Optimización de Portafolios de Inversión Considerando Momentos Superiores a la Varianza

Universidad de la Sabana

Escuela Internacional de Ciencias Económicas y Administrativas

Maestría en Gerencia de Inversión

César Augusto González Acosta

Asesor de tesis:

Dr. José Eduardo Gómez González

Julio 2022

Resumen

Comparamos los resultados de diferentes métodos de construcción de portafolios de inversión donde cambiamos la medida de riesgo utilizada. Utilizamos el modelo de media-varianza de Markowitz, donde se toma la varianza/desviación estándar como manera de medir el riesgo de los activos, y se compara con una variación de este modelo donde tomaremos momentos de la distribución superiores a este como medida de riesgo (asimetría y curtosis).

Obtenemos composiciones de portafolios formados de manera muy diferente según cada medida de riesgo utilizada, vemos los beneficios que hace considerar momentos más altos de la distribución aparte de varianza y qué tan conveniente es tomar diferentes definiciones de riesgo para la construcción de portafolios, así como las limitantes que pueden tener estas definiciones. Es importante considerar la forma de la distribución de los retornos de los portafolios para optimizar resultados.

Encontramos oportunidades de diversificación por países y por sectores según el perfil de riesgo y preferencias del inversionista.

1. Introducción

Uno de los temas fundamentales en finanzas es la óptima asignación de activos en una cartera o portafolio de inversión. Para resolver este problema, se han creado muchas aproximaciones. Markowitz (1952), Merton (1969), Sharpe (1966), Black-Litterman (1992).

Como consideración general, los inversionistas buscan minimizar el riesgo del portafolio para un deseado nivel de retorno. Como resultado los inversionistas pueden encontrar el grupo de portafolios óptimos con ese nivel de riesgo y establecer la frontera eficiente de los activos, como Markowitz sugiere.

Ya que la economía está en constante cambio y propensa a muchas caídas impredecibles y a que los mercados pueden mostrar cambios imprevistos de un momento a otro, el inversor debe estar preparado para enfrentar diferentes tipos de riesgos, en nuestro caso, riesgo financiero. Es entonces cuando la diversificación le da al inversionista la herramienta adecuada para obtener un buen comportamiento del portafolio aun cuando se expone a choques individuales en sus activos. Entre mejor diversificadas estén los portafolios mejor podrán enfrentar estos choques.

Harry Markowitz en 1952 en su publicación "Portfolio selection" observó que un inversionista no sólo debe tener en cuenta la rentabilidad esperada más alta, sino también el riesgo que implica esta inversión. Esto lo llevó a solucionar el problema de encontrar un portafolio con el máximo retorno esperado a un nivel de riesgo dado. También demostró que la diversificación de un portafolio no consiste simplemente en el número de activos que lo componen, sino también en la correlación de los retornos de esos activos. Su modelo está basado principalmente en dos variables: riesgo y retorno esperado de los activos.

Menciona que un inversor debería evaluar portafolios alternativos basándose en sus rendimientos esperados y en su desviación estándar. Entendiendo entonces que, como medida de riesgo solamente tendremos varianza/desviación estándar, y los resultados de los portafolios obtenidos dependerán completamente de esta medida.

Sin embargo, la literatura sobre toma de decisiones muestra que, si el inversionista es averso al riesgo, preferencias de riesgo de orden superior como prudencia y templanza pueden determinar su comportamiento y toma de decisiones (Trautmann y Van de Kuilen, 2018).

La literatura acerca de este tema muestra que la prudencia está fuertemente relacionada con la asimetría de los retornos (Harvey y Sidique 2000; De Roon y Karehnke, 2018). Y el cuarto momento (curtosis) tiene que ver con la templanza (Deck y Schlesinger 2013).

En términos generales la *prudencia* para un inversionista dice que este tenderá a favorecer la acumulación de riqueza para encarar el riesgo, y pondría poco peso en activos riesgosos.

En cuanto a la *templanza*, el inversionista al enfrentarse a un riesgo inevitable reduciría los otros riesgos que pueda controlar, incluso cuando estos riesgos son independientes del primero. Es decir, buscaría minimizar el riesgo al que se expone de la manera que le sea posible.

Dando evidencia de que valdría la pena para un inversor tomar en cuenta diferentes medidas de riesgo para hacer más eficiente la diversificación y optimización de su portafolio. Adicionalmente, cada medida estadística refleja una medida de riesgo diferente, así que es importante no considerar únicamente los dos primeros momentos centrales de la distribución, y considerar tanto asimetría y curtosis, como otras diferentes medidas de riesgo si es posible para la construcción de portafolios.

La asimetría está relacionada con la probabilidad de caídas de mercado, mientras que la curtosis está relacionada con la realización de eventos extremos en el mercado (Damodaran 2006).

Algunos estudios advierten perdidas de utilidad que podrían deberse por ignorar momentos de orden superior de la distribución de los retornos, ya que esto puede llevar a invertir demasiado en activos muy riesgosos (Cvitanié, Polimenis, y Zapatero, 2008).

Inversionistas que son aversos al riesgo prefieren generalmente una asimetría positiva y distribuciones de retornos con poca probabilidad de cambios grandes en el precio (curtosis baja) (Skrinjaric 2014).

El objetivo de este escrito es ir más allá de considerar la varianza de los retornos de los activos y empezar a tomar en cuenta la distribución de estos como medida de riesgo, su asimetría (skewness), la cual nos da mucha información con respecto al comportamiento de los activos, así como la curtosis, la cual de manera similar nos da un información diferente acerca de los retornos de los activos y su comportamiento que si solo utilizáramos la varianza como medida, razón por la que el portafolio media-varianza con máximo ratio de Sharpe lo utilizaremos como referencia (benchmark).

Como mercado de análisis se utilizará el mercado latinoamericano. Se tomarán acciones de los principales índices accionarios de Brasil, México, Chile, Colombia y Perú para tener una representación del mercado latinoamericano. Hacemos una optimización considerando precios diarios en el periodo de 2011 a principios de 2020, para evitar que el periodo de Covid-19 aumente los valores de volatilidad y riesgo. Posteriormente hacemos una optimización similar, pero del periodo de 2011 a agosto 2021 para poder ver diferencias entre los portafolios en estos periodos.

Tomamos los catorce activos con más peso de cada índice accionario, esto nos permite tener un mercado diversificado que pueda ver el mercado latinoamericano en general y no concentrarnos solo en una industria o sector económico.

Hacemos una simulación Monte-Carlo en Python para obtener los portafolios que deseamos con su medida de riesgo seleccionada.

Las preguntas de investigación que busca contestar este escrito son: ¿Qué tanto varían los portafolios al considerar momentos como asimetría y curtosis para su optimización? ¿Se obtienen portafolios con mejores rendimientos o características que valgan la pena para el inversionista?

Este escrito se compone de seis secciones. Siendo la presente introducción la primera sección, en segundo lugar, la revisión de literatura, donde vemos las bases de la teoría que componen la teoría moderna de portafolios de Markowitz (MPT) y momentos superiores de la distribución como medida de riesgo, en tercer lugar, procedimiento de la optimización y aplicación de los modelos; donde explicamos como se hizo la optimización para obtener los diferentes portafolios y como aplicamos las fórmulas y teorías en nuestro software, cuarto lugar exposición de resultados; mostramos los portafolios obtenidos dadas las diferentes consideraciones tomadas como riesgo, en quinto lugar conclusiones; donde damos comentarios, opiniones finales sobre el tema y sobre los resultados obtenidos, finalmente un anexo donde incluimos el gráfico de los portafolios simulados.

2. Revisión de literatura

2.1 Modelo de media-varianza de Markowitz

Harry Markowitz fue uno de los primeros que puso énfasis en practicar la diversificación de portafolio, proporcionando así un fundamento conceptual al análisis de inversiones de portafolio. Según Markowitz: “un modelo eficiente es aquel que tiene un mínimo riesgo, para un retorno dado, o equivalentemente un portafolio con un máximo retorno para un nivel de riesgo dado”.

En 1952 expone la teoría moderna de portafolio por primera vez, y explica el comportamiento de inversión en términos matemáticos en su modelo de optimización (1959). Poniendo como base el supuesto de que los inversionistas generalmente son adversos al riesgo. Lo que significa que para aceptar más riesgo el inversionista debe obtener mayor rendimiento.

Markowitz argumentaba que para formar portafolios de inversión había que considerar los movimientos relacionados que tienen los activos dentro del portafolio, es decir su covarianza. Por lo tanto, la varianza de un portafolio depende de la varianza de los retornos de los activos. Razón por la cual se le denomina "modelo de media-varianza" al modelo presentado por Markowitz.

Con base en esto llega a la conclusión de que la integración de activos con covarianzas diferentes dentro de un portafolio permite disminuir el riesgo de la inversión. De manera que, los activos que dan correlaciones negativas entre si, deberían ser seleccionados para ser incluidos en el portafolio, así el riesgo total del portafolio sería reducido (Markowitz 1952).

Consideraciones que hace el modelo de Markowitz

1) Los inversores buscan maximizar su retorno esperado
2) Todos los inversores son adversos al riesgo, y solo aceptarán mayor riesgo si son compensados con mayor retorno.
3) Las decisiones de inversión se basan en el retorno esperado y el riesgo.
4) Todos los mercados son perfectamente eficientes. Esto es, sin impuestos ni costos de transacción
5) Asume que la distribución de los retornos es normal

2.2 Retorno esperado

El cálculo del retorno esperado es el primer paso en el modelo de selección de portafolio de Markowitz.

Para predecir retornos futuros de un activo o un portafolio, se suelen tomar los rendimientos históricos, o del periodo de interés.

El retorno esperado, también conocido como retorno promedio, podría verse simplemente como el promedio histórico de los retornos de un activo en un periodo de tiempo (Benninga 2006). Los cálculos para los activos dentro de un portafolio implican calcular el promedio de los retornos esperados individuales.

El retorno esperado E[rp] del portafolio es una suma de variables aleatorias (donde el inversionista elige los pesos de cada activo en su portafolio). Y se describe de la siguiente manera:

$$E[r_p] = \overline{r_p} = \sum_{i=1}^{n} W_i \, \overline{r_i} \tag{2.1}$$

Donde $E[r_p]$ es el retorno esperado del portafolio, r_i el retorno del activo i, W_i es el peso del activo i dentro del portafolio. Y esto es una sumatoria que va desde i=1, hasta n número de activos incluidos en el portafolio.

2.3 Varianza del retorno del portafolio

En el modelo media-varianza se toma la volatilidad de un activo de dos maneras: varianza y desviación estándar. Que por facilidad de interpretación, el valor de la desviación estándar es el que se utiliza mayormente

En el contexto de un portafolio, la varianza mide la volatilidad de un activo o un grupo de activos. Entre más grande la varianza, nos indica mayor volatilidad. Cuando se tienen muchos activos en un portafolio, los activos que están perdiendo valor son “equilibrados” en el portafolio por los que van aumentando en valor, minimizando así el riesgo. Por lo tanto, la varianza total de un portafolio de activos es siempre menor que la varianza de cada activo sumada individualmente. Incrementar el número de activos en un portafolio mejora su Frontera eficiente, explicando que los retornos de estos activos tienden a cancelarse, sugiriendo que la varianza del retorno total del portafolio será menor que la suma individual de ellas (Frantz y Payne 2009).

Una vez que el número de activos es muy grande, la varianza total se vería más afectada por la covarianza entre los activos (Schneeweis, Crowder y Kazemi, 2010). Esto es significante ya que reafirma la hipótesis de que es más importante como se comportan los activos en relación de unos con otros dentro del portafolio.

La varianza del portafolio se puede estimar de la siguiente manera (Burcu Aracioglu 2010):

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad i \neq j \tag{2.2}$$

Donde $\sigma_p{}^2$ es la varianza del retorno del portafolio, w_i es el peso del activo i, w_j el peso del activo j, σ_i la desviación estándar del activo i, σ_j es la desviación estándar del activo j, $\rho_{ij}=$ es el coeficiente de correlación entre los retornos de i y de j.

La varianza del portafolio es la sumatoria de los pesos de todos los activos incluidos en el portafolio, multiplicados por la desviación estándar de todos los activos dentro del portafolio.

Y la desviación estándar del portafolio simplemente sería:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} \tag{2.3}$$

La podemos representar también de forma matricial:

$$\sigma_p = \sqrt{w^T \Sigma w} \tag{2.4}$$

Donde W son los pesos de los activos, W^T es la matriz transpuesta de los pesos de los activos, Σ es la matriz varianza-covarianza de los retornos.

2.4 Frontera eficiente

En 1952 Harry Markowitz introdujo el concepto de frontera eficiente, la cual es la representación gráfica de la mejor combinación de portafolios dados un rendimiento esperado y riesgo. Donde:

-El rendimiento esperado del portafolio será el promedio de los retornos esperados de los activos que lo componen.

-El riesgo del portafolio se obtiene multiplicando el peso que tendrá cada activo en el portafolio por sus covarianzas. Esto representado en forma matricial.

Dado que hay una combinación infinita de *rendimiento esperado – volatilidad* en un solo portafolio, nos da en teoría infinitas posibilidades para elegir el peso de los activos y el riesgo que se podría tomar. Es por eso que, la frontera eficiente tiene una gran importancia, ya que esta frontera es una curva, y en esa curva están representados los portafolios con las mejores combinaciones posibles para esos activos en particular, por lo que es depende del inversor decidir qué postura le es más conveniente tomar con respecto al riesgo que está dispuesto a aceptar, o qué estrategia tiene planeada, dado que cada nivel de riesgo le dará un diferente nivel de rendimiento.

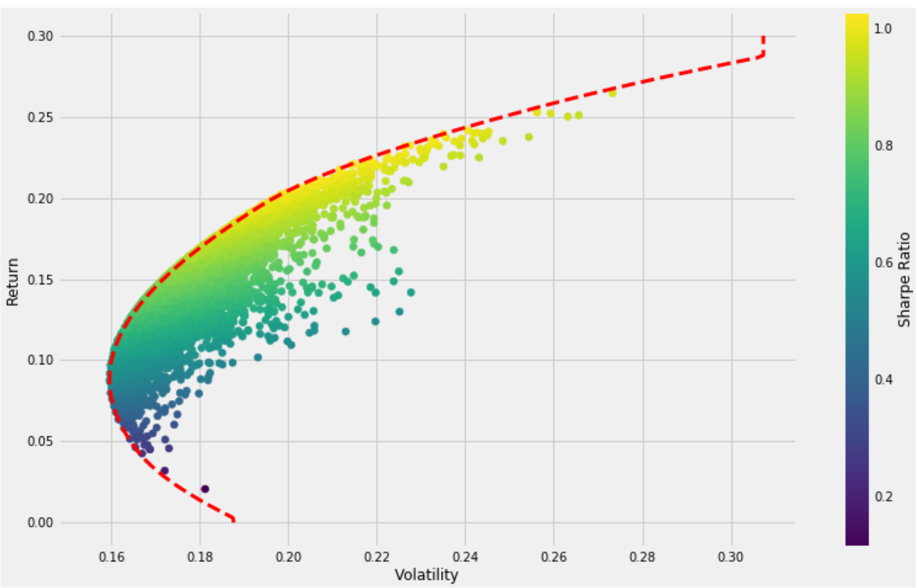

Figura 1. Grafica representativa de la frontera eficiente

Donde en el eje X se muestra la volatilidad o riesgo del portafolio, en el eje Y nos dice el retorno esperado del portafolio (generalmente retorno anual).

En la línea punteada roja están las mejores representaciones del portafolio en términos de riesgo-rendimiento. Lo que significa que los portafolios que se encuentren dentro de la curva, o sea, que no sean parte de la curva roja, no deberían considerarse eficientes y deberían desecharse, ya que esto significaría que para cada punto dentro del área de la curva existirá por lo menos un portafolio en la frontera eficiente que tendrá riesgo menor y/o retorno esperado superior. Los portafolios en la frontera eficiente se llaman portafolios óptimos (Ha Haifeng 2010).

Normalmente se utiliza el ratio de Sharpe para saber qué tan eficiente es un portafolio, ya que este ratio es una relación entre riesgo y rendimiento.

El índice o ratio de Sharpe nos dice el retorno adicional que recibimos por el riesgo o desviación estándar extra que aumenta al tener un activo riesgoso en el portafolio. Por lo que si se toma un mayor nivel de riesgo se debería tener una compensación apropiada con respecto al rendimiento. Se busca tener un ratio de Sharpe alto, preferiblemente mayor a 1, ya que indica una mejor relación riesgo-retorno.

Para el cálculo del ratio de Sharpe se utiliza la siguiente formula:

$$\mathrm{RS} = \frac{R - R_f}{\sigma} \tag{2.5}$$

Donde RS es el ratio de Sharpe, R es la rentabilidad del activo, R_f es la rentabilidad del activo libre de riesgo y σ la desviación estándar que representa el riesgo del activo.

2.5 Momentos estadísticos centrales

2.5.1 Asimetría

Es importante saber dónde están localizados los datos, y encontrar un valor que mejor describa a todo el conjunto de datos a analizar. Hay tres maneras principales de aproximarse; media, mediana y moda. Donde, la media es la suma de los datos dividido sobre el número de datos, también se le conoce como el promedio.

La mediana es el valor que se encuentra a la mitad de los datos de la muestra, o sea, que a su izquierda está la mitad del conjunto de datos y a su derecha la otra mitad. La moda es el valor que se repite más veces, es decir, el de mayor frecuencia. Estás tres medidas son necesarias para determinar la asimetría de una muestra (G. Cobb y Moore D. 1997).

La asimetría mide qué tanto se desvía o difiere la distribución de probabilidad de una variable aleatoria de una distribución normal. Una distribución normal es simétrica, por lo tanto, se considera asimétrica a una distribución inclinada o concentrada a la izquierda o a la derecha de la mediana.

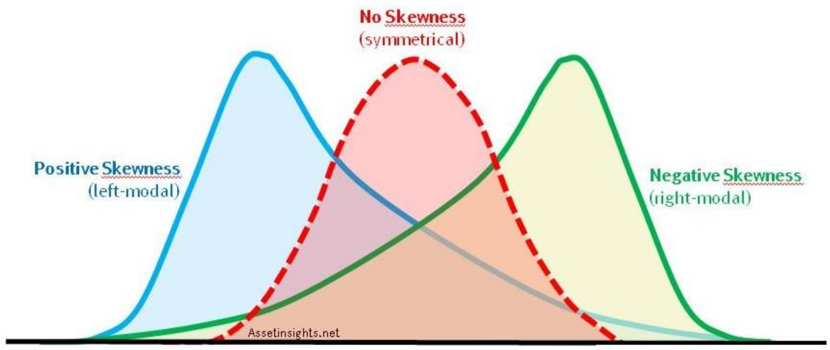

Figura 2. Asimetría

2.5.2 Asimetría positiva

Cuando una distribución tiene datos sesgados hacia la derecha se considera asimetría positiva, ya que la "cola" de la distribución está del lado derecho. Esto da un valor de asimetría mayor a cero.

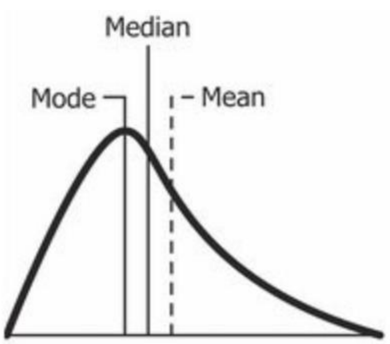

Figura 3. Asimetría positiva

Como la mayoría de los datos de la distribución están a la derecha, el valor de la media (promedio) es mayor a la mediana, de manera similar la moda también es mayor al promedio. Esto es preferible en un activo financiero, y para un perfil averso al riesgo.

2.5.3 Asimetría negativa

Si la distribución tiene más datos acumulados a la izquierda de la curva y una cola ancha a la izquierda, se considera asimetría negativa o distribución sesgada a la izquierda.

Asimetría negativa se índica con valores menores a cero. Y ya que está sesgada a la izquierda, el valor de la media (promedio) es menor que la mediana y la moda.

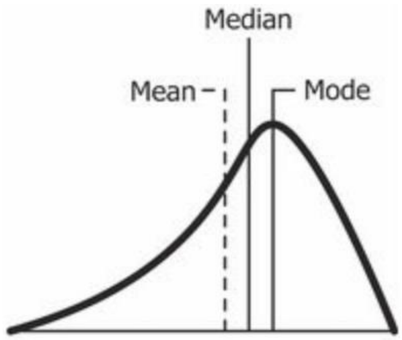

Figura 4. Asimetría negativa

Cuando una distribución de retornos está sesgada a la derecha, o tiene asimetría positiva, quiere decir que la desviación estándar está sobreestimando el riesgo, debido a valores grandes positivos repentinos (lo cual no le molesta a los inversionistas). Y cuando la asimetría es negativa o sesgada a la izquierda, la desviación estándar está *subestimando* el riesgo, (Bodie, Kane, Marcus 2018). Entonces, acciones con asimetría positiva en sus retornos son atractivos para algunos inversionistas debido a que pueden generar grandes retornos y acciones con asimetría negativa son menos atractivos porque pueden perder valor drásticamente (H. Langlois 2018).

Zhang en 2013 concluye que hay una correlación entre asimetría positiva de los retornos de un activo y su ratio precio/libro (P/B); comprobando que los activos con activos con asimetría positiva son más deseados por los inversionistas y por lo tanto su valor es mayor que el de libros.

Hay muchas maneras utilizadas para calcular la asimetría, y cada una con diferentes variables y construcciones, como la fórmula de Galton o asimetría de Bowley.

$$Galton\ skewness = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} \tag{2.6}$$

Donde Q_1 es el cuartil inferior de la distribución, Q_3 es el cuartil superior, y Q_2 es la media.

Sin embargo, en este escrito obtendremos la asimetría por medio del coeficiente Fisher-Pearson, el cual nos sirve para determinar la asimetría de una muestra:

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{3/2}}\right] \tag{2.7}$$

Donde m_k es el momento centralizado k de la distribución, x_i es el dato observado, $\bar{x}$ es el promedio de los datos y n es el número de datos o tamaño de la muestra.

2.5.4 Curtosis

Otra medida estadística que vamos a utilizar, debido a la información que podemos obtener de ella, es la curtosis. La curtosis como medida estadística es importante para inversionistas, ya que representa la probabilidad de que el precio del activo cambie significantemente a los extremos, ya sea a la alza o a la baja del valor actual (Ivanovski, Narasanov y Stojanovski 2015).

La curtosis es importante considerarla debido a que, que una distribución tenga colas anchas significa que hay más probabilidad de ocurrencia en las colas que lo predicho por una distribución normal. Alta curtosis significa que la desviación estándar subestima la ocurrencia de eventos extremos, tanto perdidas como ganancias.

La curtosis muestra qué tan pronunciadas son las colas de una distribución comparada con la distribución normal. Una distribución normal tiene kurtosis en exceso de 3, así que para ajustar el valor y obtener la kurtosis en exceso de nuestra distribución debemos restar 3 a nuestro valor obtenido.

2.5.5 Tipos de curtosis

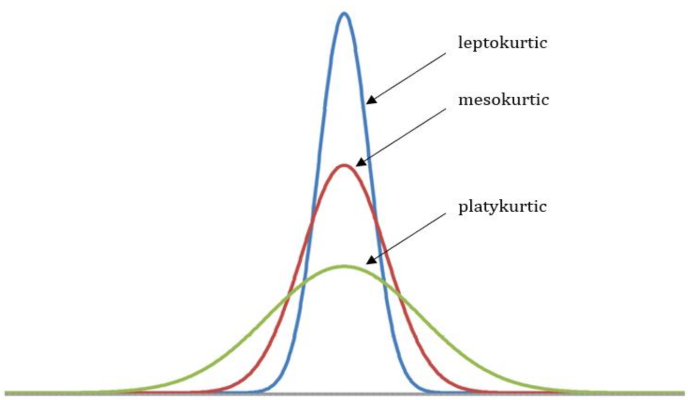

Figura 5. Curtosis

Una distribución es mesocúrtica cuando tiene un exceso de curtosis de cero o muy cercana a cero. Tal como una distribución normal. Una distribución leptocúrtica tiene curtosis en exceso positiva, tiene colas gruesas y está apuntalada cerca de la media. Una distribución platicúrtica tiene un exceso de curtosis negativa, la parte de arriba está aplanada cerca de la media y tiene colas pequeñas o “planas”.

Calcularemos la curtosis para una muestra de la siguiente manera:

$$g_2 = \frac{\mu_4}{\sigma_4} - 3 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = \left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}])^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^2}\right] - 3 \qquad (2.8)$$

Donde m_k es el momento centralizado k de la distribución, x_i es el dato observado, $\bar{x}$ es el promedio de los datos y n es el número de datos o tamaño de la muestra.

Cuando hay mucha curtosis en exceso la probabilidad de obtener retornos extremos es alta, esta forma de distribución es para inversionistas que están dispuestos a asumir mucho riesgo.

Si se tiene curtosis en exceso muy alta, los inversionistas pueden soportar los retornos negativos extremos si tenemos también asimetría positiva. Si se tiene una distribución con asimetría menor a -1 y un exceso de curtosis mayor a 1, existe una alta probabilidad de tener retornos negativos repentinos (Ivanovski, Narasanov y Stojanovski 2015).

Es importante tener en cuenta tanto la asimetría como la curtosis de una distribución de retornos y no solo concentrarse en la media, ya que conjuntamente nos dan un panorama más completo del comportamiento del activo a invertir.

3. Datos y metodología

En este estudio examinamos 68 acciones del mercado Latinoamericano, con precios diarios en el periodo de 2011 a febrero 2020. Se desecharon acciones que no tuvieran información de precios completa en el periodo. Nuestro conjunto de acciones latinoamericanas está compuesto por catorce acciones de la Bolsa de Valores de Lima (BVL), trece acciones del Ibovespa de Brasil, catorce acciones del Índice de Precio Selectivo de Acciones (IPSA) de Perú, catorce acciones del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México, y trece acciones del COLCAP de Colombia. La información de los activos fue recopilada de la base de información financiera S&P Capital IQ. La tasa libre de riesgo r_f considerada fue un bono del tesoro de Estados Unidos a 10 años.

La optimización y simulación de los portafolios fue realizada en Python y la estructuración de la información en Excel.

3.1 Optimización

Una vez teniendo los precios de los activos en un periodo, sacamos los retornos logarítmicos de cada uno de la manera siguiente:

$$log\, r_t = ln\left(\frac{Pt}{P_{t-1}}\right) = ln(P_t) - ln(P_{t-1}) \qquad (3.1)$$

Donde, P_t es el precio del periodo actual y P_{t-1} es el precio del periodo anterior.

Para los pesos de los activos en los portafolios realizamos una simulación Monte-Carlo donde asignamos pesos aleatorios a cada portafolio con las acciones seleccionadas, este proceso se realizó 100,000 veces, el cual es el número de portafolios diferentes que disponemos. Y el vector de pesos de cada portafolio está dado por:

$$W = \{W_1\, W_2\, W_3 \dots W_n\} \qquad \text{sujeto a: } \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \qquad (3.2)$$

$$W_i > 0,\ i \in \{1, \dots, n\}$$

Donde, W = vector n-dimensional con pesos aleatorios que conforman un portafolio, W_i = peso de cada activo, n = número de activos.

Estas restricciones son necesarias para asegurar que la sumatoria de todos los pesos de los activos en el portafolio sea igual a 1, o equivalentemente al 100% del portafolio, y la segunda restricción condiciona que todos los activos estén considerados dentro del portafolio y aporten un peso positivo, es decir, no permitimos ventas en corto.

3.2 Retornos de los portafolios

Sea P un portafolio con activos desde a hasta n: P = {a,b,c,...i,...,n}

Sea W_i el peso del activo i en el portafolio, r_i el retorno del activo i, W_n el peso del activo n en el portafolio y r_n su retorno.

El retorno del portafolio P estaría definido como el producto de los pesos de cada activo por su retorno (Markowitz 1952), así:

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} W_i \, r_i = R(W) \tag{3.3}$$

Y el valor esperado del retorno de P sería:

$$E\left[r_p\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} W_i r_i\right] = E\left[W_1 r_1 + W_2 r_2 + \cdots W_n r_n\right] \rightarrow E\left[W_1 r_1\right] + E\left[W_2 r_2\right] + \cdots E\left[W_n r_n\right]$$

$$E\left[r_p\right] = \sum_{i=1}^{n} E[W_i r_i] \tag{3.4}$$

Donde, W_i es constante y r_i es una variable aleatoria. Y para calcular al retorno esperado de cada uno de nuestros portafolios computamos:

$$E\left[r_p\right] = \sum_{i=1}^{n} W_i E[r_i] \tag{3.5}$$

3.3 Varianza de los portafolios

Para obtener la varianza de un portafolio podemos utilizar:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} W_i W_k \sigma_{ik} \tag{3.6}$$

Donde, n= número de activos, W_i es el peso del activo i en el portafolio, W_k es el peso del activo k, y σ_{ik} es la matriz varianza-covarianza de los activos.

Sin embargo, para nuestro caso, por la cantidad de activos que disponemos lo hacemos de forma matricial, donde, para obtener la varianza de cada portafolio multiplicamos la matriz transpuesta de pesos de los activos, por la matriz de covarianzas, multiplicada por la matriz de pesos.

$$\sigma_p^2 = [W_1\ W_2\ W_3 \dots W_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \cdots & \sigma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Podemos escribirla de forma más compacta para facilitar la lectura y la optimización.

$$\sigma_p(W) = \sqrt{W^T \Sigma_{ik} W} \tag{3.8}$$

Donde, $\sigma_p(W)$ es el vector de la desviación estándar del portafolio en función de los pesos de cada activo, W^T es el vector de pesos transpuesto, y Σ_{ik} es la matriz varianza-covarianza de los retornos de los activos, Σ_{ik} es simétrica.

Con esta fórmula calculamos la desviación estándar de cada portafolio de la simulación.

3.4 Asimetría y curtosis

Obtenemos la asimetría y la curtosis muestrales de cada portafolio calculando los momentos de la distribución.

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^2\right]^{3/2}} \qquad \textbf{Asimetría} \tag{3.9}$$

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = \left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^2\right]^2}\right] - 3 \qquad \textbf{Curtosis} \tag{3.10}$$

Donde, m_x es el momento central de orden x, $x \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n}$ es la sumatoria de los activos, desde i=1 hasta n, n= número de activos =68, $E[r_p]$ es el retorno esperado de los activos, r_{pj} es el retorno del portafolio j (Ha. Haifeng 2010).

En cuanto a la programación en Python; la información de cada portafolio simulado se guarda en una lista, después utilizamos las fórmulas anteriores para obtener el tercer y cuarto momento de la distribución de los retornos, lo que nos permitirá saber qué grado de asimetría tiene cada portafolio simulado, así como la curtosis de cada portafolio. De manera similar, esa información queda guardada en dos listas, una lista que contiene los valores de asimetría y otra la kurtosis de los portafolios, el motivo de tenerlos guardados es porque posteriormente los utilizaremos.

3.5 Ratio de Sharpe

La razón de Sharpe o ratio de Sharpe puede representar gráficamente la relación riesgo-retorno de un activo, es decir cual activo es "premiado" con mayor rendimiento al asumir más riesgo.

Se define como:

$$\tan\Theta = \left(\frac{r_p - r_f}{\sigma_p}\right) = \mathrm{m} = \text{pendiente} \tag{3.11}$$

Donde r_P es el retorno del portafolio, r_f es la tasa libre de riesgo y σ_P es la desviación estándar del portafolio.

Este portafolio lo utilizaremos como referencia, y escrito en función de W; maximizamos:

$$\tan\Theta(W) = \left(\frac{(\sum_{i=1}^{n} W_i\, r_i) - r_f}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} W_i W_k \sigma_{ik}}}\right) \qquad \text{sujeto a: } \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \tag{3.12}$$

$$W_i > 0, \ \ i \in \{1, \dots, n\}$$

Donde, W_i es el peso del activo i, r_i es el retorno del activo i, σ_{jk} es la matriz varianza-covarianza de los activos. W_k = peso de k en el portafolio.

Entre mayor sea la pendiente, se obtiene más retorno adicional por unidad de riesgo. Así que maximizamos el ratio de Sharpe cambiando los pesos W. Al tener un conjunto de portafolios, cada uno con pesos diferentes, optimizamos para buscar el que cumpla con nuestras restricciones.

3.6 Ratio de Sharpe ajustado por asimetría

Estamos considerando diferentes medidas de riesgo para la selección de portafolios óptimos, una de ellas es considerando la asimetría (skewness). La cual utilizaremos al incorporarla al índice de Sharpe. La forma de medir el ratio de Sharpe es retorno de un activo dividido sobre desviación estándar. Pero en nuestro caso utilizaremos un ajuste que le llamaremos *Sharpe ajustado por asimetría*. Donde, utilizamos como base la fórmula de razón de Sharpe considerando el retorno del activo (portafolio), pero dividiremos sobre el valor de asimetría de cada portafolio. Teniendo en cuenta la literatura, un inversionista *prudente* es averso al *downside risk*, el cual es el riesgo de pérdida. Adicionalmente el inversionista *prudente* es propenso a prepararse ante la incertidumbre. Por lo tanto, deseamos una asimetría positiva, ya que eso nos da probabilidades de obtener retornos extremos positivos.

Al estar dividiendo rentabilidad sobre un valor de asimetría grande, queremos que nuestro Sharpe ajustado por asimetría tenga un valor pequeño cercano a cero.

Done nuestra formula la podemos definir como:

$$\text{Sharpe ajustado por asimetría} = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{r_{pj} - r_f}{\left(\frac{m_3}{m_2^{3/2}}\right)} \right) = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{E[r_{pj}] - r_f}{\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^2\right]^{3/2}} \right)} \right) \quad (3.13)$$

$$S(W) = \text{ asimetría de cada portafolio } = \left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^2\right]^{3/2}} \right) \quad (3.14)$$

Donde, $\sum_{j=1}^{m} es$ la sumatoria de los portafolios simulados, desde j=1 hasta m, m= número de portafolios =100,000, r_{pj} es el retorno del portafolio j, r_f es la tasa libre de riesgo, $E[r_p]$ es el valor esperado del retorno de los activos.

Nuestro problema de optimización es:

maximizar $S(W)$

maximizar $R(W) = (\sum_{i=1}^{n} W_i r_i)$ sujeto a: $\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$

$$W_i > 0, \; i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.15)$$

Esto es, maximizar la asimetría del portafolio y maximizar la rentabilidad, cambiando los pesos de los activos.

Considerando un inversionista *prudente*, *q*ueremos que la asimetría sea positiva ya que esto nos da la probabilidad de retornos grandes positivos. Una distribución normal tiene asimetría = 0, asumiendo que se quiere una asimetría mayor a 0.5, y considerando retornos anuales entre 3% y 10%, queremos un ratio de Sharpe ajustado por asimetría menor a 0.125.

0 < Sharpe_asimetría <0.125

3.7 Ratio de Sharpe ajustado por curtosis

Esta medida la utilizaremos también como medida de riesgo, y de manera similar usamos el índice de Sharpe para ajustarla. Considerando el retorno del activo dividido sobre su curtosis. Y teniendo en cuenta la literatura, si el inversionista es averso al riesgo y temperante, prefiere alta probabilidad de retornos no extremos, a una pequeña probabilidad de eventos muy extremos. Por lo tanto, buscamos una curtosis en exceso menor a 0 (negativa). Un inversionista con alta templanza quiere moderar su exposición total al riesgo.

Utilizando los valores de curtosis de los portafolios calculados antes, utilizamos la siguiente fórmula para calcular el Sharpe ajustado por curtosis.

$$\text{Sharpe ajustado por curtosis} = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{r_{pj} - r_f}{\left(\frac{m_4}{m_2^2}\right) - 3} \right) = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{E[r_{pj}] - r_f}{\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^2\right]^2} \right) - 3} \right) \qquad (3.16)$$

$$K(W) = \text{ curtosis de cada portafolio} = \left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{pj} - E[r_p])^2\right]^2} \right) - 3 \qquad (3.17)$$

Donde, $\sum_{j=1}^{m} es$ la sumatoria de los portafolios simulados, desde j=1 hasta m, m= número de portafolios =100,000, r_{pj} es el retorno del portafolio j, r_f es la tasa libre de riesgo, $E[r_p]$ es el valor esperado del retorno de los activos.

Nuestro problema de optimización es:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad K(W) \\ &\text{maximizar} \quad R(W) = \left(\sum_{i=1}^{n} W_i\, r_i\right) \qquad \text{sujeto a: } \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad W_i > 0,\ i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \qquad (3.18)$$

Al considerar aversión al riesgo, queremos valores de curtosis grandes y negativos, ya que queremos distribuciones platicúrticas, y el valor deseable para nuestro *Sharpe ajustado por curtosis* sería cualquier valor menor a -1.

Al obtener los resultados, nuestros portafolios obtienen curtosis positiva, entonces para minimizar el riesgo queremos que nuestros valores del Sharpe ajustado por curtosis sean lo más cercanos a una distribución normal, esto es, curtosis pequeña y cercana a 0 y por lo tanto buscamos un Sharpe ajustado por curtosis con valores mayores a 1.

Habiendo explicado esto, podemos decir que los valores que buscamos en un portafolio son:

Sharpe > 1

Sharpe ajustado por asimetría < 0.125

Sharpe ajustado por curtosis > 1

4. Resultados

Después de haber hecho la simulación aleatoria de portafolios y optimizándolos para obtener el portafolio con mayor Sharpe ratio, mínimos Sharpe ajustado por asimetría, Sharpe ajustado por asimetría optimizado, y mayor Sharpe ajustado por curtosis, observamos como de acuerdo con la medida de riesgo deseada, los pesos de las acciones en el portafolio varían de manera significativa tanto por país, como por sector económico.

Buscamos un ratio de Sharpe mayor a 1. Es decir, que obtenemos más rendimiento por unidad de riesgo.

Deseamos un Sharpe ajustado por asimetría menor a 0.125, ya que se busca que los retornos tengan simetría positiva, indicando que los retornos positivos pueden llegar a tener valores muy altos, aunque en baja frecuencia.

Esperamos un Sharpe ajustado por curtosis grande mayor a 1, debido a que esperamos que los retornos tengan poca curtosis, esto es, preferimos que tengan una distribución normal a una leptocúrtica, y que los retornos no tengan grandes probabilidades de llegar a los extremos, asumiendo un inversionista averso al riesgo.

En la siguiente tabla mostramos los resultados de los cuatro tipos de portafolios obtenidos de acuerdo con las medidas de riesgo utilizadas.

El número 2020 en la esquina superior izquierda índica que esta es la optimización con datos de los activos desde 2011 a febrero 2020.

2020	**Portafolio de Maximo Sharpe**	**Portafolio de Min Sharpe/asimetría**	**Portafolio de Sharpe/asimetría_opt**	**Portafolio de Max Sharpe/curtosis**
Retorno anual	7.901%	3.270%	5.990%	8.445%
Desviación estandar	8.320%	8.544%	8.170%	10.042%
Asimetría	2.948	4.615	3.391	2.851
Kurtosis	0.438	5.385	1.544	0.215
Sharpe	**0.950**	0.383	0.733	0.841
Sharpe_asimetría	0.027	**0.007**	**0.018**	0.030
Sharpe_kurtosis	0.180	0.006	0.039	**0.393**

1) Donde, el portafolio de máximo Sharpe, que es nuestro benchmark, tiene un retorno relativamente alto y su desviación estándar no es muy grande. En todos los portafolios el ratio de Sharpe es menor a 1, sin embargo, este es el portafolio con mayor ratio. Su Sharpe ajustado por asimetría es menor a 0.125, lo cual es deseable; y su Sharpe ajustado por curtosis es demasiado bajo, pero sabemos que los valores extremos que obtiene pueden ser en su mayoría positivos.

2) El portafolio con mínimo Sharpe ajustado por asimetría tiene un retorno anual (3.2%) muy bajo comparado con los otros portafolios. Tiene una desviación estándar muy alta, dando como resultado la razón de Sharpe (0.38) más baja de los cuatro portafolios. Sin embargo, al tener el mínimo Sharpe ajustado por asimetría (0.007) obtenemos una distribución de retornos con una cola ancha positiva muy grande, dando retornos positivos muy extremos no muy frecuentes, lo cual es deseable y puede ser buscado por el inversionista. Tambien debemos considerar que tiene un Sharpe ajustado por curtosis demasiado bajo (0.006). Debido a esto concluimos que es un portafolio demasiado riesgoso. No es un buen portafolio para invertir si el inversionista es averso al riesgo.

3) Dado lo anterior, incorporamos un portafolio que minimiza el Sharpe ajustado por asimetría, pero al mismo tiempo maximizando el retorno. Es una optimización diferente y está nombrada en la tabla como: "portafolio de Sharpe/asimetría_opt". Donde, ahora encontramos que su Sharpe ajustado por asimetría (0.018) es mayor que el portafolio que no trataba de maximizar la rentabilidad, lo cual nos dice que este

portafolio tiene una cola ancha positiva un poco menor al anterior, pero ahora tiene un rendimiento del 6%, una desviación estándar de 8.1% y un ratio de Sharpe de 0.73. Lo cual, es una mejora considerable comparado con el portafolio anterior que solamente buscaba obtener un ratio de Sharpe ajustado por asimetría lo más pequeño posible.

4) El portafolio de máximo Sharpe ajustado por curtosis tiene una desviación estándar considerablemente mayor a los otros portafolios, pero es el portafolio que obtiene mayor retorno (8.4%). Al tener un Sharpe ajustado por curtosis de 0.393, es el ratio más cercano a 1 de los cuatro portafolios, lo que quiere decir que, si bien sigue siendo una distribución leptocúrtica, su distribución es la más parecida a una normal de los cuatro portafolios. Adicionalmente, tiene un Sharpe ajustado por asimetría menor a 0.125, indicando que obtiene valores grandes positivos más grandes que los negativos. Por lo tanto, este portafolio si bien tiene una desviación estándar muy alta, es compensado con retornos extremos positivos y retorno promedio más alto que los otros tres portafolios.

En términos generales podemos decir que:

a) El portafolio de máximo Sharpe tiene buen retorno, desviación estándar y su Sharpe ajustado por asimetría es menor a 0.125, lo que indica que puede dar retornos positivos grandes. Podría considerarse para un inversionista neutral al riesgo.

b) El portafolio de mínimo Sharpe ajustado por asimetría es una opción en la que el inversionista estaría esperando conseguir retornos positivos extremos, pero el retorno promedio es bastante bajo. Sería opción para un inversionista que no le importe asumir mucho riesgo a cambio de retornos muy grandes, pero con mínima frecuencia.

c) El portafolio de Sharpe ajustado por asimetría optimizado es el que tiene menor desviación estándar de los cuatro portafolios; y al tener el menor Sharpe ajustado por asimetría, indica que hay una buena probabilidad de obtener retornos positivos grandes.

Al tener un Sharpe ajustado por asimetría pequeño y un Sharpe ajustado por curtosis grande, podemos considerar que los retornos extremos que obtiene son generalmente positivos. Este portafolio se puede considerar para un inversionista averso al riesgo.

d) El portafolio de máximo Sharpe ajustado por curtosis obtiene el mayor retorno, el cual obtiene a costa de más desviación estándar, pero compensa con retornos grandes positivos y poca curtosis. Puede ser una alternativa de un inversionista neutral al riesgo.

El inversionista es quien debería definir qué es lo que prefiere en cuanto a las características de su portafolio. Esto dependerá del perfil de riesgo que se quiera tomar, horizonte de inversión y objetivo de la inversión.

4.1 Composición general de los portafolios

Una vez habiendo visto los resultados y comportamiento de cada portafolio, vemos la composición por país de cada tipo de portafolio. La cual es mostrada en la siguiente tabla. Donde se muestran los pesos de las acciones colocadas a cada país para obtener dicho portafolio.

Pais	Portafolio de Máximo Sharpe	Portafolio de Min Sharpe/asimetría	Portafolio de Sharpe/asimetría opt	Portafolio de Max Sharpe/curtosis
Perú	18.07%	**28.61%**	21.29%	17.46%
Brasil	19.41%	13.63%	15.71%	**24.77%**
Chile	22.52%	21.14%	19.84%	21.41%
México	**23.24%**	18.60%	**22.55%**	24.76%
Colombia	16.77%	18.01%	20.61%	11.60%
TOTAL	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Para obtener el portafolio con máximo Sharpe (portafolio posible para un inversionista neutral al riesgo) se tendría que invertir principalmente en acciones de México, seguido de Chile y Brasil, y en menor medida habría que invertir en Perú. La optimización no sugiere poner mucho peso en el mercado accionario de Colombia.

Si el inversionista considerara minimizar el Sharpe ajustado por asimetría, (portafolio menos deseable, con exceso riesgo y muy poco rendimiento promedio, pero extremos positivos) la composición del portafolio cambia mucho y ahora lo sugerido es invertir principalmente en acciones de Perú y Chile, en tercer lugar, México y Colombia, y una mínima parte del portafolio en acciones de Brasil

El portafolio de Sharpe ajustado por asimetría optimizado (portafolio menos riesgoso), pone la mayoría de peso en acciones de México y Perú, en menor medida Colombia, Chile y solo un 15.7% en Brasil.

Al considerar nuestra cuarta medida de riesgo; Sharpe ajustado por curtosis, (la cual nos da el portafolio con más rendimiento de los cuatro) casi la mitad del porcentaje de las acciones debería estar invertido en Brasil y México, seguido de Chile y Perú, y una mínima parte del portafolio en Colombia.

De otra manera:

-El portafolio con mejor retorno/desviación estándar y con medidas de riesgo alternativas muy favorables invierte principalmente en el mercado de México.

-El portafolio con peor retorno promedio y gran riesgo, invierte principalmente en Perú.

-El portafolio que busca los retornos extremos positivos poco frecuentes y al mismo tiempo trata de maximizar el retorno promedio, pone mayor peso en el mercado mexicano.

-El portafolio para un inversionista neutral al riesgo y que obtiene el mayor retorno invertiría principalmente en Brasil.

4.2 Composición detallada de los portafolios

La composición de los portafolios de manera más detallada nos permite ver oportunidades de diversificación regional y por sector.

En la siguiente tabla se muestran los pesos particulares de cada acción según el portafolio con la medida de riesgo seleccionada. Para mayor facilidad de visualización se colocan en verde las acciones con mayor peso en dicho portafolio y rojo las que tienen menos peso en el portafolio. En las filas tenemos los *tickers* de las acciones, y una aclaración de cuales acciones pertenecen a qué país. En las columnas en la parte superior, el nombre del portafolio/medida de riesgo, y en las filas vemos los pesos de cada acción en cada uno de los cuatro portafolios.

El primer portafolio es el de máximo Sharpe, seguido del portafolio de mínimo Sharpe ajustado por asimetría, en tercer lugar, el portafolio de mínimo Sharpe ajustado por asimetría optimizado, y en cuarto lugar el de Sharpe ajustado por curtosis.

TICKERS	Portafolio Maximo Sharpe	Portafolio minimo sharpe/asimetría	Portafolio sharpe/asimetría_opt	Portafolio minimo sharpe/curtosis
BAP PERÚ	1.59%	1.65%	2.109%	1.01%
BVN	0.35%	2.97%	0.156%	0.36%
IFS	2.38%	0.54%	1.666%	0.14%
SCCO	1.34%	0.15%	1.966%	2.50%
TV	0.23%	1.28%	2.165%	2.76%
ALICORC1	2.71%	1.52%	2.371%	0.61%
FERREYC1	2.28%	3.04%	0.848%	2.74%
CVERDEC1	0.31%	2.54%	0.542%	0.33%
BBVAC1	2.23%	1.33%	2.498%	2.13%
UNACEMC1	0.29%	2.60%	2.170%	0.85%
AENZAC1	0.71%	2.90%	1.052%	0.74%
CPACASC1	0.54%	2.49%	2.503%	0.70%
VOLCABC1	0.29%	2.62%	1.213%	1.69%
MINSURI1	2.84%	2.98%	0.032%	0.90%
VALE3 BRASIL	2.34%	1.36%	0.207%	1.93%
PETR4	0.94%	0.52%	0.785%	2.06%
ITUB4	0.07%	2.89%	0.811%	1.34%
BBDC4	2.12%	0.77%	0.259%	2.67%
BRFS3	0.57%	2.27%	1.993%	0.93%
B3SA3	1.15%	0.84%	2.041%	0.01%
CSNA3	1.61%	0.14%	1.258%	2.81%
BBAS3	0.28%	0.94%	0.775%	1.90%
WEGE3	2.64%	1.26%	1.837%	2.32%
ITSA4	2.68%	0.17%	0.784%	2.79%
JBSS3	2.71%	0.29%	0.954%	2.51%
PRIO3	0.56%	0.43%	2.163%	1.38%
GGBR4	1.74%	1.77%	1.838%	2.14%
CMPC CHILE	1.10%	3.05%	0.879%	2.48%
LTM	1.16%	2.66%	0.760%	2.70%
VAPORES	0.08%	2.87%	2.511%	0.06%
SALFACORP	0.11%	2.10%	2.020%	0.22%
FALABELLA	1.44%	1.45%	1.312%	1.11%
SECURITY	1.72%	1.02%	1.835%	2.68%
CHILE	2.85%	0.97%	2.451%	1.05%
CONCHATORO	2.41%	1.54%	1.223%	0.19%
CCU	2.62%	0.43%	0.205%	2.22%
PARAUCO	0.99%	0.53%	0.818%	2.90%
BSANTANDER	2.17%	0.70%	0.793%	1.92%
ENELAM	1.88%	0.63%	1.690%	1.73%
SQM	1.26%	1.51%	1.527%	1.88%
ENTEL	2.73%	1.67%	1.814%	0.28%
AMXL MÉXICO	0.18%	2.68%	1.112%	1.64%
WALMEX	2.25%	1.66%	1.398%	2.48%
GMEXICOB	2.38%	1.22%	1.935%	2.47%
FEMSALUBD	1.75%	1.51%	2.543%	2.32%
GFNORTE	1.60%	0.29%	1.097%	1.60%
CEMEXCPO	1.16%	0.64%	0.529%	1.67%
TLEVISACPO	0.40%	2.34%	1.772%	0.14%
ELEKTRA	1.53%	2.16%	0.672%	1.47%
GAPB	1.22%	0.45%	2.382%	2.56%
ASURB	2.77%	2.50%	1.955%	2.55%
BIMBOA	2.80%	0.22%	1.354%	1.05%
ORBIA	1.29%	0.58%	1.592%	0.75%
KOF	1.33%	2.18%	2.155%	1.11%
GRUMAB	2.56%	0.18%	2.055%	2.95%
ECOPETROL COLOMBIA	1.48%	0.11%	0.173%	2.02%
ISA	2.15%	0.21%	1.472%	2.70%
BCOLOMBIA	1.58%	1.09%	0.938%	0.95%
GEB	0.56%	1.28%	2.459%	0.70%
GRUPOAVAL	0.89%	1.98%	2.327%	0.06%
NUTRESA	2.59%	0.01%	1.810%	1.74%
GRUPOARGOS	1.48%	2.85%	2.575%	0.66%
GRUPOSURA	0.54%	1.63%	0.589%	0.39%
PFDAVVNDA	2.25%	1.82%	1.639%	0.38%
CEMEARGOS	0.75%	0.41%	1.963%	0.60%
CORFICOLCF	1.37%	2.03%	2.433%	0.59%
CELSIA	0.97%	3.06%	1.882%	0.27%
BOGOTA	0.16%	1.55%	0.356%	0.52%
Total	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

Con estos resultados no solo podemos ver cómo es que varían los pesos de los portafolios de país a país, sino que también podemos ver las diferencias de peso en los portafolios por sector económico.

Para facilitar la visualización de la diversificación por sector e industria, seleccionamos las acciones de cada portafolio con mayores pesos.

El portafolio de máximo Sharpe sugiere poner más peso en acciones de alimentos y servicios financieros.

TICKERS		**Portafolio Maximo Sharpe**	**Sector/Industria**
IFS	PERÚ	2.38%	Servicios financieros
ALICORC1		2.71%	bienes de consumo
MINSURI1		2.84%	minera
VALE3	BRASIL	2.34%	metales y mineria
WEGE3		2.64%	tecnologia e ingenieria
ITSA4		2.68%	conglomerado de empresas
JBSS3		2.71%	productora de carnes
CHILE	CHILE	2.85%	Servicios financieros
CONCHATORO		**2.41%**	**vinos**
CCU		2.62%	cervecera
ENTEL		2.73%	telefonia
GMEXICOB	MÉXICO	2.38%	conglomerado de empresas
ASURB		2.77%	aerolinea
BIMBOA		**2.80%**	**alimentos**
GRUMAB		**2.56%**	**alimentos, harina, tortilla**
NUTRESA	**COLOMBIA**	**2.59%**	**alimentos**

El portafolio de mínimo Sharpe ajustado por asimetría pone más peso en empresas de minería y construcción.

TICKERS		**Portafolio minimo Sharpe/asimetría**	**Sector/Industria**
BVN	**PERU**	**2.97%**	**minera**
FERREYC1		3.04%	bienes de capital y servicios relacionados
CVERDEC1		**2.54%**	**minera**
UNACEMC1		2.60%	cementos
AENZAC1		2.90%	servicios de ingeniería y construcción
VOLCABC1		**2.62%**	**minera**
MINSURI1		**2.98%**	**minera**
ITUB4	BRASIL	2.89%	Servicios financieros
CMPC	CHILE	3.05%	celulosa y papel
LTM		2.66%	aerolinea
VAPORES		2.87%	transporte maritimo
AMXL	MEXICO	2.68%	telecomunicaciones
TLEVISACPO		2.34%	multimedia
ELEKTRA		2.16%	conglomerado, servicios financieros
GRUPOARGOS	COLOMBIA	2.85%	cementera
CELSIA		3.06%	energia

El portafolio de mínimo Sharpe ajustado por asimetría optimizado invierte principalmente en empresas de servicios financieros.

TICKERS	Portafolio Sharpe/asimetría opt	Sector/Industria
TV PERÚ	2.17%	minera
ALICORC1	2.37%	bienes de consumo
BBVAC1	2.50%	minera
CPACASC1	2.50%	cementos
PRIO3 BRASIL	2.16%	petrolera
VAPORES CHILE	2.51%	transporte maritimo
CHILE	**2.45%**	**Servicios financieros**
FEMSALUBD MÉXICO	2.54%	retail
GAPB	2.38%	ropa
KOF	2.15%	bebidas
GRUMAB	2.05%	alimentos, harina, tortilla
GEB COLOMBIA	2.46%	energia
GRUPOAVAL	**2.33%**	**conglomerado, servicios financieros**
GRUPOARGOS	2.58%	conglomerado, cementos y energia
CEMEARGOS	1.96%	cementera
CORFICOLCF	**2.43%**	**Servicios financieros**

La composición del portafolio de máximo Sharpe ajustado por curtosis en general sugiere poner más peso en empresas de alimentos y servicios financieros. Con la mayoría de las empresas siendo de Brasil, y solamente un activo pertenece Colombia.

TICKERS	Portafolio máximo Sharpe/curtosis	Sector/Industria
SCCO	2.50%	minera
TV PERU	2.76%	minera
FERREYC1	2.74%	bienes de capital y servicios relacionados
BBDC4 BRASIL	2.67%	Servicios financieros
CSNA3	2.81%	siderurgica acero
ITSA4	2.79%	conglomerado de empresas
JBSS3	**2.51%**	**productora de carnes**
CMPC	2.48%	celulosa y papel
LTM CHILE	2.70%	aerolinea
SECURITY	2.68%	Servicios financieros
PARAUCO	2.90%	departamento de tiendas
WALMEX	2.48%	cadena comercial
GAPB MÉXICO	2.56%	ropa
ASURB	2.55%	aerolinea
GRUMA	**2.95%**	**alimentos, harina, tortilla**
ISA COLOMBIA	2.70%	telecomunicaciones

Esto nos muestra que, el portafolio de referencia de máximo Sharpe invierte principalmente en el sector de alimentos, los otros portafolios cambian la composición y sugieren poner más peso en empresas mineras y de construcción si se quieren retornos extremos positivos, pero poco retorno promedio.

En empresas de servicios financieros y empresas conglomeradas, si de igual manera se buscan muchos retornos positivos extremos, pero con mayor rentabilidad promedio.

Y si se busca el mayor retorno promedio sugiere poner más peso en alimentos y departamentos de tiendas.

4.3 Portafolios post covid-19

Adicionalmente incorporamos una optimización similar a la anterior, con la diferencia en que ahora se toma el periodo de 2011 hasta agosto 2021. Es decir, toma en cuenta el periodo donde los mercados y activos se desvalorizaron debido a la pandemia que inició entre marzo-abril de 2020. Los portafolios postpandemia tienen indicado 2021 en la parte superior izquierda, mientras que los portafolios que ya hemos visto anteriormente tienen 2020 como indicador.

2020	**Portafolio de Maximo Sharpe**	**Portafolio de Min Sharpe_asimetría**	**Portafolio de Sharpe_asimetría_opt**	**Portafolio de Max Sharpe_Kurt**
Retorno anual	7.901%	3.270%	5.990%	8.445%
Desviación estandar	8.320%	8.544%	8.170%	10.042%
Asimetría	2.948	4.615	3.391	2.851
Kurtosis	0.438	5.385	1.544	0.215
Sharpe	**0.950**	0.383	0.733	0.841
Sharpe_asimetría	0.027	**0.007**	**0.018**	0.030
Sharpe_kurtosis	0.180	0.006	0.039	**0.393**

Portafolios desde 2011 a febrero 2020

2021	**Portafolio de Maximo Sharpe**	**Portafolio de Min Sharpe_asimetría**	**Portafolio de Sharpe_asimetría_opt**	**Portafolio de Max Sharpe_Kurt**
Retorno anual	7.476%	3.090%	5.452%	7.750%
Desviación estandar	8.624%	8.798%	8.231%	9.483%
Asimetría	2.523	3.943	3.553	2.478
Kurtosis	0.613	5.790	1.989	0.490
Sharpe	**0.867**	0.351	0.662	0.818
Sharpe_asimetría	0.030	**0.008**	**0.015**	0.031
Sharpe_kurtosis	0.122	0.005	0.027	**0.158**

Portafolios desde 2011 a agosto 2021

El portafolio de máximo Sharpe es casi 0.1 menor que el portafolio original 2020, el portafolio de mínimo Sharpe ajustado por asimetría optimizado tiene ahora menor valor, es decir el portafolio no tiene tantos valores extremos positivos como el del periodo anterior, el portafolio de máximo Sharpe ajustado por curtosis es mucho menor que antes, o sea, tiene colas más anchas, por lo tanto, tiene más valores extremos positivos como negativos.

Podemos ver que, al no considerar ese periodo 2020 a 2021 de rentabilidades bajas en los activos, los portafolios obtienen aproximadamente un 0.5% de retorno menos, un aumento de 0.3% de desviación estándar, su asimetría en general es más negativa (disminuye 0.3 en promedio), 0.4 mayor curtosis. El Sharpe ajustado por asimetría es prácticamente igual, aumentando un 0.001 en promedio en los cuatro portafolios, y el Sharpe ajustado por curtosis disminuyó 0.2 en promedio.

Simplificando, como era de esperar, las medidas de riesgo aumentaron sus valores. El Sharpe ajustado por curtosis disminuyó, es decir, obtenemos valores más extremos, lo mismo que la asimetría, que al tener en consideración los valores de rentabilidad grandes negativos que surgieron en ese periodo, ahora los portafolios están un poco más sesgados a la izquierda.

5. Conclusiones

Analizamos el comportamiento de diferentes portafolios según la definición de riesgo utilizada. Vemos cómo cambian los pesos de los activos en cada portafolio, y como esto puede utilizarse para diversificar en diferentes países o incluso sectores, comparando nuestros portafolios con el benchmark que es el portafolio media-varianza con máximo ratio de Sharpe.

Al hacer la optimización encontramos como el benchmark (portafolio de máximo Sharpe) sugería poner la mayoría de peso en el portafolio en acciones de México y Chile, sin embargo, al considerar la distribución de los retornos encontramos que si invertimos de manera diferente en otros países obtenemos otras cualidades en la optimización; como retornos positivos más grandes (aunque en menos frecuencia), si invertimos principalmente en Perú. Retorno promedio mayor a cambio de más riesgo invirtiendo en su mayoría en Brasil, o un portafolio que no tiene mucha volatilidad y sus retornos no son muy extremos, poniendo más peso en acciones de México.

La diversificación por sector también cambia drásticamente. Variando desde sector de alimentos, productos financieros, minero, conglomerados y construcción, aunque siendo las empresas de servicios financieros las que tienen pesos consistentemente altos en los portafolios.

Vemos que la distribución de los retornos de cada portafolio es importante, cada medida es diferente, y deberían analizarse de manera conjunta ya que aporta diferente información al inversionista; es información que debe de utilizarse para asegurarse que se obtenga lo que se está buscando de acuerdo con objetivo de inversión. Sea mínimo riesgo, retorno máximo, preservación de capital, retorno promedio muy alto o mucho riesgo, para cualquier horizonte de inversión elegido.

Existen muchas maneras de construir portafolios de inversión, cada una con beneficios y limitaciones muy diferentes. Así que encontrar una metodología para la optimización de un portafolio de inversión de manera correcta no es sencillo, ya que al hacer la gestión de portafolios se pueden considerar muchas variables económicas, parámetros y preferencias del inversionista, al cambiar esto se obtendrán portafolios con diferentes características.

Se pueden emplear muchas metodologías y teorías con el fin de obtener la mejor asignación de activos y sus pesos en el portafolio. Si bien, uno podría simplemente utilizar el modelo media-varianza, se encontrarían limitaciones e ineficiencias en él. Por esa razón se emplean diferentes técnicas, como paridad de riesgo (L. Prado 2016), que es una aproximación o enfoque en la cual la asignación de capital se basa en los factores de riesgo en lugar de los tipos de activos. Dando una aproximación muy diferente.

Contestando las preguntas de investigación: ¿Qué tanto varían los portafolios al considerar momentos como asimetría y curtosis para su optimización? ¿Se obtienen portafolios con mejores rendimientos o características que valgan la pena para el inversionista?

Comparando con el portafolio de referencia de máximo Sharpe, los portafolios cambian de manera significativa, dando una amplia oportunidad de diversificación y de selección de portafolios. Los cuales obtienen o mejores retornos, menor riesgo, mayores valores positivos en la cola, es decir, comportamientos diferentes que el benchmark. Podemos decir que obtenemos mejores portafolios, siempre y cuando el inversionista tenga preferencia por esas características de los portafolios.

Consideramos, que es importante tomar en cuenta la distribución de los retornos del portafolio para hacer la optimización, para poder tener una visión más amplia de los portafolios disponibles dados los activos. Si uno asume una distribución normal, los retornos promedio del portafolio podrían estar subestimando el riesgo, o podrían estar ignorando los retornos extremos positivos que un inversionista podría estar buscando. Al usar solo una medida de riesgo se tiene solo un punto de vista de un portafolio y podrían ignorar por completo una composición de activos en un portafolio con características deseables para el perfil de riesgo de un inversionista en particular.

Es importante que el inversionista o gestor, sea consciente de las grandes variaciones que hace una medida de riesgo diferente a otra en la composición de un portafolio, para encontrar la alternativa que mejor le convenga al inversionista y no se ignoren portafolios con mucho valor.

Se considera que se puede hacer una extensión de este tema, incorporando mercados diferentes al latinoamericano, o incorporando diferentes índices. Así como introducir otras medidas de riesgo aparte de las utilizadas aquí, como: semi-varianza, co-curtosis, co-asimetría, para poder obtener un más herramientas para la gestión correcta de portafolios y sus medidas de riesgo, los cuales son temas vastos a los que se puede aportar mucho.

Bibliografía

Alan Kraus, Robert Litzenberger. (1976). “Skewness Preference and the valuation of risk assets”.

Aylin Cevizci. (2016). “A Comparison of optimal Portfolio Performances of three optimization methods”.

Benninga, S. (2006). “Principles of Finance with Excel”. Oxford University Press, Oxford.

Burcu Aracioglu. (2010). “Mean-variance-skewness-kurtosis approach to portfolio optimization: An application in Istanbul Stock Exchange”.

Bodie Z, Kane A, Marcus A. (2018). “Investments”.

Cobb, G. W. and Moore, D. S. (1997), “Mathematics, Statistics, and Teaching,” The American Mathematical Monthly, 14, 801-823.

Cvitanić J, Polimenis V y Zapatero F. (2008). "Optimal portfolio allocation with higher moments," Annals of Finance 4(1): 1-28

Damodaran, Aswath. (2006). “Investment Valuation”. New York: Willey.

C. Deck, H. Schlesinger. (2013). “Consistency of Higher Order Risk Preferences”.

De Roon F, Karehnke P. (2018). “A simple skewed distribution with asset pricing applications,” Review of Finance 21(6): 2169-2197.

F. Black, R. Litterman. (1992). “Global Portfolio Optimization”, Financial Analysts Journal.

Frantz, P., & Payne, R. (2009). “Corporate finance. Chapter 2. London: University of London Press”.

Ha. Haifeng. (2010). “Markowitz Theory–Based Asset Allocation Strategies with Special Regard to Private Wealth Management.”

H. Banda, L Miguel González, D. Gómez. (2013). “Una aproximación de la teoría de portafolio a las siefores en México”.

Harry Markowitz. (1952). “Portfolio Selection” The Journal of Finance Vol 7, No 1.

Harry Markowitz. (1959). “Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments”.

Harvey CR, Sidique A. (2000). “Conditional skewness in asset pricing tests,” Journal of Finance 55(3): 1263-1295.

Hugues Langlois. (2018). “Measuring Skewness Premia”.

Jose E. Gomez-Gonzalez, Jorge Hirs-Garzon, Jorge M. Uribe. (2022). “Spillovers Beyond the variance: exploring the higher order risk linkages between commodity markets and global financial markets”.

John Board, W. Ziemba, C. Sutcliffe. (2008). “Portfolio Selection: Markowitz Mean-Variance Model”.

Jorge Valencia, Gustavo Gallego. (2014). “Diseño de un portafolio de inversión de renta variable con instrumentos financieros colombianos bajo la metodología de cartera eficiente de Harry Markowitz”.

Lopez de Prado, Marcos. (2016). “Building Diversified Portfolios that Outperform Out-of-Sample”. Journal of Portfolio Management (May): 31 p

R. Merton. (1969). “Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case” The Review of Economics and Statistics Vol. 51, No. 3.

Schneeweis, Crowder y Kazemi. (2010). “The New Science of Asset Allocation: Risk Management in a Multi-Asset World”.

Skrinjaric, Tihana. (2014). “Investment Strategy on the Zagreb Stock Exchange Based on Dynamic DEA”. Croatian Economic Survey 16 (1): 129–160.

Tarja Joro, Pual Na. (2006). “Portfolio performance evaluation in a mean-variance-skewness framework” European Journal of Operational Research 175 (2006) 446–461.

Trautmann ST, Van de Kuilen G. (2018): “Higher order risk attitudes: A review of experimental evidence,” European Economic Review 103(C): 108-124.

W. Sharpe. (1966). “Mutual Fund Performance”, The Journal of Business, Vol 39, No1, Part 2.

Z. Ivanovski, T. Stojanovski, Z. Narasanov. (2015). “Volatility and kurtosis of daily stock returns at MSE”.

Zhang, Y. (2005). “Individual skewness and the cross-section of average stock returns”. Working paper, Yale University.

Anexo

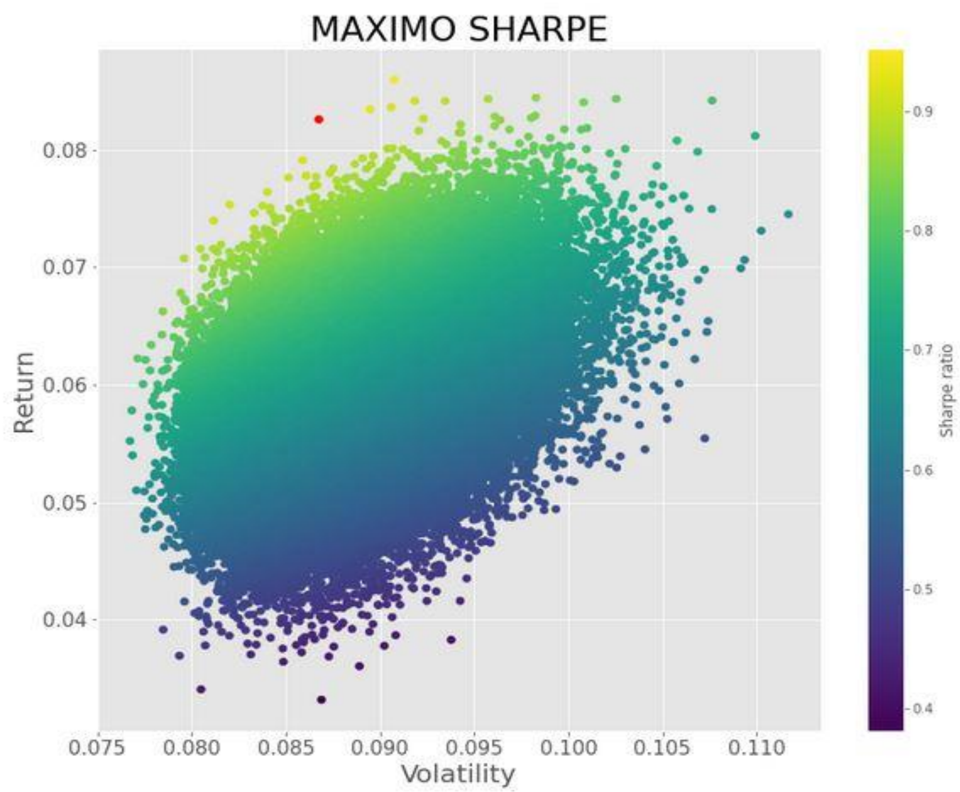

Figura 6. Optimización obtenida tras hacer 100,000 portafolios aleatorios, donde el punto rojo indica el portafolio de referencia de máximo Sharpe.