colección
CÁTEDRA

Cálculo integral

Cálculo integral

Ricardo Cano Macías

segunda edición

Universidad de La Sabana

Cálculo integral

colección
CÁTEDRA

Cálculo integral

Ricardo Cano Macías

Segunda edición

Universidad de La Sabana

Cano Macías, Ricardo
Cálculo integral/Ricardo Cano Macías. – Segunda edición. – Chía: Universidad de La Sabana, 2017.
250 p. ; cm. (Colección Cátedra)

ISBN 978-958-12-0419-9
doi: 10.5294/978-958-12-0419-9

1. Cálculo 2. Cálculo integral 3. Análisis matemático 4. Integrales generalizadas I. Cano Macías, Ricardo II. Universidad de La Sabana (Colombia) III. Tit.

CDD 515.43 CO-ChULS

Universidad de La Sabana

Edición
Dirección de Publicaciones Campus del Puente del Común Km 7, Autopista Norte de Bogotá Chía, Cundinamarca
Tels.: (571) 8615555-8616666 Ext. 45001
http://unisabana.edu.co
publicaciones@unisabana.edu.co

Segunda edición: febrero de 2017
ISBN 978-958-12-0419-9
doi: 10.5294/978-958-12-0419-9

Diseño de cubierta
María Paula Berón

Diagramación
Rodrigo Taborda

Impresión
Xpress Estudio Gráfico y Digital S.A.

A HELENA, mi hermosa y amada madre

Por su infinito, puro e incondicional amor

En memoria de mi querido abuelo

VÍCTOR MANUEL CANO TRUJILLO

(1920 - 1996)

Índice general

Prólogo **13**

Agradecimientos **15**

Introducción **17**

1. La integral **19**

1.1. El problema del área 19

1.2. Propiedades de las sumas finitas 21

1.3. Definición de integral definida 24

1.4. Propiedades de la integral definida 28

1.5. Teorema fundamental del cálculo (TFC) 30

1.6. La integral indefinida 34

1.7. Ejercicios 36

1.8. Problemas de valor inicial 41

1.9. Ejercicios 48

2. Técnicas de integración **55**

2.1. Sustitución u 56

2.2. Integración por partes 65

2.3. Sustitución trigonométrica 72

2.4. Fracciones parciales 84

2.5. Sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ 99

3. Integrales impropias 107

3.1. Límites infinitos de integración 107

3.2. Integrandos infinitos 112

3.3. Criterios de convergencia y de divergencia 117

3.4. Ejercicios 123

4. Aplicaciones de la integral 129

4.1. Área entre curvas 129

4.2. Volúmenes 141

4.3. Longitud de arco 166

4.4. Áreas de superficies de revolución 172

4.5. Momentos y centros de masa 177

A. Inducción matemática 193

A.1. Principio de inducción matemática 193

A.2. Ejercicios 196

B. Regla de L'Hôpital 199

B.1. Ejercicios 205

C. Integrales trigonométricas 207

C.1. Integrales de las funciones trigonométricas 207

C.2. Integrales de productos y potencias de funciones trigonométricas 227

C.3. Ejercicios 242

Índice alfabético **245**

Bibliografía **249**

Prólogo

Uno de los grandes logros de la mente humana en el siglo XVII fue el desarrollo del cálculo. Su punto de partida es el estudio del movimiento de los objetos, el cual es considerado como un problema de razón de cambio y que geométricamente corresponde al problema de determinar la recta tangente a una curva. Los métodos de solución de este tipo de problemas son conocidos como el cálculo diferencial. Por otra parte, el cálculo integral trata de resolver el problema inverso, es decir, encontrar la ecuación de la curva a partir de las propiedades de sus tangentes; o en otras palabras conocida la razón de cambio de una cantidad, determinar la cantidad acumulada en un intervalo o en cierto dominio. Es precisamente en los procedimientos para dar solución a esta clase de cuestiones que trata el presente texto.

La segunda edición de este texto mantiene los objetivos fundamentales que dieron origen a la primera: servir de guía de aprendizaje y texto de referencia de un curso tradicional universitario de cálculo integral para estudiantes de ingeniería, ciencias y economía. Para ello, el autor a partir de su experiencia docente ha seleccionado cuidadosamente de los libros citados en la bibliografía un gran número de ejercicios y problemas de aplicación y expone en forma sencilla, concisa y matemáticamente rigurosa los principales conceptos, métodos y aplicaciones del cálculo integral, ilustrados a partir de numerosos ejemplos resueltos paso a paso, lo que permite al estudiante reconocer y aprender las diferentes técnicas y conceptos necesarios para resolver exitosamente diversos problemas del cálculo integral y optimizar así su aprendizaje.

En esta segunda edición se ha hecho una revisión exhaustiva de la primera: se han corregido ciertos errores, se han revisado los ejemplos y agregado algunos más, se han aumentado el número de ejercicios y problemas propuestos en cada sección, se incluye también la demostración del teorema fundamental del cálculo (parte 1) que no aparecía en la primera edición y el tema de integrales trigonométricas desarrollado en el capítulo 2 de la primera edición se incluye como el apéndice C. Además, introduce un nuevo capítulo de aplicaciones (áreas bajo curvas, volumen de sólidos de revolución, longitud de curva, área de superficie de revolución, momentos y centros de masa y el primer teorema de Pappus).

Desde el punto de vista docente, el libro es una excelente opción para aquellos que buscan una referencia de acceso rápido, comprensible y precisa de los temas fundamentales del cálculo integral diferente a los textos tradicionales sobre el tema.

Jorge Mauricio Ruiz Vera

Profesor Asociado

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento al doctor Edgar Mayorga B., quien tuvo la amabilidad y paciencia de revisar la versión final de este texto y hacer valiosas recomendaciones. De igual manera, quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a mi amigo, el doctor Jorge Mauricio Ruiz V., quien realizó la evaluación final y gentilmente escribió el prólogo a esta segunda edición.

Deseo agradecer inmensamente a la Universidad de La Sabana y en particular a la Facultad de Ingeniería por el apoyo brindado para la realización de este proyecto, y sin el cual hubiera sido imposible terminar y publicar este texto.

Agradezco de antemano enviar los comentarios, sugerencias y correcciones que permitan mejorar este texto al correo electrónico ricardo.cano@unisabana.edu.co

Introducción

En este texto se presentan en forma detallada y sencilla los conceptos fundamentales del cálculo integral, los cuales se ilustran con variados ejemplos.

Está dirigido a los estudiantes del curso de Cálculo Integral que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de La Sabana y pretende ser un apoyo más en el aprendizaje de dichos temas.

Además del aporte que este texto hace a los procesos formativos de los estudiantes al servir como material de apoyo y trabajo, contribuye a través de los diversos ejemplos que se presentan, ejercicios y problemas propuestos como trabajo independiente, al desarrollo de las competencias que las matemáticas deben generar y potenciar.

El capítulo 1 inicia con el problema de determinar el área de una región plana y a través de su solución, se formula la definición de integral definida como el límite de una suma de Riemann. Se establece también la conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial mediante el teorema fundamental del cálculo y la noción de problema de valor inicial.

En el capítulo 2, se hace un desarrollo completo de las técnicas básicas de integración, ilustrando cada método con diversos ejemplos.

En el capítulo 3, se presenta la noción de integrales impropias y algunos criterios básicos para determinar convergencia o divergencia, acompañados de diversos ejemplos que complementan dichos conceptos.

El capítulo 4 está dedicado a las aplicaciones fundamentales de la integración, como son problemas de áreas, sólidos y sólidos de revolución, longitud de curva entre otros, ilustrados con diversos ejemplos.

Finalmente, se incluyen los apéndices A, B y C, los cuales están dedicados a la inducción matemática, regla de L'Hôpital y a un completo desarrollo de las integrales trigonométricas, respectivamente.

A través de todo el texto, se presentan diversos ejemplos y al final de cada tema principal una selección de problemas de aplicación y ejercicios para ser resueltos por los estudiantes como complemento de su trabajo independiente.

Miguelito a Mafalda

Hoy mi maestra nos enseñó que dos más

dos son cuatro. Luego nos hizo pasar a varios

chicos al pizarrón para que sumáramos:

dos más dos: cuatro. Después tooooodos copiamos

en nuestros cuadernos: dos más dos: cuatro.

Te juro que nunca me sentí tan lejos de von Braun [1]...

Quino: Mafalda

[1] Wernher von Braun. Físico e ingeniero alemán, experto en proyectiles. A cargo del proyecto Apolo de la NASA, desarrolló los cohetes Saturno y el módulo lunar que hicieron posibles los primeros alunizajes.

Capítulo 1

La integral

Así como el **cálculo diferencial** se fundamenta en el concepto de *derivada*, el cual surge de manera natural al solucionar el problema de determinar la ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ sobre la curva, el **cálculo integral** se fundamenta en el concepto de *integral* que surgirá de manera análoga al intentarse resolver el problema de definir y calcular el área de una región $\mathcal{D}$ limitada superiormente por la gráfica de una función continua $f(x)$, e inferiormente por el eje $x,\ x \in [a, b],\ a, b \in \mathbb{R}$.

La importancia de la integral radica en los diversos problemas en que esta surge y permite resolver como, por ejemplo, problemas que implican velocidad, crecimiento de poblaciones, áreas de regiones generales, volumen de sólidos, longitud de arco, área de una superficie y centro de gravedad, entre otros.

El teorema principal de este capítulo es el *teorema fundamental del cálculo*, el cual establece la relación que existe entre la derivada y la integral.

1.1. El problema del área

Sea $\mathcal{D}$ la región limitada superiormente por la gráfica de una función continua $y = f(x)$, inferiormente por el eje x, a la izquierda por la recta vertical $x = a$ y a la derecha por la recta vertical $x = b$, como se muestra en la figura 1.1. PROBLEMA A RESOLVER: DETERMINAR EL ÁREA DE LA REGIÓN $\mathcal{D}$.

Antes de resolver dicho problema, es necesario dar algunas definiciones previas.

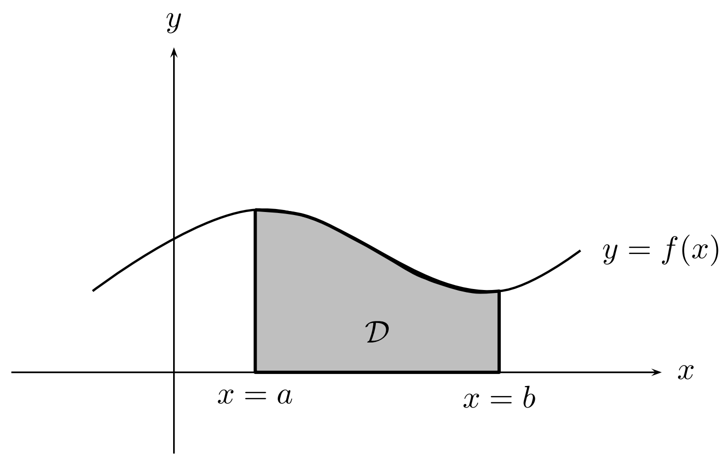

Figura 1.1.

Definición 1.1. *Una partición* $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *del intervalo* $[a, b]$ *es una división del intervalo en un número finito de subintervalos de la forma*

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$*, y donde,* $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$*, para* $i = 1, 2, \cdots, n$*, es la longitud de cada uno de dichos subintervalos.*

Ejemplo: Sea $I = [0, 1]$, entonces

$$\mathbb{P}_1 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}, \qquad \mathbb{P}_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\},$$
$$\mathbb{P}_3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, 1\right\}, \qquad \mathbb{P}_4 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\},$$

son particiones del intervalo $[0, 1]$.

Definición 1.2. *Sea* $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *una partición del intervalo* $[a, b]$*. Se denomina norma de* $\mathbb{P}$ *y se denota por* $\|\mathbb{P}\|$*, a la longitud del subintervalo más largo de la partición* $\mathbb{P}$*.*

Así, del ejemplo anterior se sigue

$$\|\mathbb{P}_1\| = \frac{1}{3}, \quad \|\mathbb{P}_2\| = \frac{1}{4}, \quad \|\mathbb{P}_3\| = \frac{1}{3}, \quad \|\mathbb{P}_4\| = \frac{1}{5}.$$

Definición 1.3. *Sea* $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *una partición del intervalo* $[a, b]$. *La partición* $\mathbb{P}$ *se denomina* regular *si* $\Delta x_i = \Delta x = \left(\frac{b-a}{n}\right)$, *para* $i = 1, 2, \cdots, n$. *Es decir, si* todos los subintervalos de la partición $\mathbb{P}$ tienen igual longitud.

NOTA: En el ejemplo anterior, $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_4$ son particiones regulares.

Definición 1.4 (Sumas finitas)**.** *La notación* $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *(se lee "suma de* a_i*, desde* $i = 1$ *hasta* $i = n$*"), denota la suma finita* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. *Las* a_i *son los* ***términos*** *de la suma:* a_1 *es el primer término,* a_2 *es el segundo término,* a_i *es el* $i-$*ésimo término, y* a_n *es el* $n-$*ésimo término.* i *es el* ***contador de la suma*** *y recorre los enteros desde 1 hasta* n. *El número 1 es el* ***límite inferior de la suma;*** *el número* n *es el* ***límite superior de la suma.***

1.2. Propiedades de las sumas finitas

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i.$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k a_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad k \in \mathbb{R}.$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k = kn, \quad k \in \mathbb{R}.$

Ejemplo: Suma de los primeros n enteros

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Ejemplo: Suma de los primeros n cuadrados

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

Ejemplo: Suma de los primeros n cubos

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}.$$

Ahora sí, podemos resolver el problema planteado inicialmente.