación semiótica de la parábola, para que los estudiantes movilicen diferentes registros dando la posibilidad de diferenciarlos entre sí; además que comprendan el concepto de parábola y no lo confundan con sus registros, al igual que les proporciona realizar generalizaciones que puedan utilizar en el estudio de otros objetos matemáticos y potencializa la utilización del registro adecuado a determinada situación.

Esta secuencia está formada esencialmente por cinco actividades: la primera es introductoria y se denomina batalla naval. La segunda actividad propone la construcción de la parábola con escuadra y doblez de papel. La tercera actividad es un taller de preguntas sobre la parábola. La penúltima actividad es el trabajo de la parábola con GeoGebra. La actividad de cierre es la galería y exposición de proyectos.

A continuación se realiza una breve descripción de cada una de las etapas arriba mencionadas.

La primera actividad de la secuencia didáctica se denomina batalla naval y tiene como objetivo introducir a los estudiantes a la noción de la parábola y reconocer algunos elementos relacionados con su registro de representación gráfica (vértice, foco y trazo de la curva). Esto se realiza a través de un juego que consiste en destruir los barcos de los contrincantes utilizando una aplicación de la parábola denominada reflexión. Permite afianzar la formación del registro gráfico de representación semiótica de la parábola y de algunos elementos del mismo como es el foco, el vértice, el lado recto y las propiedades de reflexión de las parábolas.

Figura 15: Batalla Naval



Fuente: Propia

Los estudiantes se dividen en dos grupos donde planean su estrategia para destruir el barco del equipo contrario utilizando espejos y láser. Los estudiantes colocan los espejos alineados en forma de parábola y dirigen los rayos para ser reflejados en el espejo, los rayos se reúnen en un punto en el barco que se debe ubicar en el foco de la parábola.

La segunda actividad consiste en realizar la construcción de la parábola como lugar geométrico utilizado escuadra, regla, cuerda, lápiz, y el trazo de la curva que es generada por la envolvente producto del doblado de papel. El propósito es que los estudiantes conozcan el concepto de parábola como lugar geométrico a partir de la construcción del registro gráfico. Con esta actividad los estudiantes observan la propiedad de lugar geométrico de la parábola al comprobar que un punto cualquiera que se encuentra sobre la curva está a la misma distancia del foco como de la directriz. Esta actividad pretende mostrar la formación de la representación del registro de lenguaje natural al utilizar el concepto de parábola como lugar geométrico y al describir las características de la misma. En ella se promueve que los estudiantes utilicen las unidades significantes del registro gráfico, como lo es ubicar las coordenadas de vértice, dar el parámetro de su parábola y relacionarlo con el registro algebraico, permitiendo así realizar la conversión entre los registros gráficos y algebraicos.

Terminada la construcción de la parábola con escuadra y lápiz se realiza el doblado del papel haciendo que uno de los bordes de la hoja, pase por el punto dibujado sobre la hoja. Repitiendo este procedimiento los estudiantes logran que este lado de la hoja pase con diferentes pendientes por el foco, obteniendo así, la representación del registro gráfico de la parábola a través del trazo de la curva que generan las líneas envolventes formadas a partir del doblado de papel y que sean tangentes a la parábola.

La tercera actividad es el desarrollo de un taller con preguntas sobre la parábola (Anexos) como apoyo para que los estudiantes formalicen el concepto de parábola como lugar geométrico y sección cónica a través de los tratamientos y conversiones que realizan de los diferentes registros. Los estudiantes realizan tratamientos al interior del registro algebraico al escribir (donde se les pida) las ecuaciones generales partiendo de las ecuaciones canónicas, además realizaran conversiones al extraer los elementos de la gráfica de la parábola para escribir las ecuaciones canónicas, adicional a esto, pasan de la ecuación canónica a realizar la gráfica de la parábola que se les pide. Los estudiantes deben realizar conversiones al pasar del lenguaje común (problema) a una expresión algebraica (ecuación canónica) y tratamientos al escribir una nueva expresión algebraica (ecuación general).

El docente utiliza la Formación de los diferentes registros de representación semiótica de la parábola que ha trabajado con sus estudiantes, construye el registro en lenguaje natural dando la definición de la parábola como sección cónica y como lugar geométrico e identifica sus diferencias. Asimismo, el docente guía la reflexión para construir el registro algebraico donde se le presentan a los estudiantes las ecuaciones canónicas y generales de algunas familias de parábolas, complementa la conceptualización del registro gráfico al realizar la construcción de la parábola en el plano cartesiano donde se muestran los elementos principales como el foco, el vértice, el parámetro y el lado recto y evidencia las formas de realizar tratamientos al interior de los diferentes registros y las conversiones entre registros, esto se realiza de forma expositiva apoyada en ejercicios complementarios.

La cuarta actividad llamada parábola con GeoGebra tiene por objetivo utilizar la tecnología en la formación de la representación en el registro gráfico y algebraico de la parábola, Duval (2006) afirma que estos software permite mostrar representaciones diferentes de forma rápida lo cual le permite a los estudiantes conocer un rango de representaciones de la parábola y le permite ver el dinamismo de las transformaciones de las diferentes representaciones. Los estudiantes construyen la parábola con el uso del programa de GeoGebra; utilizando las herramientas del programa trazan las curvas, escriben los registros algebraicos utilizando la información dada por el registro gráfico, verifican con la información que les arroja el software. El desarrollo de esta actividad les permite a los estudiantes utilizar la imagen de un puente, un vestido o una cocina solar con forma de parábola para colocarla en el programa GeoGebra y así obtener el registro algebraico. La imagen que utilizan se escoge en relación al proyecto de cierre donde ellos construirán uno de los elementos indicados.

La quinta actividad es llamada galería de proyectos y consiste en que los estudiantes escojan entre construir un vestido, un puente o una cocina solar (proyectos) que les permita relacionar la formación de los diferentes registros de representación semiótica de la parábola y realizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión dentro del proyecto escogido. La importancia de esta última actividad se centra en que los estudiantes relacionen todo el trabajo realizado en las actividades anteriores y evidencien la utilización de los registros de lenguaje natural, lenguaje algebraico y gráfico así como que evidencien el tratamiento al interior de los registros ya nombrados y puedan dar cuenta de las conversiones entre dichos registros.

Etapa 3: Análisis y conclusiones

Para la tercera etapa se realizó el análisis de la información recolectada en las diferentes actividades propuestas y se confrontó dicha información a la luz de las categorías de análisis. Además se redactaron las conclusiones y recomendaciones que permitirán seguir contribuyendo a la reflexión pedagógica del docente.

4. Resultados y análisis de investigación

Los resultados de la presente investigación surgen de los análisis de cada una de las actividades y de su confrontación con las investigaciones y teorías consultadas. Están organizados en el orden de las actividades realizadas en las diferentes sesiones de la investigación.

4.1. Actividad 1: Batalla Naval

Como ya lo dijimos la primera actividad consiste en introducir a los estudiantes en el estudio de la parábola para lo cual se les plantea un juego llamado batalla naval. El objetivo del juego es que uno de los dos equipos concentre todos los rayos láser en un punto del barco de papel del otro equipo. Para realizar la actividad se les presento a los estudiantes videos (el rayo de Arquímedes y reflexión de las parábolas) sobre las propiedades de la reflexión de las parábolas, en donde se observa como los rayos paralelos al eje focal son relejados en la parábola y pasan por el foco, además observan el video donde se cuenta la supuesta defensa de una ciudad por parte de Arquímedes utilizando espejos parabólicos y la propiedad de la reflexión de los mismos.

La actividad permite que los estudiantes conozcan la representación del registro gráfico de la parábola, algunos de sus elementos, como son el vértice y el foco y observar los presaberes de los estudiantes. Al igual que se introduce en la noción de parábola como lugar geométrico.

La estrategia del primer equipo consistió en colocar un solo espejo y sobre él concentrar los rayos para ser reflejados hacia el barco. Esta estrategia, que surgió del grupo, logró concentrar los rayos en el barco pero no relacionó los elementos de la parábola, ni sus representaciones del registro gráfico ni del registro lengua natural. El segundo equipo, conformado por estudiantes repitentes de grado décimo, logró organizar varios espejos en el piso en forma de parábola utilizando elementos de la misma como el vértice y el foco, el aporte de los estudiante que se encontraban repitiendo grado décimo y el apoyo de los videos permitió a los estudiante realizar la Formación de la representación del registro gráfico de la parábola en el cual ubicaron elementos como el vértice y el foco.

En la Figura 15 se muestran las dos imágenes de las estrategias que utilizaron los estudiantes:

Figura 16: Estrategias iníciales de los estudiantes con espejos

Fuente: Propia

En un segundo intento por solucionar el reto, despues de socializar el video *El rayo de Arquímedes*; de realizar la conceptualización de la parábola como lugar geométrico; y de utilizar los registros de lenguaje natural junto con el registro gráfico, se evidenciaron en los equipos otras dos nuevas estrategias.

Uno de los equipos utilizó el doblado de la cartulina para construir la parábola al realizar el trazo de la curva que se generó por las envolventes y colocar el barco en el foco de la misma mientras colocaban sus espejos sobre la curva trazada, apuntaron sus rayos a los espejos y así consiguieron el objetivo del juego. Los láser se colocaron paralelamente uno al lado del otro y a la misma altura. Esta estrategía permitió evidenciar en los estudiantes la actividad cognitiva de **Formación**, al construir la representación del registro gráfico de la parábola a través de las envolvetes que se obtienen a través del doblado de papel. La segunda estrategia consistio en trazar rectas tangentes para construir la parábola. Los estudiantes colocaron los espejos sobre la curva trazada, pero el barco se colocó sin tener encuenta la ubicación del foco de la parábola. En esta estrategia los estudiantes también utilizaron la construccion del registro gráfico.

En las dos estrategias se evidencia el uso de la Formacion de la representación del registro gráfico, pero es importante aclarar que aunque lo utilizan como estrategia para solucionar el reto propuesto se manifiesta en ellos que no existe la conceptualizacion del objeto matemático, ya que no muestran manejo de elementos propios de la parábola como el lado recto, el parámeto y la directriz. Adicioalmente, no utilizan la parábola como lugar geometrico. Esto se puede explicar en el hecho que se encuentran estudiantes que no han estudiado la parábola, ni el registro gráfico de la función cuadrática. se esperaba ya que con la utilizacion de los videos y la exposiscion de los elementos de la parábola por parte del docente se pretendia inciar a los estudiantes en la comprension de la parábola utilizando los registro de represntación.

Sin embargo, se observa que los estudiantes utilizan el registro lenguaje natural para describir las características de la curva que obtuvieron y el registro gráfico para colocar los espejos sobre la curva dibujada.

En la Figura 16 se evidencia las estrategias utilizadas por los estudiantes para ganar el juego:

Figura 17: Estrategias finales de los estudiantes con espejos

Fuente: Propia

La actividad inicial permite observar el conocimiento previo de los estudiantes sobre la parábola y las representaciones que conocían. Uno de los estudiantes participantes, que es nuevo en la institución, realizó el trazo de la parábola utilizando escuadra y creando la parábola con líneas tangentes a la curva. Al indagar el porqué de este proceso el estudiante afirmó que en el colegio donde estaba les enseñaban dibujo técnico y este conocimiento le permitió construir la parábola a través de la técnica de rectas paralelas. El estudiante realiza el registro gráfico de la parábola pero no evidencia conocimiento de sus elementos, ni de su definición. Esta situación se puede explicar en que para conocer un objeto matemático es importante conocer los diferentes registros de representación semiótica, realizar tratamientos al interior del mismo y realizar conversiones entre los diferentes registros (Duval, 2004); además Fernández (2011) afirma que un solo registro no es suficiente para conocer un objeto matemático. Sin embargo, es de resaltar, que debido a los fundamentos de geometría que recibió este estudiante en su anterior colegio pudo acercarse un poco más que sus compañeros al registro gráfico de la parábola.

Otro de los estudiantes realizó el trazo de una curva en forma de parábola, al indagar sobre la razón por la cual hizo la curva de esa forma afirmó que lo recordaba del año anterior ya que era un estudiante que se encontraba repitiendo grado décimo.

Categoría de análisis Formación: los estudiantes utilizaron la formación de la parábola en el registro gráfico valiéndose de las líneas envolventes generadas por el doblado de papel y de las construcciones que ya conocían para colocar los espejos sobre la curva y ubicar el foco que permitiera la ubicación del barco.

Categoría de análisis de Tratamiento: en esta actividad no se evidencian tratamientos al interior de ninguno de los registros.

Categoría de análisis de Conversión: los estudiantes realizan conversión del registro gráfico al registro lengua común al explicar la forma cómo ubicaron los espejos sobre el gráfico de la parábola y la ubicación del barco en el foco.

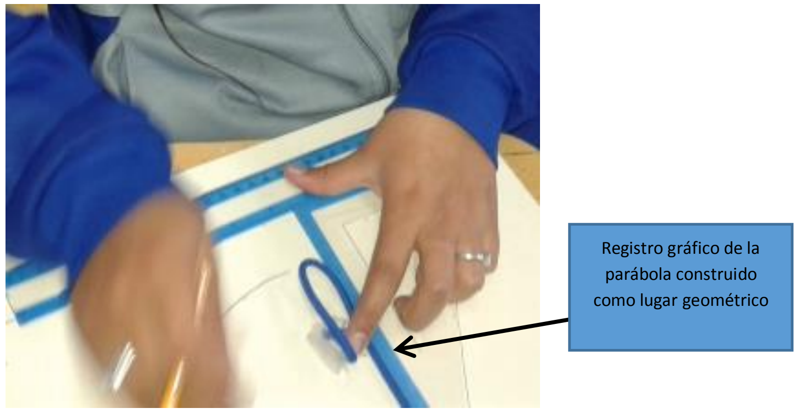
La primera actividad permitió a los alumnos acercarse a la noción de Parábola, observar la representación gráfica, la propiedad de reflexión y realizar la formación de la representación del registro gráfico y lengua común.

4.2. Actividad 2: Construcción de la Parábola con instrumentos de la geometría y a través del trazo de la curva generada por las líneas envolventes producidas por el doblado de papel.

Para la Formación de la representación semiótica de la parábola en el registro gráfico, los estudiantes construyen el objeto matemático utilizando una hoja de papel, lápiz, escuadra, regla y cuerda. Esta construcción se realiza utilizando el concepto de parábola como lugar geométrico. Los estudiantes toman un extremo de la cuerda, la fijan a una esquina de la escuadra y el otro extremo de la cuerda es fijado al foco; mientras deslizan la escuadra sobre la directriz, el lápiz realiza una marca que da forma a la parábola

En la Figura 17 se observa el procedimiento que realizan los estudiantes en la construcción:

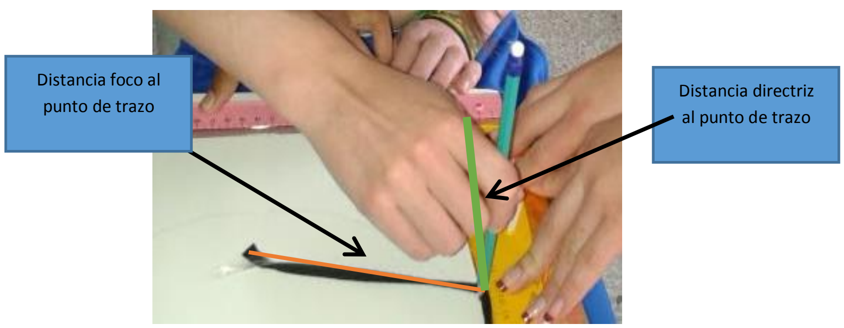
Figura 18: Construcción de la parábola con lápiz, cuerda y escuadras.



Fuente: Propia

Los estudiantes realizan el trazo y verifican con la regla que las distancias entre el foco y un punto que se encuentre sobre la curva, sean iguales así como la distancia del punto a la directriz como se observa en la siguiente figura:

Figura 19: Verificación de la Parábola como lugar geométrico con la escuadra.

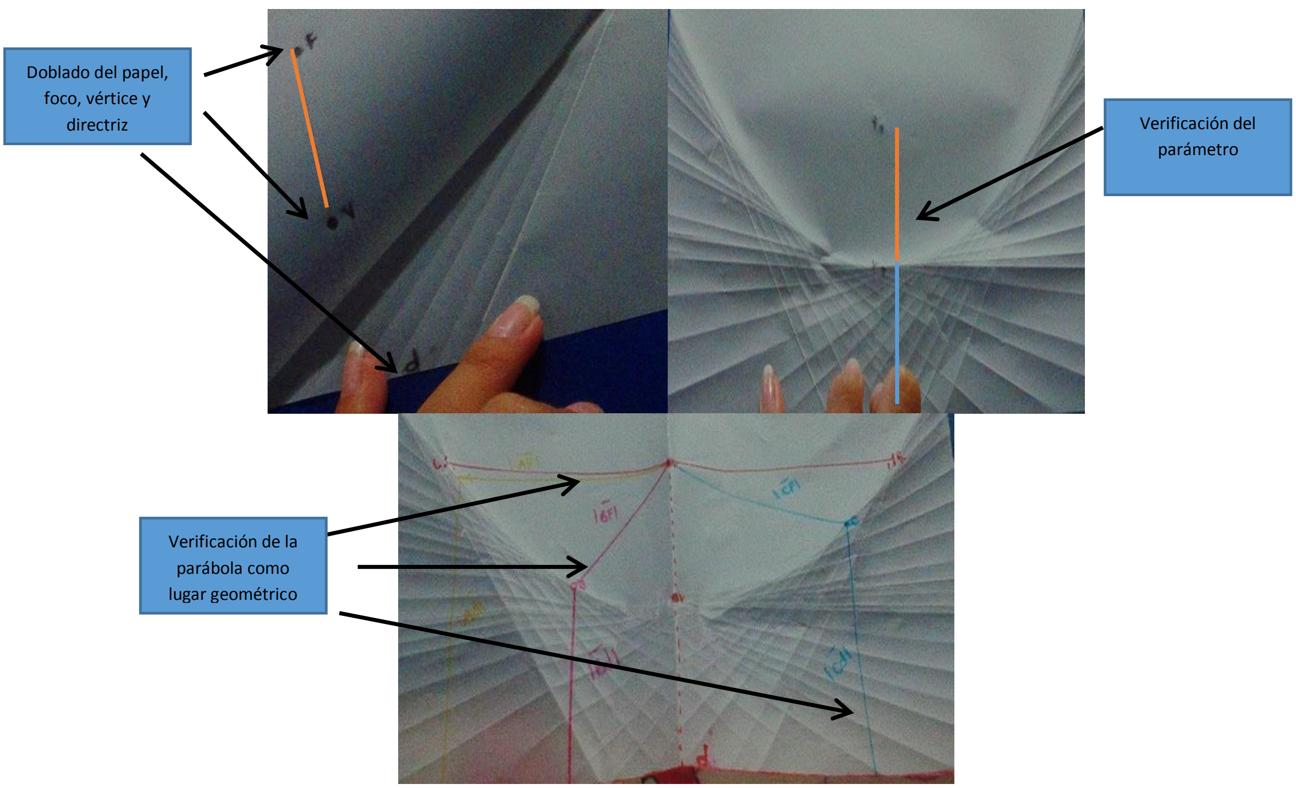


Fuente: Propia

Otro método utilizado en esta sesión es el del doblado de papel. Con esta estrategia los estudiantes trazan la directriz y un punto en la hoja (foco de la parábola) y realizan las líneas envolvente a través de los dobleces haciendo que el doblez pase por varios puntos de la directriz y por el foco. Al terminar de realizar los dobleces los estudiantes manifiestan que se observa la representación del registro gráfico de la parábola al interior de la familia de rectas tangentes que la envuelven.

Se observa a los estudiantes que miden el segmento directriz-vértice, vértice-foco, al igual que usan otros puntos que están sobre la parábola para verificar el concepto como lugar geométrico. Esto se muestra en el proceso de construcción y de verificación de la parábola como lugar geométrico en la figura 19.

Figura 20: Parábola a través del doblado de papel



Fuente: Propia

Esta actividad permitió que los estudiantes reconocieran cuáles son las características que hacen que la parábola sea un lugar geométrico pues en el momento en que los estudiantes realizan la descripción de la construcción nombran elementos de la parábola como foco, directriz, vértice, e identifican el parámetro como la distancia foco-vértice o directriz-vértice. Adicionalmente, los estudiantes pudieron verificar que la parábola es el conjunto de todos los puntos del plano que se encuentra a la misma distancia de un punto llamado foco y una línea recta llamada directriz.

La descripción realizada por parte de los estudiantes se hizo de forma verbal y apoyada en las construcciones hechas en las hojas. Estas descripciones manifiestan el uso de la actividad cognitiva de conversión que realizan los estudiantes al pasar del registro gráfico al registro lengua común. Se evidencia también que los estudiantes reconocen el registro gráfico de la parábola con las dos construcciones al igual que el registro lenguaje natural al describir la parábola como lugar geométrico y al dar las características de la misma. Al construir la parábola a través de la curva que se genera por las líneas envolventes que resultan del doblado de papel y la utilización de escuadra como se hizo en esta actividad, los estudiantes logran la formación la representación del registro gráfico, sus elementos y sus características. También se permite la formalización del registro lenguaje natural al describir la parábola, sus elementos y se espera que se acerquen a su comprensión al conocer varios registros de representación y la coordinación entre dichos registros. Finalmente, los estudiantes realizan tratamiento cuando, estando en la representación del registro gráfico, pasan de la representación de la parábola con la curva formada por la envolvente mediante el doblado de papel y la relacionan con la curva trazada con lápiz, escuadra y cuerda.

Al realizar la formación de los registros de representación semiótica, gráfico, lengua común, al realizar los tratamientos, conversiones y coordinar los diferentes registros, se puede afirmar que los estudiantes comprenden el objeto matemático parábola (noesis) y esto se evidencia en primer lugar en la formación de estos dos registros, y en segundo lugar al poder realizar tratamiento al interior del registro gráfico y conversión entre estos dos registros (semiósis). Lo anterior reafirma la tesis de Duval (2004) cuando afirma que sin semiósis no hay noesis.

Categoría de análisis Formación: En esta actividad al construir la parábola a través de las envolventes que son generadas por medio del papel y la utilización de escuadra los estudiantes lograron la formación del registro gráfico, sus elementos y características. También se dio la formalización del registro lengua común al describir la parábola, sus elementos y su conceptualización. La actividad permite la comprensión de la parábola al fortalecer la formación de los registros de representación en legua común y gráfico.

Categoría de análisis de Tratamiento: Los estudiantes realizan tratamiento cuando estando en el registro gráfico pasan de la representación gráfica de la parábola formada por las envolventes y la relacionan con curva trazada con lápiz, escuadra y cuerda. El trabajo de tratamiento es otro elemento importante para logra la compresión de la parábola, Duval (2004) afirma, que la comprensión de un objeto matemático existe el tránsito entre diferentes registros de representación al igual que los tratamientos al interior de cada uno de ellos, permitiendo así no confundir el objeto matemático con sus representaciones

Categoría de análisis de Conversión: Los estudiantes realizan conversión del registro gráfico al registro lengua común al explicar la construcción de dicho registro, dar sus elementos y características.

Los estudiantes a través de esta actividad conocen como se realiza la formación de las representaciones del registro gráfico, utilizando los instrumentos de la geometría y el doblado de papel, la formación de la representación del registro gráfico utilizando el doblado de papel es tenida en cuenta a partir de lo que Santa y Jaramillo(2010) afirman sobre el uso del doblado de papel y su relacion con la geometría: "el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel". Además realizan tratamiento, cuando al efectuar la formación de la representación del registro gráfico utilizando la escuadra, el lápiz y cuerda y la formación del mismo registro utilizando el trazo de la curva generada por las líneas envolventes que surge a partir del doblado de papel. Y realizan conversión al pasar del registro gráfico al registro lengua común, esto se evidencia cuando describen los elementos, características y dan la definición de la parábola como lugar geométrico apoyándose en el registro gráfico. Se puede evidenciar que los estudiantes comprenden la parábola a través de la formación de los registros lengua común y gráfico, además al realizar tratamiento al interior del registro gráfico y la conversión entre estos dos registros, permitiendo la movilización, la utilización de diferentes registros, la coordinación entre los registros, la complementariedad de los registros y potencia la utilización del registro más conveniente según la situación dada.

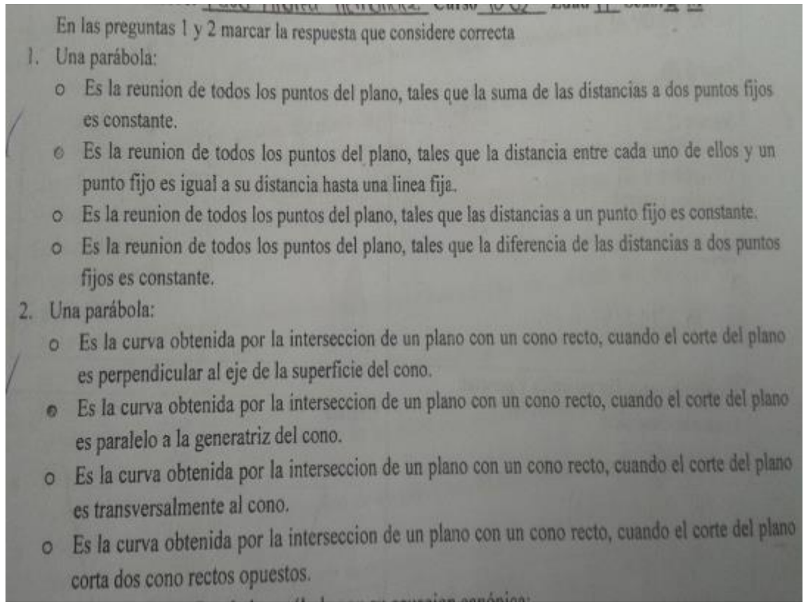
4.3. Actividad 3: Taller con preguntas sobre la Parábola

En la actividad número tres, los estudiantes solucionaron una guía donde se les presentaba la parábola en sus registros de representación semiótica en lenguaje natural, lenguaje algebraico y gráfico. Previo al desarrollo de esta actividad en sesiones anteriores se realizaron las tres actividades cognitivas propias de los registros de representación semiótica, se dio la formación de los registros de representación semiótica, los tratamientos al interior de los diferentes registros y las conversiones entre registros.

En los ejercicios uno y dos de la guía (ver anexos) se les piden a los estudiantes que marquen la respuesta correcta. Estos dos ejercicios se encuentran en el registro lenguaje natural y se le da al estudiante la definición de la parábola como lugar geométrico y sección cónica y ellos marcan cuáles de estos definen a la parábola. La idea es verificar que los estudiantes conozcan las definiciones de la parábola y las puedan recordar para dar respuesta correcta a estos dos planteamientos. En la Figura 20 se muestran las respuestas de dos estudiantes:

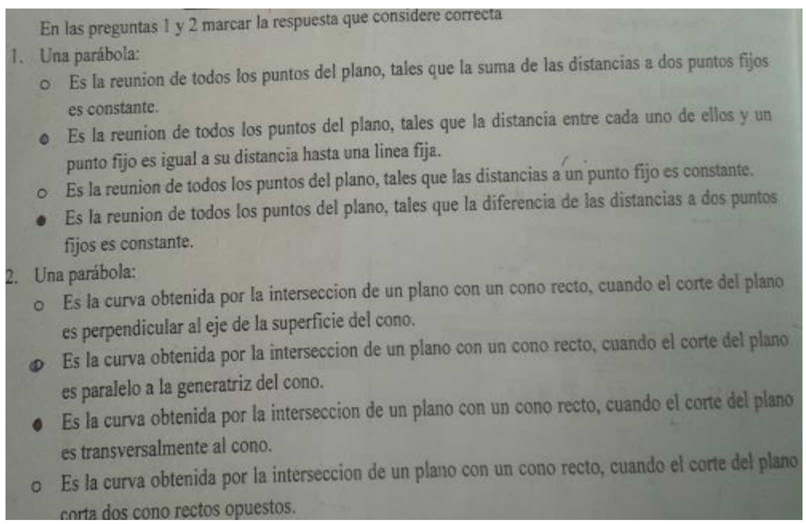
Figura 21: Respuestas del registro lenguaje natural.

Estudiante 1


En las preguntas 1 y 2 marcar la respuesta que considere correcta

1. Una parábola:
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante.
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que la distancia entre cada uno de ellos y un punto fijo es igual a su distancia hasta una linea fija.
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que las distancias a un punto fijo es constante.
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante.
2. Una parábola:
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano es perpendicular al eje de la superficie del cono.
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano es paralelo a la generatriz del cono.
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano es transversalmente al cono.
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano corta dos cono rectos opuestos.

Estudiante 2

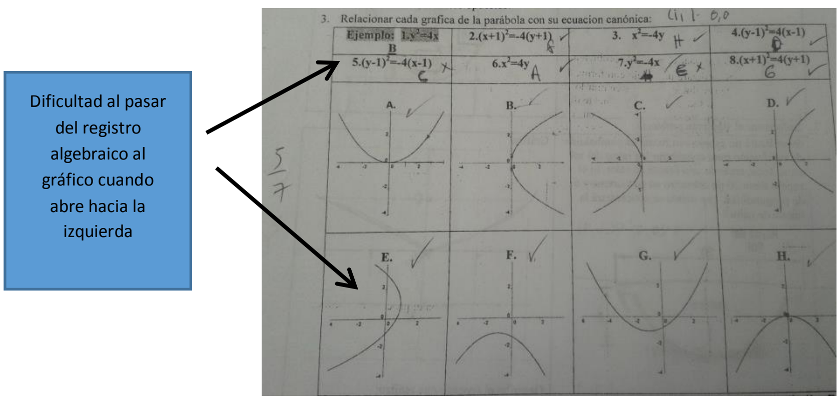

En las preguntas 1 y 2 marcar la respuesta que considere correcta

1. Una parábola:
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante.
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que la distancia entre cada uno de ellos y un punto fijo es igual a su distancia hasta una linea fija.
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que las distancias a un punto fijo es constante.
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante.
2. Una parábola:
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano es perpendicular al eje de la superficie del cono.
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano es paralelo a la generatriz del cono.
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano es transversalmente al cono.
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano corta dos cono rectos opuestos.

Más de la mitad de los estudiantes marcaron la respuesta correcta, se puede pensar que los estudiantes al recordar la definición de la parábola, reconocen la parábola en su registro de lenguaje natural y realizan tratamiento al interior del mismo registro, además, escogen correctamente las definiciones como lugar geométrico y sección cónica.

En el ejercicio tres se les piden a los estudiantes que realicen una conversión entre el registro gráfico y el registro lenguaje algebraico. La mayoría de los estudiantes realizó el ejercicio de relacionar correctamente la ecuación canónica con su gráfica. En la Figura 21 se muestra un ejemplo del ejercicio realizado por los estudiantes

Figura 22: Conversión entre registros algebraico y gráfico.

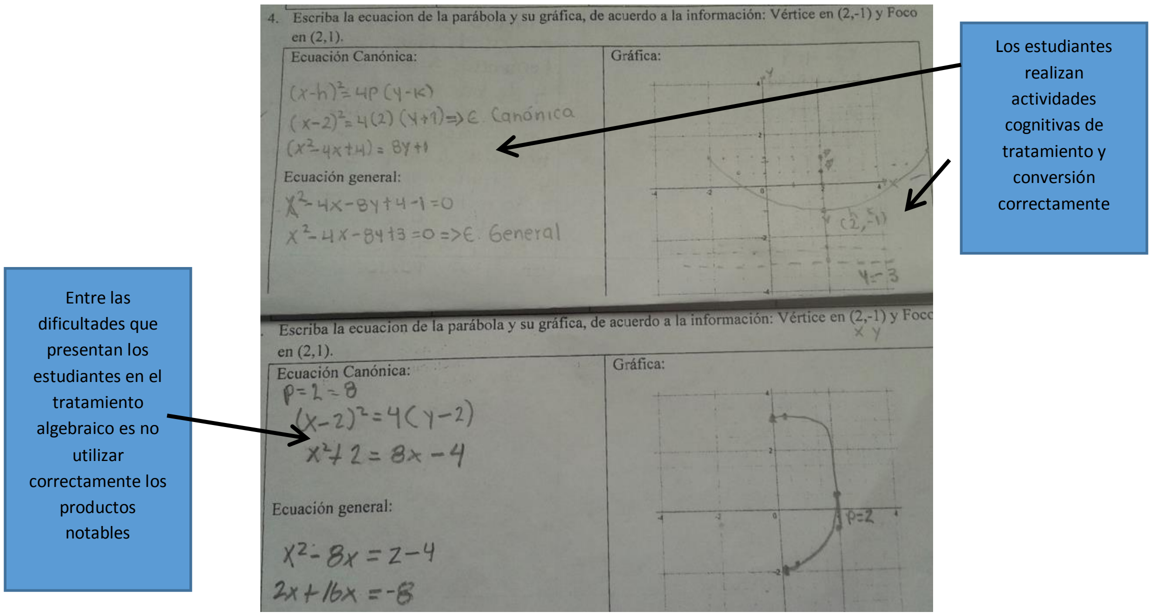


Fuente: Propia

Sin embargo, más de la mitad de los estudiantes no relacionaron la ecuación canónica de las parábolas con eje focal paralelo al eje “x” y que abre hacia la izquierda. En adición, la mitad de los estudiantes presentaron la misma dificultad cuando la parábola abre hacia abajo, con eje focal paralelo a “y”. Podemos afirmar entonces que, los estudiantes presentan dificultades al realizar un proceso de reflexión del registro gráfico de la parábola con respecto a los ejes cartesianos, y por esta razón no realizan correctamente la operación de conversión entre el registro gráfico y lenguaje algebraico. Esta dificultad está relacionada con lo que Duval (2004) denomina la no-congruencia que se explica en la falta de correspondencia existente entre las unidades significantes propias de cada registro. Existen tres criterios de congruencia propuestos por Duval: el primero, es la correspondencia; el segundo es la univocidad semántica; y el tercero es la organización de las unidades semánticas. Para el caso de los estudiantes participantes de esta investigación no existe congruencia dado que no se cumple la correspondencia de la unidad significante del signo menos de la expresión algebraica a una unidad significante en el registro gráfico. A pesar que se realizaron actividades donde se efectúa este tipo de conversiones, los estudiantes continúan presentan dificultad al no poder establecer la correspondencia entre unidades significantes, por ejemplo en la representación del registro algebraico $(x+1)^2=-4(y+1)$ los estudiantes no encuentran correspondencia del signo menos (-) en el registro gráfico y no lo relacionan con la ubicación del eje focal de la parábola con respecto a los ejes cartesianos, además, algunos de los estudiantes no establecen la correspondencia de las cantidades que se encuentran en los paréntesis en el registros algebraico y las relaciona con las coordenadas del vértice (-1,-1) para construir el registro gráfico. Se les dificulta la univocidad semántica ya que no encuentran correspondencia.

Para el ejercicio cuatro los estudiantes realizan una conversión al pasar del registro lenguaje natural al registro de lenguaje algebraico y al registro gráfico. Otra de las actividades cognitivas que se les pide es la de realizar un tratamiento al interior del registro algebraico y pasar de la ecuación canónica a la general. En la Figura 22 se muestran ejercicios realizados por los estudiantes:

Figura 23: Tratamientos y Conversiones utilizados por los estudiantes en una pregunta del taller.



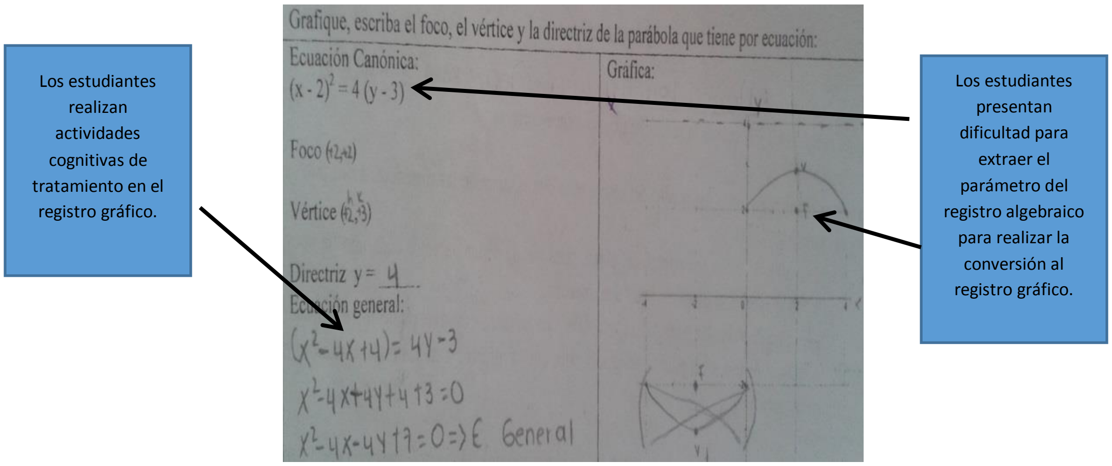
Fuente: Propia

Esta actividad nos permite concluir que la mayoría de los estudiantes realiza correctamente la conversión entre el registro lenguaje natural al registro algebraico, lo que no sucedió al realizar la conversión entre el registro lenguaje natural al registro gráfico donde menos de la mitad de los estudiantes consigue alcanzar los resultados esperados. El ejercicio les permitió a los estudiantes valerse de la correspondencia entre el registro lengua común y el registro algebraico para solucionarlo correctamente, al conocer las coordenadas del vértice y la forma en cómo se relaciona (correspondencia) con la expresión algebraica (ecuación canónica), la mayoría de los estudiantes reemplazaron correctamente el vértice en la expresión algebraica y relacionaron el parámetro con la distancia foco – vértice, lo cual evidencia la comprensión del concepto de parámetro y la relacionan correctamente con la conversión entre estos registros.

Para la actividad cognitiva de tratamiento al interior del registro algebraico se evidenció que algunos de los estudiantes presentan dificultades al utilizar el producto notable cuadrado de un binomio, al realizar el proceso de igualar a cero la expresión algebraica y al reducir términos semejantes. Otra de las dificultades en el tratamiento, es el hecho de que algunos estudiantes no relacionaron el valor del parámetro con la expresión algebraica lo cual los llevo a no realizar el tratamiento correctamente. La dificultad de realizar correctamente el producto notable está asociada a no utilizar la potenciación de binomios algebraicos, al desconocimiento de los proceso para la solución de productos notables, que son presaberes con los que se esperaría que un estudiante de décimo grado contara. Al igual los presaberes de reducción de términos semejantes e igualar expresiones algebraicas a cero.

En el ejercicio cinco se les piden a los estudiantes que realicen un tratamiento al interior del registro algebraico y una conversión del registro algebraico al registro gráfico. Para realizar estas actividades cognitivas los estudiantes deben extraer elementos de la ecuación canónica para realizar la gráfica de la parábola. En la Figura 18 se evidencia como uno de los estudiantes realiza correctamente la conversión entre estos registros y el tratamiento al interior del registro algebraico:

Figura 24: Tratamiento en el registro algebraico y conversión del registro algebraico al registro gráfico



Fuente: Propia

La mayoría de los estudiantes realizaron el tratamiento al interior del registro algebraico y los que no lo realizaron correctamente presentaron las dificultades descritas en el ejercicio cuatro, puesto que, no solucionaron el producto notable, no igualaron a cero la expresión algebraica y no realizaron la reducción de términos semejantes.

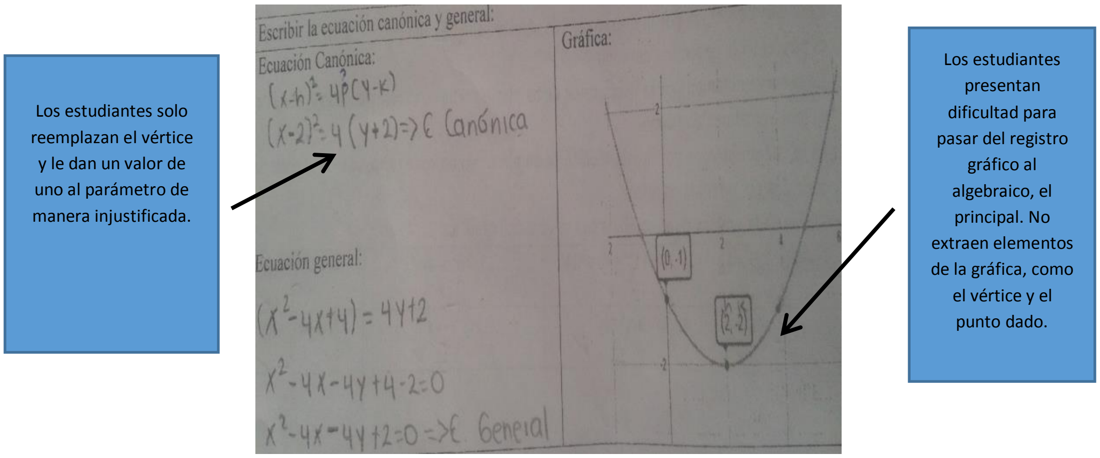
La mayor dificultad se notó en el momento de extraer elementos del registro algebraico para ser utilizados en la formación de la representación del registro gráfico. La mayoría de los estudiantes extrajeron correctamente el vértice de la parábola, pero no el parámetro que les permite obtener las coordenadas del foco y la magnitud del lado recto, lo cual dificultó la conversión entre estos dos registros.

De acuerdo a lo anterior, la conversión entre el registro algebraico y el registro gráfico no se da por la congruencia entre ellos, dado que no existe una correspondencia semántica entre las unidades semánticas del registro algebraico y las unidades semánticas del registro gráfico, tampoco se cumple el criterio de univocidad semántica ya que los estudiantes solo lo relacionan con el vértice de la parábola.

La expresión: $(x-2)^2 = 4(y-3)$ que es el registro algebraico de una parábola con eje focal paralelo al eje "y", con vértice en (2,3) y que abre hacia arriba. Requiere que para realizar la conversión al registro gráfico los estudiantes extraigan las coordenadas del vértice. La mayoría de los estudiantes consiguió realizar esta extracción correctamente, pero para extraer el foco de la parábola requerían de extraer la magnitud del parámetro a lo cual se evidencio que solo algunos estudiantes formalizaron correctamente esta extracción. La conversión no se realizó porque los estudiantes no encontraron una correspondencia entre los elementos de la expresión algebraica y su relación con la gráfica. A pesar de realizar ejercicios donde debían realizar la misma conversión los estudiantes no establecen una correspondencia entre el número 4 en el registro algebraico y el tratamiento al interior de este registro para relacionarlo con 4p de la ecuación canónica de una parábola de forma general. Esta relación se puede escribir de la forma: 4p=4, lo cual permitiría conocer el valor del parámetro y así poder conocer las coordenadas del foco de una parábola con las condiciones ya mencionadas (h, k+p), que para nuestro ejercicio es (2,4).

Para el ejercicio seis se les solicitan a los estudiantes que realicen una conversión del registro gráfico al registro algebraico y se les pide que realicen un tratamiento al interior del registro algebraico. En la Figura 20 se muestra la actividad propuesta a los estudiantes:

Figura 25: Conversiones del registro gráfico al registro algebraico



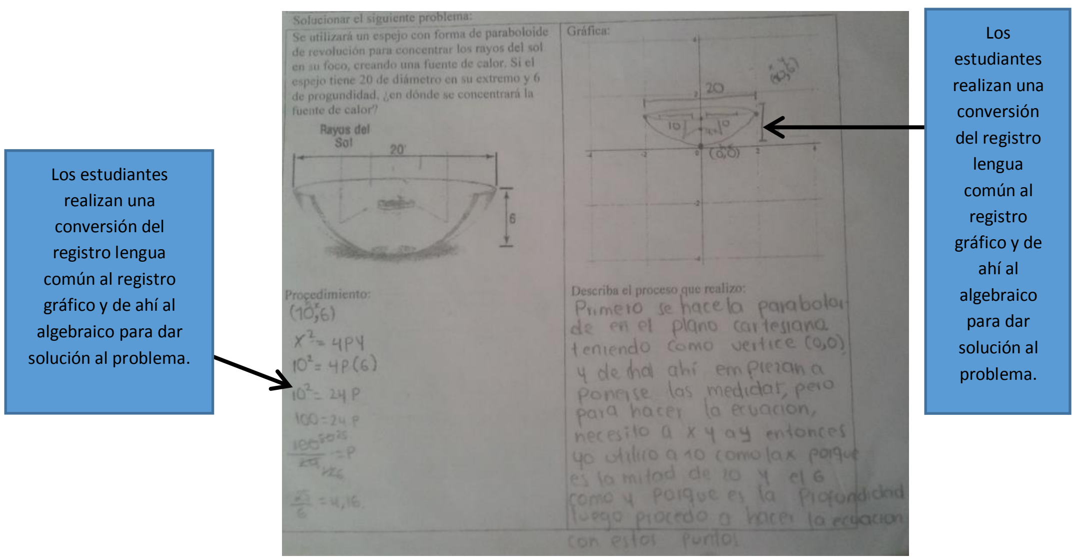
Fuente: Propia

En este ejercicio se evidencia la mayor dificultad al realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico. Aunque en algunas sesiones se había realizado la ejemplificación y la realización de ejercicios, se observó que la mayoría de los estudiantes presentaron dificultad al extraer elementos de la parábola en la gráfica y llevarlos a la ecuación canónica. Un gran número de estudiantes extrajeron correctamente el vértice de la parábola, pero debido a que en el ejercicio no se les daban las coordenadas del foco o la magnitud del parámetro tenían que calcular la magnitud del parámetro utilizando los puntos dados. Finalmente, ningún estudiante realizó este cálculo y por lo tanto no lograron realizar la conversión entre dichos registros.

En este ejercicio se manifiesta nuevamente la dificultad que presentan los estudiantes al realizar la actividad cognitiva de conversión. Para Duval (2004) la conversión es una de las operaciones cognitivas más complejas y está relaciona con la congruencia que existe entre el registro de salida y el registro de llegada. En este ejercicio la no congruencia entre el registro gráfico y el algebraico está determinada por la no correspondencia semántica de los elementos significantes entre los registros, tampoco se da la univocidad semántica ya que no hay unidades semánticas correspondientes, y por último, no se da el criterio de organización de las unidades semánticas entre los registros.

Para el último ejercicio propuesto, se solicita que los estudiantes realicen una conversión del registro lenguaje natural al algebraico y al gráfico para dar respuesta a una situación problema. Este ejercicio se puede observar en la Figura 21:

Figura 26: Conversión del registro lenguaje común al registro algebraico y al registro gráfico



Fuente: Propia

La mayoría de los estudiantes no realizó correctamente la actividad cognitiva de conversión mostrando dificultad en realizar la conversión del registro lenguaje natural al registro algebraico por la no congruencia entre estos registros.

Duval (2004) afirma que cuando existe una alta congruencia entre los enunciados de un problema y las ecuaciones aritméticas para solucionarlos, los estudiantes de primaria consiguen con éxito cumplir correctamente esta tarea, y cuando no existe un grado satisfactorio de congruencia el éxito de la actividad disminuye. De acuerdo a lo anterior, los estudiantes no encontraron congruencia entre los dos registros y por tal razón se justifica la dificultad al realizar el ejercicio en el que adicionalmente casi la mitad de los estudiantes no intentaron buscar la solución y solo un estudiante realizó la conversión correctamente.

Para el cierre del análisis de esta tercera actividad se puede afirmar que aunque re realizaron ejercicios de ejemplificación de tratamientos y conversiones se evidencio que una de las dificultades más frecuentes entre los estudiantes es la de realizar las conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica de la parábola. Ya que entre menos elementos de congruencia existen entre los registros en los que se va a realizar la conversión menos estudiantes realizan correctamente la actividad.

La mayoría de los estudiantes realizó correctamente el tratamiento al interior del registro lenguaje natural y el registro algebraico. Las dificultades encontradas en esta actividad cognitiva están relacionadas con la utilización correcta del algebra, es decir, la solución correcta del producto notable del cuadrado de un binomio, la transposición de términos al igualar a cero y la reducción de términos semejantes.

Categoría de análisis Formación: La actividad tres le permite a los estudiantes consolidar la formación del registro algebraico. Lo anterior se evidenció cuando los estudiantes escribieron las ecuaciones canónicas y generales de las parábolas dadas. Esta actividad también les permitió fortalecer el registro gráfico al construir las gráficas en el plano cartesiano; y por último, les permitió consolidar el registro lengua común al utilizar la definición de la parábola como lugar geométrico.

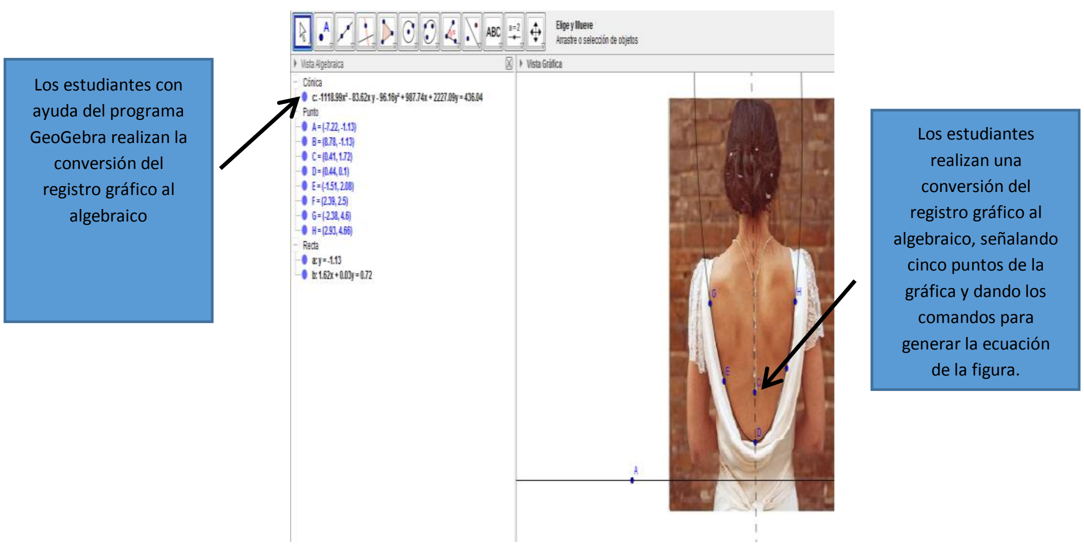
Categoría de análisis de Tratamiento: Los estudiantes realizan tratamiento cuando pasan de la ecuación canónica a la ecuación general de cada parábola dada. Se evidencio dificultades al realizar el tratamiento al interior del registro algebraico, dificultades al no realizar acciones con expandir el binomio al cuadrado, esto en cuanto los estudiantes no utilizaron la potenciación de expresiones algebraicas o los procedimientos para solucionar productos notables, se evidencia que aunque se realizó la ejemplificación con ejercicios similares, persistía el error.

Categoría de análisis de Conversión: Aunque esta actividad está diseñada para potenciar en los estudiantes la conversión al pasar del registro gráfico al registro algebraico y viceversa. Se evidencio que es una actividad donde los estudiantes presentaron mayores dificultades. Las dificultades encontradas consisten en no poder relacionar las dos coordenadas de los puntos que se les dieron pertenecientes al registro gráfico con la ecuación canónica de una parábola (registro algebraico), en palabras de Duval no existía una correspondencia entre los significantes del conjunto de salida (coordenadas cartesianas relativos al registro gráfico) con los significantes del conjunto de llegada (elemento de la ecuación canónica). La univocidad en este ejercicio solo se da entre el vértice y los valores de h y k de la ecuación canónica, mientras que el otro punto no encuentra ni correspondencia ni univocidad, lo cual no permite realizar la conversión entre dichos registros.

4.4. Actividad 4: Parábola con GeoGebra

La actividad cuatro consiste en que los estudiantes se apoyen en el uso de la tecnología para realizar las actividades cognitivas de formación de los diferentes registros de representación semiótica de la parábola, el tratamiento al interior de los diferentes registros, y la conversión entre los diferentes registros. En la Figura 26 se muestra la actividad realizada por un estudiante al analizar el escote de un vestido que tiene forma de parábola:

Figura 27: Uso de Geogebra



Fuente: Propia

Los estudiantes realizan conversiones desde el registro gráfico hacia el registro algebraico utilizando el programa GeoGebra. El programa les permite adjuntar una imagen y realizar el análisis algebraico tomando cinco puntos de la figura seleccionada, les muestra la curva que mejor representa la parábola y genera una ecuación de segundo grado.

Esta actividad permitió que los estudiantes obtuvieran los registros de la parábola a través del uso de la tecnología. Además, les permitió verificar las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión de la parábola y observar el registro algebraico como una ecuación de segundo grado diferente a la que utilizan al escribir la ecuación canónica y general. Esto se contrasta con lo afirmado por Duval (2006) el uso de software permite mostrar representaciones diferentes de forma rápida, lo cual le proporciona a los estudiantes conocer un rango de representaciones de la parábola y le permite ver el dinamismo de las transformaciones de las diferentes representaciones.

Categoría de análisis Formación: al construir la parábola a través GeoGebra los estudiantes logran la formación del registro gráfico, sus elementos y características. La actividad también permite la formalización del registro algebraico.

Categoría de análisis de Tratamiento: Los estudiantes realizan tratamiento cuando estando en el registro algebraico observan el cambio de la ecuación canónica a la general realizado por el programa.

Categoría de análisis de Conversión: Los estudiantes observan la conversión que realiza GeoGebra al pasar del registro grafico al registro algebraico.

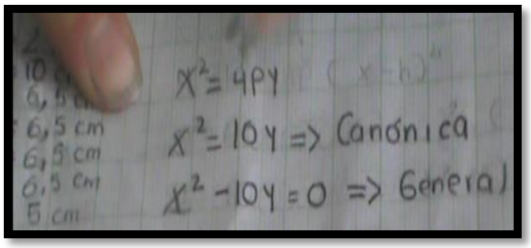
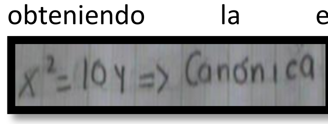
4.5. Actividad 5: Galería de proyectos

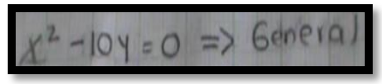
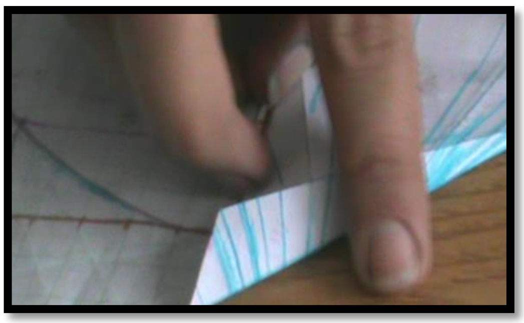
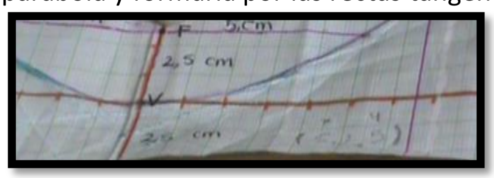
Para la actividad de cierre se realiza el diseño y construcción de un objeto que puede ser un puente, un vestido o una cocina solar. En esta actividad se busca observar el nivel de apropiación del concepto de la parábola que está estrechamente relacionado con la **Formación** de los diferentes registros de representación semiótica (lenguaje natural, gráfico, y algebraico), los **tratamientos** al interior de cada registro, y las **conversiones** entre registros.

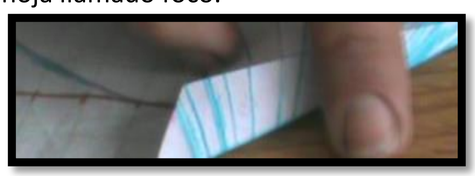
El análisis de los resultados para esta actividad se muestra en las Tablas 2 y 3. En la Tabla 2 se presentan los tratamientos al interior de cada uno de los registros analizados:

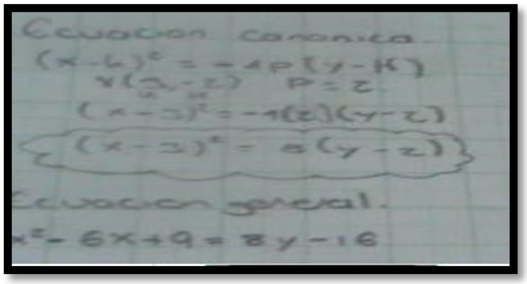
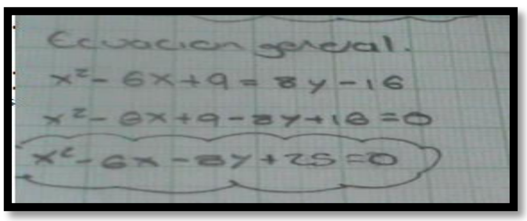
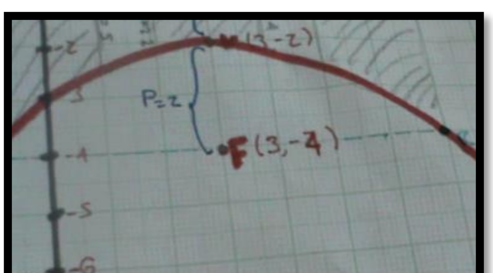
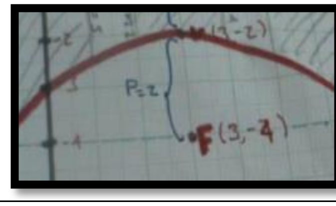
Tabla 2: Tratamientos de la parábola en cada registro.

Proyecto: Vestido	
Registro **Lengua común**	
Evidencia	**Análisis**
E_u: "la parábola como sección cónica es la unión de dos conos que al cortarlos paralelamente da la parábola y ya como lugar geométrico (…), que sea la misma distancia del punto A al foco y de A a la directriz"	El tratamiento ocurre cuando los estudiantes dan la definición de parábola como sección cónica: "la parábola como sección cónica es la unión de dos conos que al cortarlos paralelamente da como resultado la parábola" y luego dan la definición como lugar geométrico diciendo: "que sea la misma distancia del punto A al foco y de A a la directriz"(los estudiantes señalan con el dedo el punto A, el foco y la directriz y hacen relación a que el punto A está a la misma distancia del foco que a la directriz) Esta evidencia muestra como los estudiantes entrevistados realizan un tratamiento al interior del registro lengua común dando la definición de parábola como lugar geométrico y como sección cónica. Al respecto Duval (2004) afirma que un tratamiento es realizar una transformación de una representación de un estado inicial a un estado final sin cambiar de registro. La transformación se realiza al interior del registro lengua común y se da de manera verbal.

Registro Algebraico	
Evidencia	**Análisis**
 E_F: "la ecuación que utilizamos fue $(x\text{-}h)^2$=4p (y-k) que da x^2 =4py y pues aquí sacamos la ecuación canónica y la ecuación general" (los estudiantes escriben la ecuación canónica, realizan las operaciones y muestran como resultado del tratamiento algebraico la ecuación general de la parábola)	Los estudiantes realizan el tratamiento cuando pasan de la ecuación canónica a la general, este tratamiento se evidencia cuando afirman: "la ecuación que utilizamos fue $(x\text{-}h)^2$ =4p (y-k)" y se completa el tratamiento, cuando realizan la afirmación: "da x^2 =4py". Los estudiantes describen la forma como realizaron el tratamiento algebraico. Dicho tratamiento consiste en pasar de la ecuación canónica a la ecuación general. Uno de los aspectos importantes en el tratamiento es utilizar correctamente la transformación, lo cual implica que se cumpla con las reglas propias del trabajo algebraico, como es el orden en las operaciones, la transposición de términos, la reducción de términos semejantes y demás procesos que se utilizan para el despeje de ecuaciones. Los estudiantes analizan cuál es la ecuación que mejor se ajusta a su ejercicio, ya que pueden elegir entre la ecuación que se utiliza para parábolas con eje focal paralelo al eje "x", y la ecuación para parábolas paralelas al eje "y", y esto lo expresan cuando afirman: "la ecuación que utilizamos fue $(x\text{-}h)^2$ =4p (y-k)" (eligieron esta para trabajar con eje focal paralelo al eje y); redujeron a una expresión más sencilla cuando afirman:" da x^2 =4py" Dado que ubicaron la parábola en el origen, haciendo que el vértice sea (0,0). Reemplazaron el valor del parámetro (p=2.5) y el del vértice obteniendo la ecuación canónica:  luego igualaron a cero para así encontrar la ecuación general:

<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Registro:
Gráfico</td></tr>
<tr><th>Evidencia</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>
E_H: “también hicimos unos dobleces para confirmar que era una parábola”</td><td>Los estudiantes realizan un tratamiento al interior del registro gráfico, dicho tratamiento se muestra con la representación de la parábola de dos formas en este registro. Una es cuando realizan la parábola utilizando la relación entre los ejes coordenados, los estudiantes realizan el trazo de la parábola utilizando el vértice, el foco, y el lado recto, y el tratamiento lo realizan al obtener la misma parábola utilizando el método de doblado de papel para generar las envolventes de la parábola y formarla por las rectas tangentes.


Este nuevo registro se realiza doblando la hoja de tal manera que el borde inferior de la hoja (que representa la directriz) pase por un punto en la hoja llamado foco.

En este proceso las estudiantes muestran la parábola construida por dos tratamientos diferentes y que pertenecen al registro gráfico.
Duval (2006) afirma que en ocasiones es pertinente utilizar uno de los dos tipos de tratamientos, el tratamiento que se produce de forma discursiva, que está relacionado con el lenguaje y otro tratamiento que ocurre de forma visual.
Para el tratamiento visual realizado por las estudiantes se encuentra que, dentro del registro gráfico pasa de la parábola en el plano cartesiano a la transformación en el mismo registro, pero</td></tr>
</table>

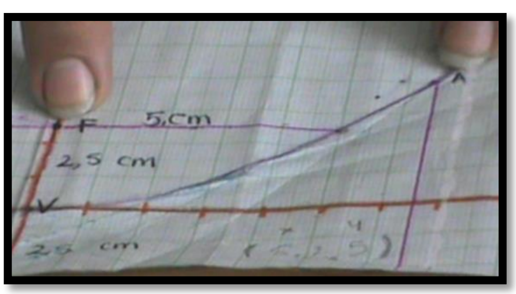
	construida a través del doblado de papel.
Actividad: Puente	
Registro Algebraico	
Evidencia	**Análisis**
  E_R: “Remplazar y tenemos la ecuación (muestra la ecuación donde remplazo el parámetro y el vértice) (…), digamos acá, para resolverlo, hay que tener en cuenta el cuadrado perfecto(el estudiante señala en la ecuación el valor del término “Y”), y a la 2(refiriéndose al cuadrado del número), y luego seguimos resolviendo y lo igualamos así (muestra el resultado obtenido)	El tratamiento algebraico que realizan los estudiantes se evidencia cuando describen la forma como pasan de la ecuación canónica a la general, esta descripción inicia cuando afirman: “Remplazar y tenemos la ecuación” (el tratamiento hecho por los estudiantes inicia con la elección de la ecuación adecuada, para este caso eligieron la ecuación canónica de las parábolas con eje focal paralelo al eje “y” y que abre hacia abajo. Muestran la ecuación donde remplazaron los valores del parámetro y el vértice) “Digamos acá, para resolverlo, hay que tener en cuenta el cuadrado perfecto(el estudiante señala en la ecuación el valor del término “Y”), y a la 2(refiriéndose al cuadrado del número), y luego seguimos resolviendo y lo igualamos así (muestra el resultado obtenido)” El tratamiento se realiza al interior del registro algebraico y ocurre al pasar de la ecuación canónica a la general. El proceso se registra de manera escrita realizando los procesos correctamente.
Registro Gráfico	
Evidencia	**Análisis**
 	Los estudiantes utilizan un tratamiento al interior del registro gráfico (visual), el tratamiento consiste en pasar de la representación gráfica del plano cartesiano a la construccion de la parábola en la maqueta. 

<table>
<tr>
<td>

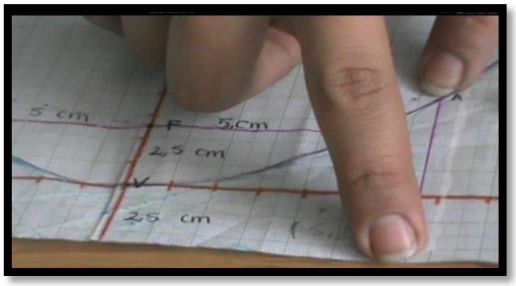
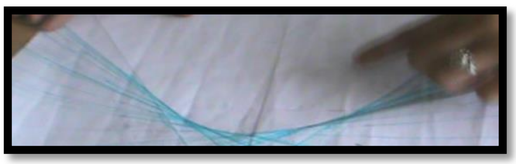
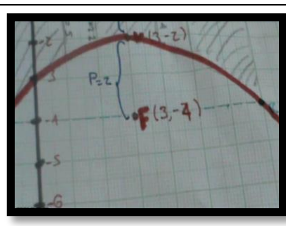
E $_M$: “hicimos la parábola trazando la directriz y el lado recto, después medimos la distancia desde la parábola hasta la directriz, para poder hacer el puente”</td>
<td>El registro gráfico en el plano cartesiano se realiza en el papel milimetrado utilizando elementos de la parábola como es el vértice, el foco, la directriz, y el lado recto.
luego es llevado a la maqueta donde solo se identifica la parábola.
Este tratamiento se realiza al interior del registro gráfico pasando de la representacion construida en el papel milimetrado a la construida en el puente.
</td>
</tr>
</table>

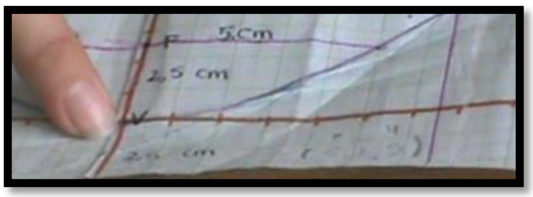
En la Tabla 3 se presentan las conversiones al interior de cada uno de los registros analizados:

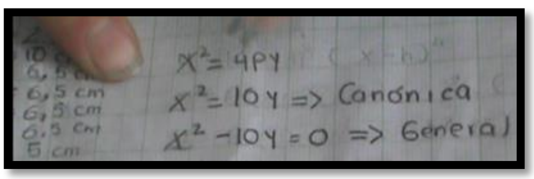
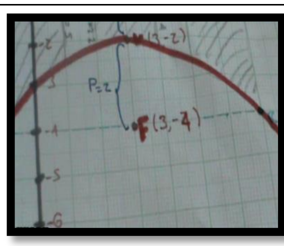
Tabla 3: Conversiones de la parábola.

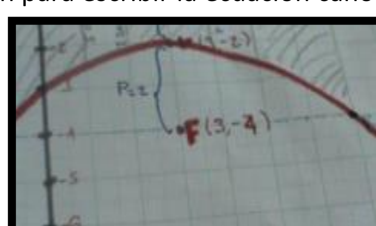
<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Actividad cognitiva
Conversión</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Registro
Gráfico - Lengua común</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Actividad:
Vestido</td></tr>
<tr><th>Evidencia</th><th>Análisis</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>En esta evidencia los estudiantes realizan la conversión entre el registro gráfico y la lengua común cuando señalan los elementos de la parábola en la gráfica que construyeron (registro gráfico) y describen verbalmente cada uno de dichos elementos como por ejemplo la directriz, el foco, el lado recto, y el parámetro; esto se puede evidenciar en la siguiente afirmación: “para comprobar que era parábola ubicamos unos puntos, que sea la misma distancia del punto A al foco, y de A, a la directriz”.

Otra de las conversiones que realizan las estudiantes entre estos registros, se presenta cuando realizan el doblado del papel y describen</td>
</tr>
</table>

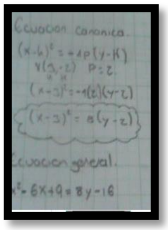
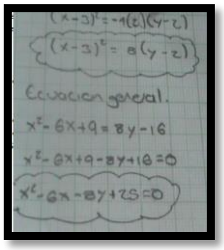
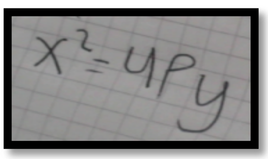
 E_H: “para comprobar que era parábola ubicamos unos puntos. Que sea la misma distancia del punto A al foco y de A a la directriz y también hicimos unos dobleces para confirmar que era una parábola” 	verbalmente dicha situación, como se evidencia en la siguiente afirmación: “hicimos unos dobleces para confirmar que era una parábola”. Duval (2004) afirma que la conversión se presenta al realizar una transformación de un objeto, una situación o una información de un registro de partida a otro registro de llegada.
Actividad: Puente	
 E_R: “Para hacer el puente ubicamos, el vértice en (3,-2) y el foco va en (3,-4)(el estudiante tiene dibujada una parábola en el papel milimetrado, es una parábola que abre hacia abajo, señala con el dedo la ubicación del foco y del vértice en las coordenadas indicadas), hicimos la parábola trazando la directriz y el lado recto (el estudiante señala la ubicación del lado recto y de la directriz) , después medimos la distancia desde la parábola hasta la directriz(señala un punto de la parábola y realiza el recorrido hasta la directriz), para poder hacer el puente, lo que nos dio lo multiplicamos por dos para poder hacer el puente. Y ya después para poder hacer el puente, juntamos las partes y las ubicamos”	Los estudiantes realizan una conversión pasando del registro gráfico al registro lengua común. Los estudiantes describen los elementos de la parábola extrayendo de la gráfica características de la parábola como el vértice, el foco, el parámetro y la directriz y describiendo el proceso de manera verbal utilizando las reglas del registro lengua común. Al momento de describir los elementos de la parábola modelada en su puente, pasan del registro gráfico al registro lengua común. Lo realizan a través de la lengua común utilizando expresiones propias de las matemáticas: “como es el vértice (señala en la maqueta correctamente la ubicación del vértice), la directriz, el lado recto y el foco está en el rio” 

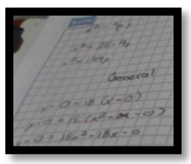
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Registro
Gráfico – Algebraico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad:
Vestido</td></tr>
<tr><td>Evidencia</td><td>Análisis</td></tr>
<tr><td>

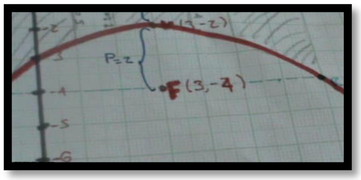
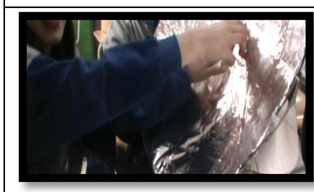
E_F : “la ecuación que utilizamos fue $(x\text{-}h)^2 = 4p\ (y\text{-}k)$ quedaba $x^2 = 4py$ y pues aquí sacamos la ecuación canónica y la ecuación general”

</td>
<td>Los estudiantes al construir el vestido realizan una conversión al pasar de la representación gráfica a la algebraica, dado que extraen elementos de la gráfica, como son el vértice y el parámetro, para reemplazarlos en la ecuación canónica de la parábola.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad:
Puente</td></tr>
<tr><td>Evidencia</td><td>Análisis</td></tr>
<tr><td>

E_M: “la parábola abre así (señala la construcción del puente y muestra que abre hacia abajo). Como abre hacia abajo, utilizamos, la fórmula $(x+1)^2=-4p\ (y+1)$, remplazamos y tenemos la ecuación”</td>
<td>Los estudiantes en la construcción del puente realizan una conversión al pasar de la representación gráfica a la algebraica, cuando extraen elementos de la gráfica, identifican las coordenadas del vértice, calculan el parámetro y los utilizan para escribir la ecuación canónica de la


parábola.
Extraen elementos de la gráfica de la parábola y construyen la ecuación canónica</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad:
cocina solar</td></tr>
<tr><th>Evidencia</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>
E_M : “la ecuación cambia por lo que esta vertical, es y= 4px a la dos es $x^2 = 4py$”


</td><td>En la actividad de la cocina parabólica los estudiantes tambien utilizaron una conversión del registro gráfico al algebraico, cuando utilizando los mismos elementos (vértice, parámetro. Lado recto) los reemplaza en la ecuación.
Ademas cuando afirma que: “esta vertical” refiriéndose a la representación de la gráfica de la ecuación$x^2 = 4py$”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Registro
Gráfica – Lengua común</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad:
Vestido</td></tr>
<tr><th>Evidencia</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>
E_F :“jugar con las medidas del parámetro, digamos ya podía ser 5 cm”</td><td>Los estudiantes en la construcción del vestido realizan una conversión al pasar de la representación gráfica a la lengua común, cuando a la pregunta ¿cuáles elementos de la parábola deben variar para obtener un vestido más grande, responden: que es necesario “jugar con las medidas del parámetro”, incluso proponen que la medida del parámetro puede ser de 5 cm.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad:
Puente</td></tr>
<tr><th>Evidencia</th><th>Análisis</th></tr>
</table>

 E_R: "si el parámetro crece, toca hacer un puente más grande. Y si lo hacemos a una distancia menor pus toca hacerlo más pequeño y además digamos, si cambiamos esta distancia (señala el parámetro) entonces cambia lo ancho del puente. (Señala el lado recto mostrando la relación entre el lado recto y el parámetro)"	Los estudiantes realizan una conversión al pasar de la representación gráfica a la lengua común, al preguntarles sobre la forma cómo podemos construir otro puente con otras medidas, ellos utilizan la gráfica para describir verbalmente los elementos de la parábola que deben modificar para construir un nuevo puente a partir del ya construido. Esto se evidencia al afirmar: "si el parámetro crece, toca hacer un puente más grande. Y si lo hacemos a una distancia menor pus toca hacerlo más pequeño y además digamos, si cambiamos esta distancia (señala el parámetro) entonces cambia lo ancho del puente. (Señala el lado recto mostrando la relación entre el lado recto y el parámetro)"
Actividad: Cocina parabólica	
Evidencia	**Análisis**
 E_J :" tiene que cambiar las medidas de todo, en la cartulina podemos hacer el borde externo menor, ya haría que cambiaran las medidas de acá (refiriéndose a modificar la longitud del parámetro) "	Los estudiantes realizan una conversión al pasar de la representación gráfica a la lengua común, cuando se les indaga por cuales medida se deben cambiar para obtener una cocina solar con mayor diámetro y afirman que para construir una nueva cocina solar más grande se cambia los valores del parámetro: "tiene que cambiar las medidas de todo, en la cartulina podemos hacer el borde externo menor, ya haría que cambiaran las medidas de acá (refiriéndose a modificar la longitud del parámetro)"

4.6. Conclusiones

- A medida que se realizaron las actividades de la secuencia didáctica se observó la comprensión del concepto de la parábola por parte de los estudiantes. La compresión del concepto de parábola que se evidencio en los estudiantes obedeció al trabajo pedagógico realizado en las actividades de la secuencia, esto se evidencia con mayor profundidad en la actividad número cinco donde los estudiantes utilizaron correctamente los registros de lenguaje natural, algebraico y gráfico al socializar sus proyectos. De igual a mediad que se realizó la secuencia de actividades y las retroalimentaciones se observó que la mayoría de los estudiantes realizaron de manera acertada los tratamientos al interior de cada registro y conversiones entre los diferentes registros. Es por esta razón que para el estudio de cualquier objeto matemático es importante que tanto los estudiantes como los docentes conozcan y utilicen los registros de representación semiótica, el tratamiento al interior de cada registro y la conversión entre registros.

- Al realizar las actividades cognitivas de Formación, tratamiento y conversión los estudiantes presentan mayor dificultad cuando deben realizar ejercicios donde se utilizan las conversiones entre registros. Esto se evidencio en los estudiantes al no realizar la conversión entre el registro gráfico, el algebraico y viceversa, esto se da al no encontrar una correspondencia entre las unidades significantes del conjunto de salida y las unidades significantes del conjunto de llegada. Además al no establecer la univocidad entre algunos elementos del registro gráfico y el registro algebraico. Esta dificultad se da por la no congruencia entre los registros. Lo cual se contrasta con lo afirmado por Duval (2004) cuando asevera que entre más correspondencia exista entre las unidades significantes del registro de salida con las del registro de llegada mayor congruencia habrá y la conversión se realizará con menor grado de dificultad. Por lo tanto, para el proceso de enseñanza es importante verificar la congruencia entre los registros y buscar conversiones intermedias entre aquellos registros donde se del fenómeno de no congruencia.

- Las actividades de enseñanza que involucran los intereses de los estudiantes y que permiten el trabajo con aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana favorecen la aprehensión de los objetos matemáticos. Para que el estudiante este motivado a aprender el material de aprendizaje debe tener significado y como lo expone Starico (2013) también debe ser comprensible.

- Las dificultades presentadas en el aprendizaje de la parábola al igual que con la enseñanza de cualquier otro objeto matemático, están relacionadas con los conceptos previos que deben tener los estudiantes, al igual que las formas en las que se enseña. Por ejemplo, en la investigación se encontraron dificultades en el uso del algebra y de la geometría. Por esta razón es importante que al iniciar la enseñanza de un nuevo concepto se realice un diagnóstico sobre los conocimientos previos de los estudiantes para poder construir la ruta más apropiada para cada uno de ellos.

- Para la comprensión del concepto de parábola es importante el uso de la teoría de registro de representación semiótica, ya que permite conocer diferentes registros de este objeto matemático, la coordinación entre dichos registros y la visibilización de las representaciones mentales de los estudiantes de dicho objeto. Esto se constata con lo que Duval afirma: "No hay noesis sin semiósis", esto es que, para la comprensión de un objeto matemático es necesario reconocer y utilizar sus representaciones lo cual implica que un estudiante realice las actividades de Formación, tratamiento y conversión. Esta investigación resalta la importancia de abordar estas actividades cognitivas para el estudio de objetos de las matemáticas.

- La intervención pedagógica sirvió para mejorar los procesos académicos de los estudiantes, esto se muestra en la calidad de los trabajos presentados por cada uno de ellos y especialmente en el nivel de apropiación del concepto de parábola como lugar geométrico.

- Al igual permitió la reflexión pedagógica como docente sobre la importancia del uso de la teoría de los registros de representación semiótica, ya que propicia el conocimiento de diferentes registros de un objeto, la coordinación entre registros, además ayuda a no confundir el objeto con sus representaciones, permite la economía en el uso de los tratamientos haciendo la generalización de los mismos, la utilización en el estudio de otros objetos matemáticos y la comprensión del objeto matemático en estudio.

4.7. Recomendaciones

- Para futuras investigaciones se recomienda profundizar en los niveles de aprendizaje que pueden lograr los estudiantes cuando se enfrentan a actividades con proyectos y diferenciar dichos niveles a partir de los diferentes registros de representación semiótica, tratamientos y conversiones que utilizan los estudiantes en el estudio de la parábola.

- Así mismo se recomienda realizar una investigación que permita analizar las concepciones que tienen los estudiantes y docentes sobre el aprendizaje de la parábola y la función cuadrática identificando las relaciones o las diferencias que presentan dichos conceptos de la matemática.

- Por otra parte, se propone profundizar sobre las diferentes herramientas tecnológicas que permiten construir la noción de la parábola y generar nuevos tratamientos y conversiones en los estudiantes. Esto ampliaría el estudio realizado sobre la parábola y complementaría con las representaciones semióticas que fueron encontradas en los estudiantes en el presente trabajo.

- Finalmente, un estudio que se considera importante, es la evaluación de las actividades y los aprendizajes de los estudiantes durante la construcción del concepto de parábola dado que en la mayoría de instituciones se realiza una evaluación tradicional lo cual afecta la participación de los estudiantes y el interés por aprender.

Reflexión Pedagógica

La labor docente requiere de estar en continua reflexión sobre el trabajo que se realiza con los estudiantes, las formas como se enseña, la forma como aprenden los niños y los nuevos aprendizajes que se deben construir en la enseñanza de las matemáticas.

Uno de los principios en el estudio de la presente investigación es la importancia que tiene para la comprensión de un objeto matemático, el estudio de la formación de los diferentes registros de representación semiótica, los tratamientos al interior de dichos registros, y las conversiones que se puedan darse entre registros. Realizar estas actividades cognitivas permite conocer los elementos, características del objeto matemático, además permite conocer los diferentes registros, la coordinación entre los mismos, no confundir el registro con sus representaciones, la economía de tratamiento al poder utilizar la más adecuada de las representaciones en determinas condiciones, generalizar para utilizarla en el estudio de otros objetos y posibles formas en las que se puede construir y enseñar los objetos matemáticos.

Desde mi labor docente es importante estar en continuo proceso de formación, de indagación, y de exploración, es así que las investigaciones pedagógicas me permiten estar actualizado con las formas como se está enseñando los diferentes objetos matemáticos, los nuevos recursos que permiten realizar mejores procesos de enseñanza aprendizaje.

En este sentido, es importante resaltar la importancia de la función del docente en planear, diseñar y aplicar las actividades en el aula que propendan por el aprendizaje significativo de tal manera que esas actividades tengan una intención clara que desarrolle conexiones con pre saberes, interiorización de nuevos conceptos y que apunten hacia la aplicación del conocimiento en su vida cotidiana, de tal manera que el aprender recobre sentido.

Por tanto y para que el estudiante esté motivado a aprender, el material de aprendizaje debe tener significado como lo expone Starico (2013) también debe ser comprensible y el estudiante debe disponer de conocimientos previos que le permiten interpretar y relacionar sus saberes con la actividad propuesta, por ello es necesario fortalecer los temas que ellos no entienden, así sea de cursos anteriores como en este caso las operaciones algebraicas.

Entonces, el estudiante está mejor capacitado para aprender cuando desea aprender y posee la comprensión y los conocimientos básicos relacionados con cada nuevo concepto que desea aprender (Delgado Ojeda, 2014).

Es más significativo el aprendizaje de las matemáticas para los estudiantes cuando manipulan objetos, discuten ideas y conceptos, además el trabajo en equipo les permite generar discusiones y argumentar sus ideas, afianzando sus pensamientos o declinándolos si los de sus compañeros los convencen. “Los aprendizajes serán más significativos mientras más realistas y fructíferas sean las conexiones que sepan organizar” (Starico de Accomo, 2013)

Las actividades aplicadas en el aula deben ayudar a los estudiantes a comprender las ideas, principios y las leyes fundamentales de las matemáticas, de igual manera se espera que estas actividades permitan explorar los intereses de los estudiantes y sus diversas aptitudes de tal forma que sean motivadoras y despierten la curiosidad intelectual lo que traería como consecuencia el deseo de aprender y la motivación suficiente para desarrollar cada una de las actividades propuestas de manera creativa cumpliendo con los objetivos planteados.

En las actividades donde los estudiantes deben aplicar sus nuevos saberes en la construcción de modelos como la elaboración del vestido, la cocina solar o el puente, ayudan a comprender de una forma más dinámica y llamativa el tema de las parábolas, Se puede decir que con estas actividades los estudiantes asumen una actitud más participativa en la construcción de su conocimiento, lo que no es tan evidente en la clase tradicional en donde hay solo explicación, ejemplos y ejercicios.

Ahora se espera que la comprensión de estos conceptos y su aplicabilidad en la vida le aporte también de manera general a su interés en la matemática y tener claro que los números son una herramienta fundamental para el desarrollo de saberes en muchos campos de la vida como la ciencia, la arquitectura, la ingeniería y el diseño y de esta manera les den el lugar, prioridad y agrado al aprendizaje de las matemáticas lo que traería como consecuencia, mejores resultados en las pruebas externas.

Bibliografía

Amaya, T., y Medina, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación matemática*, *25*(2), 119-140.

Calderón, A. (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas en el grado décimo de la institución educativa Villas de San Ignacio de Bucaramanga*(Tesis de Maestía).Universidad Nacional, Medellin, Colombia.

Dávila , M., De Alba, A., Hernández, P., & Antolin, A. (2013). *Secuencia didáctica para el aprendizaje de las figuras cónicas y sus diferentes representaciones*. CULCyT (50). Juárez, Mexico.

Delgado Ojeda, P. P. (2014). *Estrategias didácticas para corregirlos errores algebráicos en el grado 8-4 del Intituto Champagnat- Pasto*. Obtenido de http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/11689/Pedro%20Pablo%20Delgado%20Ojeda%20%20%28tesis%29.pdf?sequence=4&isAllowed=y

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Cali, Colombia:Universidad del valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1) 143-168.

Eliott, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus* (Tesis de Maestría). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

Flores, R. (2015). *Diseño instruccional para el aprendizaje de secciones*(Tesis de Maestría). Universidad de Carabobo, Bárbula, Venezuela.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Ciudad de México, México: Mac Graw Hill.

ICFES (2013). *Colombia en Pisa 2012: Informe Nacional De Resultados Resumen Ejecutivo*. Bogotá, Colombia. Recuperado de http://Resumen%20ejecutivo%20Resultados%20Colombia%20en%20PISA%202012.pdf

Lara Torres, I. M. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica* (Tesis de Maestría). Universidad Católica del Perú, San Miguel, Perú.

Lehmann, C. (2002*). Geometría Analítica*. Ciudad de México, México: Mac Graw Hill.

Lopes, S. P. (2014). *Uma sequência didática para o ensino de parábola enquanto lugar geométrico* (Tesis de Maestría). Universidad Católica del Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.

López, J. H., y Bermúdez, E. A. (2012*). La comprensión del concepto de parábola como una cónica*. 13° Encuentro Colombiano de Matemática educativa, 329-334, Medellin, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2332/1/LopezLacomprensiónAsocolme2012.pdf

Lupiáñez, J., y Moreno, L. (2001). *Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. Universidad de Granada, Granada, España.

Macías, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conecta, 2(4)*, 27 -57.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia.

Santa, Z., y Jaramillo, C. (Septi de 2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista virtual Universidad Católica del Norte*. *1*(31), 338-362.

Starico de Accomo, M. N. (2013). *Los proyectos en el aula hacia un aprendizaje significativo en una escuela para la diversidad*. Magisterio del Rio de la Plata, Argentina.

Tocto, E. (2016). *Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria*(Tesis de Maestría). Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Anexos

Actividad 1

Nombre de la actividad:

Batalla naval

Objetivo:

- Motivar a los estudiantes en el estudio de la parábola y sus representaciones
- Identificar los registros de representación semiótica: Registro gráfico

Tiempo:

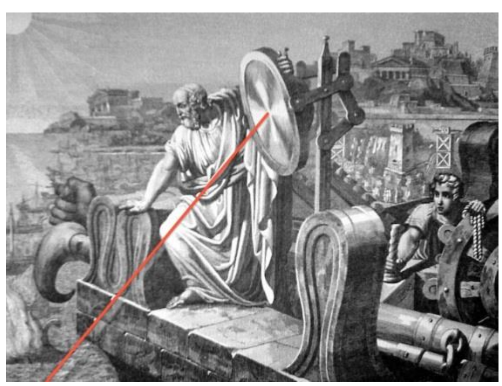
Dos sesiones de 100 minutos cada una

Materiales:

Barco de papel, espejos, marcadores, reglas, escuadras, cordones y láser

Descripción de la actividad:

Los estudiantes se dividirán en dos grupos de trabajo, construirán un barco de papel, que se le entrega al grupo contrario, y luego diseñaran una estrategia para destruir el barco de sus oponentes, las condiciones es utilizar todos los espejos y láser para concentrarlos en un solo punto del barco. El que consiga cumplir esta regla ganara el juego. Se presentara el video el rayo de Arquímedes para que los estudiantes puedan tener un elemento para relacionar con la parábola y terminar la actividad cumpliendo con el objetivo de reconocer elementos de la parábola y su definición.



Fuente:http://blogs.lainformacion.com/futuretech/files/2011/09/def43.jpg

Momentos de la actividad:

- Reglas del juego
- Primer batalla
- Video: el rayo de Arquímedes
- Segunda batalla
- Retroalimentación de la actividad: registro gráfico de la parábola, propiedad de reflexión de las parábolas

Actividad 2

Nombre de la actividad:

Construcción de la Parábola

Objetivo:

- Construir la Parábola como lugar geométrico
- Conocer la definición de la parábola como lugar geométrico y sección cónica
- Identificar los registros de representación semiótica: Registro gráfico y lenguaje natural

Tiempo:

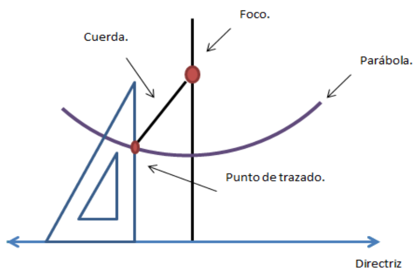
Una sesión de 100 minutos

Materiales:

Octavo de cartulina, escuadra, regla, cuerda y marcadores.

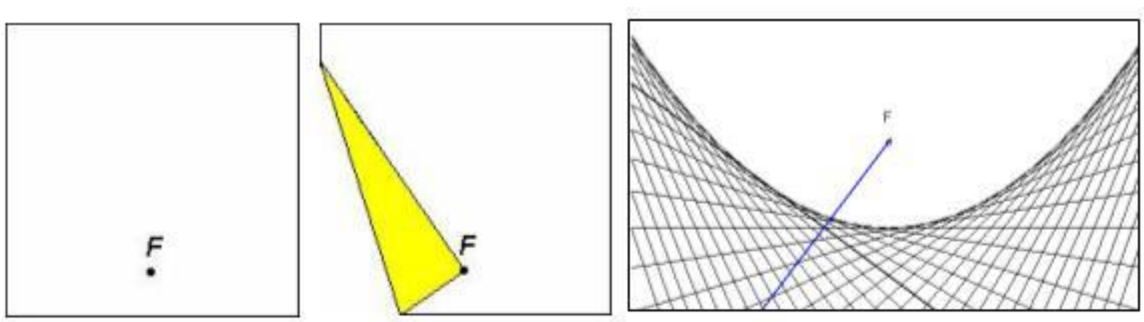
Descripción de la actividad:

Los estudiantes trazan un punto sobre el octavo de cartulina y una recta (directriz), se une la cuerda en una esquina de la escuadra y el extremo opuesto de la escuadra se desliza sobre la regla que está colocada sobre la directriz. Mientras que se desliza la escuadra, con el lápiz se realiza el trazo tensionando en un punto de la cuerda.



Fuente: http://prepafacil.com/cobach/uploads/Main/puntotraz2.gif

Terminado este proceso se realiza dobleces en la cartulina de tal forma que la directriz pase por el foco en varias ocasiones y variando la pendiente de inclinación de la directriz



Fuente:http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml__get__d3a959e4-c856-11e0-8280-e7f760fda940/imagenes/image005.jpg

Momentos de la actividad:

- Instrucciones de construcción
- Construcción por parte de los estudiantes
- Retroalimentación de la actividad: Registro gráfico de la parábola, Registro lenguaje natural de la parábola definición como lugar geométrico y diferenciación con sección cónica

ACTIVIDAD 3

Nombre de la actividad:

Parábola, registros, tratamientos y conversiones

Objetivo:

- Dar a conocer los registros de representación semiótica de la Parábola.
- Realizar tratamientos al interior de los registros lenguaje natural, lenguaje algebraico, y gráfico.
- Realizar conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica de la parábola.

Tiempo:

Cuatro sesiones de 100 minutos cada una

Materiales:

Tablero, marcadores, cuadernos, esferos, lápices.

Descripción de la actividad:

El docente realiza la formación de los diferentes registros de representación semiótica de la parábola dando la definición como lugar geométrico y sección cónica (lenguaje natural), sus ecuaciones (lenguaje algebraico) y sus gráficas (gráfico). Realiza tratamientos al interior del registro lenguaje natural al pasar de la definición de la parábola como sección cónica a lugar geométrico. Otro tratamiento que se realiza es pasar de la ecuación canónica a la general y un tratamiento al interior del registro gráfico. Se realizan conversiones entre los diferentes registros. Se realizan ejemplos y los estudiantes trabajan sobre la guía dada aplicando lo visto en las sesiones anteriores.

Momentos de la actividad:

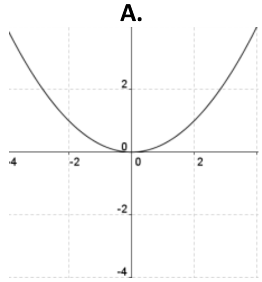
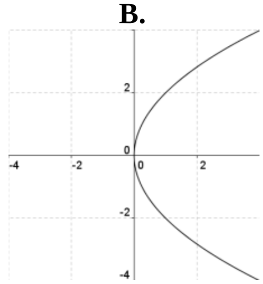
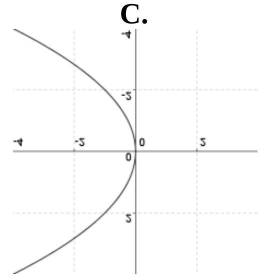
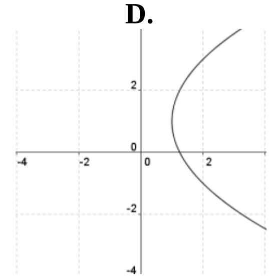
- Formación por parte del profesor de los registros de representación semiótica del parábola, tratamientos al interior de cada registro, y conversión entre registros
- Solución de la guía de formación, tratamiento y conversiones por parte de los estudiantes.
- Retroalimentación de la actividad

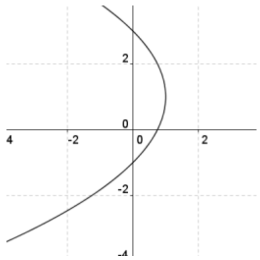
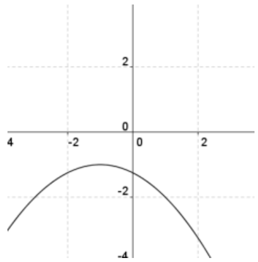
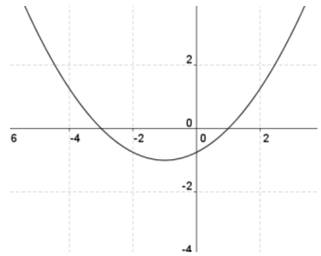
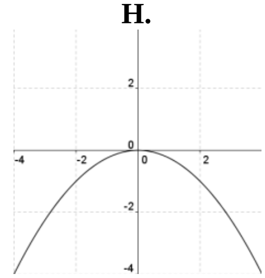
Guia:Parábola, registros, tratamientos y conversiones

Nombre: ____

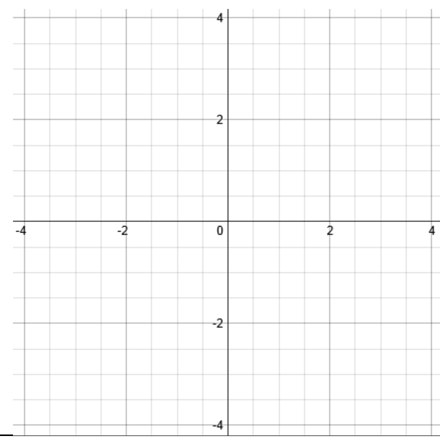
En las preguntas 1 y 2 marcar la respuesta que considere correcta

1. Una parábola:
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante.
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que la distancia entre cada uno de ellos y un punto fijo es igual a su distancia hasta una linea fija.
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que las distancias a un punto fijo es constante.
   - Es la reunion de todos los puntos del plano, tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante.
2. Una parábola:
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano es perpendicular al eje de la superficie del cono.
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano es paralelo a la generatriz del cono.
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano es transversalmente al cono.
   - Es la curva obtenida por la interseccion de un plano con un cono recto, cuando el corte del plano corta dos cono rectos opuestos.
3. Relacionar cada gráfica de la parábola con su ecuacion canónica:

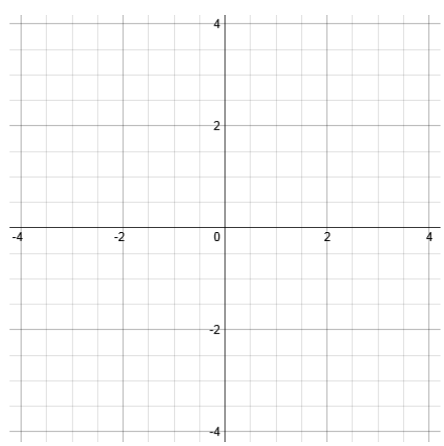
Ejemplo:1.$y^2=4x$ **<u>B</u>**	**2.$(x+1)^2=-4(y+1)$**	**3. $x^2=-4y$**	**4.$(y-1)^2=4(x-1)$**
5.$(y-1)^2=-4(x-1)$	**6.$x^2=4y$**	**7.$y^2=-4x$**	**8.$(x+1)^2=4(y+1)$**
A. 	**B.** 	**C.** 	**D.** 

E.	F.	G.	H.
			

4. Escriba la ecuacion de la parábola y su gráfica, de acuerdo a la información: Vértice en (2,-1) y Foco en (2,1).

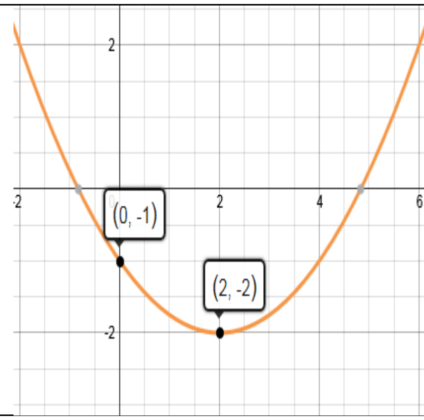
Ecuación Canónica: Ecuación general:	Gráfica: 

5. Grafique, escriba el foco, el vértice y la directriz de la parábola que tiene por ecuación:

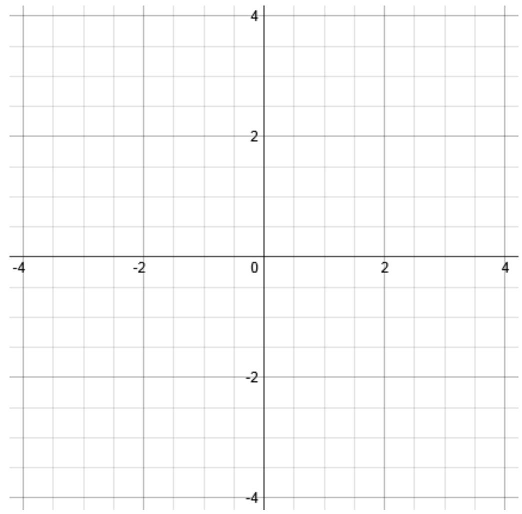
Ecuación Canónica: $(x - 2)^2 = 4 (y - 3)$ Foco (,) Vértice (,) Directriz y = ______ Ecuación general:	Gráfica: 

6. Escribir la ecuación canónica y general:

Ecuación Canónica:	Gráfica:

Ecuación general:	

7. Solucionar el siguiente problema:

Se utilizará un espejo con forma de paraboloide de revolución para concentrar los rayos del sol en su foco, creando una fuente de calor. Si el espejo tiene 20 de diámetro en su extremo y 6 de profundidad, ¿en dónde se concentrará la fuente de calor?  Procedimiento:	Gráfica:  Describa el proceso que realizo:

Actividad 4

Nombre de la actividad:

Parábola con GeoGebra

Objetivo:

- Utilizar la herramienta de GeoGebra en el estudio de la parábola
- Construir los registros gráficos y lenguaje algebraico con GeoGebra

Tiempo:

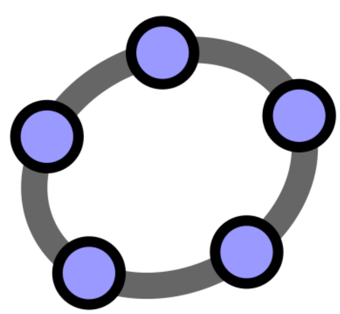
Una sesión de 100 minutos.

Materiales:

Computadores portátiles con el programa de GeoGebra, imagen de un puente, un vestido o una cocina solar con forma de parábola.

Descripción de la actividad:

La actividad que deben realizar los estudiantes consiste en utilizar el programa de GeoGebra para construir los registros semióticos de la parábola, los registros gráficos y lenguaje algebraico. Además realizar el análisis de la foto o la imagen con la cual van a realizar la actividad de cierre. Deben descargar una imagen, colocarla en el programa GeoGebra, y graficar cinco puntos para que el programa dé la ecuación de la parábola que está formando la figura. Esta actividad le ayuda al estudiante a diseñar y construir la cocina solar, el vestido o el puente para la actividad final.



Fuente:https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/57/GeoGebra.svg/2000px-GeoGebra.svg.png

Momentos de la actividad:

- Instrucciones sobre el uso de GeoGebra
- Analizar la imagen del proyecto con GeoGebra
- Retroalimentación de la actividad: se realiza durante toda la sesión por los grupos de trabajo, se analiza el registro gráfico y el algebraico.

Actividad 5

Nombre de la actividad:

Galería de Proyectos

Objetivo:

- Evidenciar la utilización de los diferentes registros de representación semiótica de la parábola pro parte de los estudiantes.
- Evidenciar los tratamientos y conversiones que utilizan los estudiantes en el uso de la parábola para construir su objeto.

Tiempo:

Dos sesiones de 100 minutos.

Materiales:

Trabajos realizados por los estudiantes, puentes, vestidos y cocinas solares.

Descripción de la actividad:

Los estudiantes presentan los trabajos realizados durante el período, exponen las evidencias del diseño y construcción del objeto escogido ya sea el puente, el vestido o la cocina solar. Los estudiantes exponen los registros de representación de la parábola utilizados, las trasformaciones y las conversiones realizadas.

Momentos de la actividad:

- Exposición de los trabajos, retroalimentación de la actividad la cual se da durante la exposición de cada grupo.

Entrevista vestido 1

Estudiante 1: buenos días, vamos a exponer sobre la parábola

Estudiante 2: ósea hicimos la parábola, que es el cuello de nuestro vestido

Estudiante 1: pues, lo primero, la parábola como sección cónica es la unión de dos conos que al cortarlos paralelamente da la parábola, y ya como lugar geométrico la hicimos de la, manera como la hicimos acá lo primero que ubicamos fue nuestro foco, nuestro vértice y sabemos que nuestro parámetro es de 2,5 entonces al saber eso ya empezamos a cuadrarlo para q nuestro lado recto nos da 10.

Estudiante 2: para comprobar que era parábola ubicamos unos puntos, que sea la misma distancia del punto A al foco y de A a la directriz y también hicimos unos dobleces para confirmar que era una parábola

Estudiante 1: y ya sabiendo que esta es una parábola, que está totalmente comprobado hicimos la ecuación

Estudiante 3: la ecuación que utilizamos fue (x-h)2 =4p (y-k) quedaba x2 =4py y pues aquí sacamos la ecuación canónica y la ecuación general.

Estudiante 1: ya teniendo este pasamos a los moldes

Estudiante 2: para diseñar nuestro vestido

Estudiante 3: lo primero que hicimos fue coger, esta parábola que hicimos acá y

Profesor: se puede superponer

Estudiante 3: y de la parábola pues ya hacemos el tronco del vestido, la falda

Estudiante 1: y obtuvimos este lindo vestido2. Acá es donde se ve la parábola el resto fue imaginación para construir el resto del vestido

Profesor: Esta es la parábola la de la gráfica, la puedes colocar ahí, coloca encima el vestido.

Estudiante 2: bueno aprendimos

Profesor: bueno yo tengo una pregunta, coloca el vestido otra vez por favor este vestido está diseñado para una niña pequeña o una muñeca,

Estudiante 1, 2, 3: Para una niña pequeña

Estudiante 2: para nuestras hermanas, mejor dicho

Profesor: Si yo quisiera se colocaran ese vestido que tendrían que hacer |desde las matemáticas

Estudiante 2: jugar con las medidas del parámetro, digamos ya podía ser 5 cm

Estudiante 1: para que nuestro lado recto fuera 20cm

Estudiante 3: fuera más grande y así el cuello del vestido sería más grande

2. 5*4 20_

Profesor: En este vestido me pueden señalar algunos elementos de la parábola.

Estudiantes 1, 2, 3: Si claro el lado recto, el vértice

Entrevista 2 Puente 1

Estudiante 1: nosotros empezamos a hacer la parábola en un plano (SEÑALA LA PARÁBOLA CON EL DEDO Y RECORRE SU FORMA) y de ahí nos basamos para hacer estas parábolas (señala las parábolas localizadas encima del puente)

Pues no se puede decir que está bien hechas por la hicimos con palos de paleta entre lazados y los forramos con fomi

Estudiante 2: en el puente ehh… En las imágenes que pudimos observar se veían bases que sostenían el puente, en total son cuatro bases… eh que tienen las misma forma que tienen estos palitos de paleta. Conformando así la estructura del puente, y también gracias a las parábolas que están (señala la estructura que está formada por las parábolas) que son las que la sostiene también, esto (señala las parábolas) también está apoyado como bases, ósea,… donde… en total tiene 10 bases, la sostenibilidad del puente, ya que las parábolas que también sirven para una buena decoración del puente, porque pues no , no hay puentes así en el mundo ese es el único, también sirve de apoyo para un buena estructura

Estudiante 3: vamos viendo acá (señala el vértice la parábola) en el punto de la parábola, vemos que acá este es el vértice vemos que acá es el foco (señala el piso del puente), vemos que acá por la parte de arriba (realiza un trazo imaginario con la mano sobre las parábolas) tenemos una línea imaginaria que se llama directriz, que pasa: aquí estamos cuatro centímetros

Estudiante 2: hasta acá (el estudiante le corrige la posición)

Estudiante 3: de acá a acá hay 8 (el estudiante señala la distancia entre el vértice y el piso del puente) si y de lado a lado hay 16.

Profesor: ¿Dónde están los 16?

Estudiante 1: esta de acá a acá (el estudiante señala el lado recto de la parábola indicando que allí están los 16 cm)

Estudiante 2: sino que, como el fomi y los palos se volvieron muy gruesos entonces no da espacio para que de los 16, pero cuando lo medimos si da la medida

¿Lo medimos?

Profesor: colóquelo

Estudiante 2: (los estudiantes realizan la medida con un metro del lado recto, cuya medida es de 16 cm)

Profesor: ¿Dónde estaría el foco?

Estudiante 2: el foco está aquí (el estudiante señala en un punto medio de la línea que hizo con el metro) y los 4 más arriba la directriz (el estudiante realiza un movimiento mostrando un punto por encima del vértice)

Estudiante 1: nuestro pensar era que la carretera iba pasar por el foco, pero, lo que ocurrió fue que hicimos las bases muy pequeñas al ver que cuando la hicimos más grandes pues no quedo un puente así simétrico sino como puntiagudo.

Profesor: ¿Para qué querían que la carretera pasara por el foco?

Estudiante 1: para tener una mayor guía

Profesor: esta parábola que tienes ahí (el Profesor: señala la parábola construida en el papel milimetrado)

Exacto, es esta misma parábola (el Profesor: señala las parábolas del puente), si yo pudiera súper poner estas dos (se coloca la parábola del papel milimetrado para que coincida con un de las parábolas del puente), me quedaría la parábola

Estudiante 2: sí señor,

Estudiante 1: lo ¿despegamos?

Si es fácil, sí; o si es muy difícil no

Estudiante 2: el estudiante despega una del as parábolas del Puente

Profesor: (los estudiantes desprenden una pieza de la maqueta y la colocan sobre el papel milimetrado hacienda que coincidan)

Profesor: y ahí podemos chequear que tú me decías que vale 16

Profesor: de aquí a aquí hay 16 (el Profesor: señala la directriz que esta dibujada en el papel milimetrado)

Estudiante 2: si señor

Profesor: (los estudiantes señalan que la magnitud del lado recto es de 16 cm midiéndolo con el metro)

Profesor: bueno les tengo una pregunta, para que la piensen, que pasa si yo quiero agrandar la maqueta. Pensándolo matemáticamente y pensándolo en la parábola.

De pronto agrandando (hace movimientos con las manos indicando agrandar las bases del puente)

Profesor: ¿Qué tengo que hacer? , matemáticamente hablando y refiriéndolos a las parábolas que creen ¿qué tenemos que hacer?

Estudiante 1: primero hacer un plano, el plano cartesiano que es la base y que nos ayude a hacer la parábola, y dándole distintas coordenadas probando distintos números para averiguar (realiza un movimiento con la mano para indicar la forma de la parábola)

Estudiante 2: yo tengo otra dadas las medidas de nuestra maqueta seria aumentarlas o doblarlas dependiendo a que escala lo vamos a hacer, digamos que lo vamos a hacer el doble,   elevar todo el resultado a la dos (mueve las manos indicando aumento al abrir las manos y señala con la representación del doble haciendo), estaría cambiando el resultado y el tamaño de la maqueta.

Profesor: ustedes han nombrado varios elementos de la parábola, cierto, han nombrado el vértice, el foco, el lado recto, sin nombrarlo, pero han hablado que es 16, el parámetro que es la distancia entre el vértice y el foco, que elemento podría yo cambiar de esos que estoy nombrando, para variar el tamaño de esta parábola (el Profesor: señala la parábola de la hoja).

Estudiante 3: el foco

Profesor: ¿Cambio el foco?

Estudiante 3: digamos como, digamos, si crece el foco, entonces, digamos la distancia de los lados es mayor

Profesor: pero, ¿es el foco?

Estudiante 1: no, creo que sería el parámetro

Estudiante 3: Ah, sí, el parámetro

Profesor: el foco es un punto,

Estudiante 3: si el parámetro se agranda se agrandaría la parábola

Profesor: bueno bien, puedo construir, la ecuación y general

Estudiante 3: si

Entrevista 2 Puente

Estudiante 1: para hacer el puente ubicamos, el vértice en (3,-2) y el foco va en (3,-4) (el estudiante tiene dibujada una parábola en el papel milimetrado, es una parábola que abre hacia abajo, señala con el dedo la ubicación del foco y del vértice en las coordenadas indicadas), hicimos la parábola trazando la directriz y el lado recto (el estudiante señala la ubicación del lado recto y de la directriz) , después medimos la distancia desde la parábola hasta la directriz(señala un punto de la parábola y realiza el recorrido hasta la directriz), para poder hacer el puente, lo que nos dio lo multiplicamos por dos para poder hacer el puente. Y ya después para poder hacer el puente, juntamos las partes y las ubicamos

Estudiante 2: la parábola abre así y la ubicamos (señala la construcción del puente y muestra que abre hacia abajo). Como abre hacia abajo utilizamos, la fórmula que es utilizamos la que es (x+1)2= -4p (y+1).

Profesor: ¿Puedo ver?

Estudiante 1: aquí está, (señalan en el papel milimetrado las ecuaciones que escribieron)

Estudiante 2: remplazara y tenemos la ecuación, a mí me había explicado el Profesor: Ángel, el año pasado o en octavo, cuando digamos ,acá para resolverlo hay que tener en cuenta el cuadrado perfecto(el estudiante señala en la ecuación el valor del término "Y")y, y a la 2, y luego seguimos resolviendo y lo igualamos así, (el estudiante describe el proceso que está desarrollado en el papel milimetrado, habla de la utilización del producto notable , binomio al cuadrado ,describe la propiedad distributiva de la multiplicación y señala todo los paso has mostrar la ecuación canónica y genera).

Profesor: como construyeron. Donde está la parábola en su maqueta en su diseño (los estudiantes señalan en la parte inferior de la maqueta, recorriendo el perímetro de la parábola). Como la construyeron

Estudiante 1: cada distancia de acá (el estudiante señala la distancia que une un punto de la parábola con el eje "x" perpendicular mente, además sobre el eje "x" se encuentra la directriz de la parábola) es un palo de estos, (el estudiante señala la bases de la maqueta que sostiene el puente). Acá mide 4cm (señala las bases del puente) multiplicamos por 2 4x2, y esto mide ocho. Dejamos un espacio como de 5 cm

Estudiante 2: de todos modos empatamos dos iguales para pegarlos

Estudiante 1: después ubicando para crear la figura

Profesor: ya. Tenemos la parábola pueden mostrarme en su dibujo en su representación, elementos de la parábola

Estudiante 2: vértice (señala en la maqueta correctamente el vértice), LA DIRECTRIZ, el lado recto

Profesor: el foco está en el rio. Que distancia hay entre el vértice y el foco

Estudiante 1: entre el vértice y el foco hay2,…. 4

Profesor: y que distancia hay entre el vértice y la directriz

Profesor: y eso se nota en su parábola

Estudiante 1: si

Profesor: a donde estarían, cuáles serían esas distancias, señala.

Estudiante 1: 4cm de acá y 4cm de acá (ubica su dedo en vértice de la parábola e indica que la distancia desde el vértice hasta la base es de 4 cm, al igual que desde el vértice hasta la carretera) SI ESTO (SEÑALA LA CARRETERA)

En la ecuación me dio 2 pero multiplicamos por 2.

Profesor: para la escala, trabajan por escala. Una pregunta, si yo quisiera hacer más grande o más pequeña el puente, que elementos de la parábola cambiaria. Estamos hablando de elementos de la parábola. Porque lo que ustedes hicieron es bien, ósea ustedes construyen desde su representaciones el papel milimetrado de la gráfica, construyen o modelan su puente, y para llevar es cambio esa transición hacen un factor de escala, duplicando cada cantidad, eso es des el factor de escala, pero si yo lo quiero hacer desde la trigonometría, desde las secciones cónicas, concretamente desde la parábola. Que elementos de la parábola podemos cambiar para ampliar mi puente y hacerlo más pequeño, etc.

Estudiante 2: puede ser el vértice desde donde comienza la parábola, pues si la distancia entre el vértice y el foco es más grande obviamente el puente va ser más grande el puente

Profesor: ósea cambio el vértice_ y ya

Estudiante 2: la distancia entre el vértice y el foco y a la directriz, que es la misma distancia

Profesor: ustedes se acuerdan como se llama esa distancia_

Estudiante 1, 2: el parámetro

Profesor: el parámetro empecemos a hablar de parámetro, si yo vario el parámetro que pasa

Estudiante 2: si el parámetro crece, toca hacer puente más grande. Y si lo hacemos a una distancia menor pus toca hacerlo más pequeño.

Profesor: el parámetro de usted es de, en el papel milimetrado es de 2 cm y en la maqueta es de 4cm, *Estudiante 2:* y además digamos, si cambiamos esta distancia (señala el parámetro entonces cambia lo ancho del puente. (Señala el lado recto mostrando la relación entre el lado recto y el parámetro)

Profesor: bueno, dice la teoría que una parábola como lugar geométricos el conjunto de los puntos del plano, que están a la misma distancia es un punto llamado foco y una línea llamad directriz, si, de acuerdo. Por eso aparece el parámetro que es la distancia del foco al vértice y es la misma a la directriz. En su maquete está a 4cm. Pero si yo tomo cualquier otro punto de la parábola que ustedes tienen en su maqueta (se señala la parábola de la maqueta) por ejemplo este. Yo podría verificar que las distancia son iguales, por ejemplo este yo podría verificar que de aquí (señala un punto en la parábola del puente) a su foco que de estar acá hay la misma distancia que del punto a la directriz

Estudiante1: pues son la mismas medidas supongo que si

Profesor: si es una parábola si, la pregunta es lo hicieron. Por ejemplo este punto que es aquí (punto externo de la parábola) ese es fácil de medir.

Entrevista 3 Cocina solar

Estudiante 1: nosotros hicimos una cocina solar

Estudiante 2: tiene una parábola, primero hicimos la parábola las medidas

Estudiante 1: hicimos la parábola de 10 en 10 para que nos rindiera, para que quedara como queríamos

Estudiante 2: esta fue la medida que utilizamos (señala el plano cartesiano con el dibujo de la parábola y lo compara con el perfil de la cocina solar)

Estudiante 1: también encontramos un problema al hacer esto, entre más chiquito nos complicaba más, la ubicación de la parábola.

Estudiante 2: aquí está la parábola (señala la parte externa de la cocina), podemos decir que el foco está ubicado (señala con la mano un punto fuera de la construcción para indicar que es el foco) o podría estar acá (señala el perfil de la de la estructura en la que se coloca el papel aluminio), hay 16 pedazos entonces abrían 8 parábolas.

Profesor: yo tengo una pregunta, la parte superior, esta que está aquí arriba (señala el vértice externo de las parábolas de la maqueta) la parte externa e interna es ¿paraboloide? El contorno externo es una ¿parábola? Y el interno es una ¿parábola?

Profesor: yo diría que es un paraboloide, ya que la forma se muestra (realiza la forma de la parábola con las manos)

Estudiante 2: este pedazo puede ser un paraboloide, pero en este espacio (señala el vértice de la superficie reflejante) tuvimos que colocar más papel porque se nos deshacía, entonces no quedaba la parábola

Profesor: describa los elementos de la parábola en su construcción

Estudiante 1: este se supone que es el vértice (señala el interno de la parábola) porque es de donde inicia la parábola

Estudiante 2: el foco quedaría a esta distancia (señala con las manos un punto exterior)

Profesor: hay dos parábola una interna el contorno y otra externa la superficie reflejante, como podríamos hacer una cocina más pequeña, que elementos de la parábola tendríamos que cambiar.

Estudiante 1: reduciría las medidas de todo de la directriz, si cambia la directriz tiene que cambiar el foco y el vértice,

Profesor: ¿Cómo se llama esa distancia?

Estudiante 2: tiene que cambiar las medidas de todo, en la cartulina podemos hacer el borde externo menor, ya haría que cambiaran las medidas de acá (del parámetro)

Estudiante 1: ¿podrían construir la ecuación canónica de la parábola?

Estudiante 1: la ecuación cambia por lo que esta vertical, es y= 4px a la dos

Profesor: es x2 = 4py

Estudiante 2: entonces que así

Estudiante 1: así