

Resolución de problemas con la función lineal a través de una secuencia didáctica utilizando el programa Geogebra con el fin de contribuir con el aprendizaje en los estudiantes del grado noveno de la I.E.D Codema

Edgar Gallo Duarte

Universidad de la Sabana  
Centro de Tecnologías para la Academia  
Maestría en Proyectos Educativos Medidos por TIC  
Chía, Cundinamarca  
2018

Resolución de problemas con la función lineal a través de una secuencia didáctica utilizando el programa Geogebra con el fin de contribuir con el aprendizaje en los estudiantes del grado noveno de la I.E.D Codema

Edgar Gallo Duarte

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Proyectos Educativos Mediados por TIC

Asesor

Dr. Darwin Andrés Díaz Gómez

Universidad de la Sabana

Centro de Tecnologías para la academia

Maestría en Proyectos Educativos Mediados por TIC

Chía, Cundinamarca

2018

**Nota de Aceptación**

---

---

---

---

---

---

---

Presidente del jurado

---

Jurado

---

Jurado

Chía, Julio de 2018

*A Dios por darme fortaleza en cada momento difícil de mi vida y ser siempre  
mi guía en este horizonte.*

## **Agradecimientos**

Al amor de mi vida y el tesoro más grande que Dios me regaló por ser el motivo de mí existir, Adriana. Por el apoyo y ánimo que me brinda cada día para conseguir metas comunes profesionales y personales.

A mis hijos por su comprensión y apoyo en cada momento. Los amo con toda la fuerza de mi corazón.

Dr. Darwin Andrés Díaz Gómez, Director del trabajo, por su acompañamiento y asesoría gracias por los valiosos aportes.

A la Universidad de la Sabana, especialmente al Centro de Tecnologías para la Academia, por abrirnos sus puertas y brindarnos un programa de formación profesional, que permite aportar al mejoramiento de la calidad de la educación por medio de la integración de materiales y herramientas basados en las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC).

A las directivas y docentes de del Colegio I.E.D. CODEMA de Bogotá por su apoyo.

Finalmente, agradezco a los estudiantes de Grados 9 de Básica Secundaria del Colegio I.E.D. CODEMA de Bogotá; por su cooperación y entusiasmo al momento de ejecutar la propuesta.

## Contenido

	pág.
Introducción	14
1. Justificación	16
2. Planteamiento del problema	19
2.1 Descripción del problema	19
2.2 Pregunta de investigación	20
Objetivos	21
3.1 Objetivo general	21
3.2. Objetivos específicos	21
4. Estado del arte	22
4.1 A nivel internacional	22
4.1.1 Uso de software en matemáticas	22
4.1.2 Resolución de problemas matemáticos	28
4.2 A nivel nacional - local	31
5. Marco teórico	36
5.1 Teorías del conocimiento	36
5.2 Aprendizaje	37
5.3 Enseñanza	38
5.4 Pensamiento	38

5.5 Problemas Matemáticos	39
5.6 Contextualización de problemas	41
5.7 Estrategias de resolución de problemas	43
5.8 Competencias matemáticas	48
5.9 Pensamiento matemático	49
5.10 Función lineal	50
5.11 Geogebra	54
5.12 Aplicación del Software Geogebra	55
5.13 Ambiente de aprendizaje	56
5.14 Secuencia didáctica	57
6. Metodología	58
6.1 Enfoque	58
6.2 Tipo de Estudio: Investigación acción	58
6.3 Técnicas	60
6.4 Instrumentos de Recolección de Información	60
6.5 Fases de la investigación	61
6.6 Contexto institucional, social y escolar	62
6.7 Población y muestra	63
6.8 Categorías de Análisis	63

6.9 Plan de acción	64
7. Resultados	65
7.1 Identificación de dificultades en la resolución de problemas modelada a partir de una función lineal	65
7.1.1 Observación directa	65
7.1.2 Encuesta estudiantes	67
7.1.3 Entrevista docente	70
7.1.4 Diagnóstico prueba de entrada	73
7.1.5 Triangulación	74
7.2 Diseño e implementación de la secuencia didáctica para aprender a resolver problemas de la función lineal	76
7.2.1 Actividad 1. La función lineal, puntos de corte y pendiente	76
7.2.2 Actividad 2. Geogebra software de apoyo	77
7.2.3 Actividad 3. Graficación de la función lineal haciendo uso de Geogebra	78
7.2.4 Actividad 4. Método Pólya para solución de problemas	78
7.2.5 Actividad 5. Solución de problemas de función lineal	79
7.3 Análisis de los resultados de la secuencia didáctica implementada: hallazgos	80
7.3.1 Categoría enseñanza	80
7.3.2 Categoría aprendizaje	82
7.3.3 Categoría pensamiento	82
8. Análisis de resultados	83
8.1 Ciclos de reflexión pensamiento lógico	83

8.2 Ciclos de reflexión pensamiento matemático	83
8.3 Ciclos de reflexión pensamiento científico	84
8.4 Necesidades identificadas y cambios realizados	84
8.5 Prueba de salida Análisis	86
9. Conclusiones	88
10. Recomendaciones y Sugerencias	92
11 Aprendizajes pedagógicos y didácticos obtenidos	93
Referencias	100
Anexos	109

## Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1. Algunos modelos de resolución de problemas matemáticos	44
Tabla 2. Instrumentos	60
Tabla 3. Categorías	63
Tabla 4. Diagnóstico observación directa clase	65
Tabla 5. Diagnóstico observación directa docente	66
Tabla 6. Diagnostico prueba de entrada	73
Tabla 7. Triangulación de la información de acuerdo a las categorías de análisis	74
Tabla 8. Enseñanza	81
Tabla 9. Pensamiento lógico	83
Tabla 10. Pensamiento matemático	83
Tabla 11. Pensamiento científico	84
Tabla 12. Necesidad identificada antes - después	84
Tabla 13. Aprendizajes pedagógicos obtenidos	93
Tabla 14. Aprendizajes didácticos obtenidos	94
Tabla 15. Aprendizajes comportamentales	94

## Lista de anexos

	Pág.
Anexo 1. Pruebas saber	109
Anexo 2. Encuesta a estudiantes	110
Anexo 3. Consentimiento informado	111
Anexo 4. Entrevista a docente de matemáticas	112
Anexo 5. Prueba de entrada - diagnóstico	114
Anexo 6. Secuencia didáctica	117
Anexo 7. Evidencias del trabajo realizado	145
Anexo 8. Videos de apoyo	147
Anexo 9. Links Power Point	149
Anexo 10. Actividades desarrolladas por los estudiantes	150

## Resumen

En este trabajo se determinó el impacto de aprendizaje de la secuencia didáctica de la resolución de problemas que se modelan con la función lineal mediadas por las TIC y el uso del software Geogebra con el fin de contribuir con el aprendizaje en los estudiantes del grado noveno de la I.E.D Codema. Se identificaron las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de problemas de la función lineal, se diseñó una secuencia didáctica para que los estudiantes puedan aprender a resolver problemas de la función lineal con el apoyo del software Geogebra. Se implementó la secuencia didáctica y se describieron los resultados obtenidos. El enfoque es cualitativo, tipo de investigación acción, se hizo uso de la observación directa, encuesta a estudiantes, entrevista a docente y prueba de entrada - salida. La muestra corresponde a 40 estudiantes. Las categorías analizadas fueron enseñanza, aprendizaje y pensamiento. Se concluye que mediante la secuencia didáctica utilizada los estudiantes siguieron el proceso para lograr entender el planteamiento del problema, replantearlo con sus palabras, distinguir los datos, saber realmente lo que solicitaba el problema y analizar la información suministrada y de acuerdo con los conocimientos previos diseñaron planes o estrategias para su solución mediante figuras, diagramas, razonamiento, formulas, modelos entre otras, para luego ejecutar el plan y finalmente revisar si la respuesta obtenida estaba acorde con la solicitud del problema

Palabras clave: resolución de problemas, función lineal, Geogebra, ambiente de aprendizaje, comprensión, secuencia didáctica.

## Abstract

In this work determined the impact of learning of the didactic sequence of the resolution of problems that are modeled with the linear function mediated by the ICT and the use of the software Geogebra in order to contribute with the learning of the students of the ninth grade of the I.E.D Codema. The difficulties presented by the students in the resolution of problems of the linear function were identified; a didactic sequence was designed in order that the students could learn to solve problems of the linear function with the support of the software Geogebra. The didactic sequence was implemented and the obtained results were described. The approach is qualitative, a type of action research, the direct observation was used, surveys to students, interviews to teachers and an entrance exam and a quality test. The sample corresponds to 40 students. The analyzed categories were teaching, learning and thought. By means of the didactic used sequence applied, it was concluded that the students followed the process to understand the approach of the problem, to restate it with his/her words, to distinguish the data, to know really what the problem was requesting and to analyze the supplied information and in agreement with the previous knowledge to design plans or strategies for his/her solution through figures, graphs, reasoning, formulas, models among others to execute the plan and finally to check if the obtained response was according to the request of the problem.

Key words: resolution of problems, linear function, Geogebra, environment of learning, comprehension, didactic sequence.

## Introducción

La presente investigación plantea una propuesta didáctica para el fortalecimiento de la resolución de problemas mediante el método Polya para la función lineal a partir de la aplicación del programa de Geogebra con los estudiantes del grado noveno del colegio CODEMA, jornada tarde. Por esta razón, se realiza una revisión teórica de los diferentes elementos de la función lineal, sus operaciones, representaciones, procesos y subprocesos, identificando las relaciones, representaciones, como también de las aplicaciones y uso del software Geogebra.

En el caso de la función lineal se revisan las concepciones de los estudiantes, cómo la reconocen, diferencian, establecen representaciones y realizan la traducción de una representación a otra a partir del software Geogebra.

De esta manera, la investigación presenta una estrategia didáctica que busca brindar caminos para la apropiación de los elementos básicos de la función lineal y la aplicación a partir del uso del software, estudiar sus dificultades, analizar las representaciones y relaciones entre sí, la ejecución de cálculos evidenciando de manera estructural los vacíos conceptuales, dificultades procedimentales y actitudinales de los estudiantes de grado noveno del colegio Codema.

Igualmente, desarrollar problemas invita a potenciar habilidades o capacidades innatas al ser humano, ya que es por medio de ellas que puede expresar su pensamiento, potenciar la comprensión de la función lineal como elemento fundamental en el uso adecuado del programa Geogebra.

Desde este punto de vista al diseñar e implementar estrategias y métodos que potencien la comprensión de la función lineal, se busca que los estudiantes desarrollen habilidades y nuevos conocimientos. En este sentido y de acuerdo con Planchart (2015), "Un determinado concepto se establece en un individuo si se puede articular las diferentes representaciones del concepto sin

contradicciones". Para este caso la función es tomada como herramienta que modeliza procesos de cambio, proporcionando la posibilidad de notar la dependencia entre las variables, hecho que causa dificultad y que con ayuda del diseño y aplicación de software creará caminos de comprensión.

De esta manera el presente estudio analizará los procesos que usan los estudiantes para la resolución de problemas en cuanto a función lineal, para encontrar las dificultades en la ejecución de cálculos, de representaciones y relaciones entre sí, evidenciándose de manera estructural los vacíos conceptuales, dificultades procedimentales y actitudinales de los estudiantes y presentando un diseño didáctico para el mejoramiento de las mismas a través del uso de Geogebra.

## 1. Justificación

De acuerdo a los resultados de las Pruebas Saber 2016, (Anexo 1), los estudiantes de grado noveno presentan dificultades en el área de matemáticas obteniendo bajos niveles de desempeño (5 estudiantes con insuficiente, 26 con mínimo, 7 satisfactorio y 1 avanzado). Revisando los boletines de años anteriores las falencias detectadas se dan para resolver problemas de funciones lineales, comprensión del concepto de función lineal y su aplicación; lo anterior se evidencia en la baja relación entre los elementos de la función y sus representaciones; tienden a desarrollar mecánicamente tabulaciones sin establecer relaciones entre los conjuntos de salida y llegada con el fenómeno a relacionar; con frecuencia desarrollan mal procesos algebraicos, por vacíos conceptuales y procedimentales que los induce a cometer errores en la interpretación, así mismo, no establecen la solución de una ecuación al referenciarse las variables y aplicarlas. Todo lo anterior justifica la realización del presente trabajo.

Es de anotar que el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas busca a través de diferentes estrategias la construcción del conocimiento y el desarrollo de habilidades; por lo que es de vital importancia reflexionar sobre preguntas: ¿Cómo aprenden los estudiantes? ¿Qué actividades son propicias para fortalecer la enseñanza? y ¿Qué alcance tienen estas sobre los estudiantes?, de manera que la reflexión con respecto al concepto matemático de la función lineal, lleva a tener en cuenta las diferentes representaciones de las cuales pueden hacerse uso para dicho aprendizaje.

La resolución de problemas matemáticos ha cobrado importancia en el sector educativo y la vida cotidiana, debido a que la sociedad actual exige personas más eficientes para idear estrategias de análisis, razonamiento y comunicación sobre diversas situaciones que implican tomar decisiones, realizar cálculos, interpretar conceptos cuantitativos, espaciales,

probabilísticos, entre otros. Estas exigencias comprometen a los docentes a pensar cuales son las limitantes y posibles estrategias que se tienen en los procesos de pensamiento y resolución de problemas matemáticos.

Teniendo en cuenta que los problemas estimulan la capacidad de crear, inventar, razonar y analizar situaciones de todo tipo, para luego resolverlas y que genera interdisciplinariedad con otras asignaturas facilitando el aprendizaje ya que se relacionan los contenidos con la vida diaria de los estudiantes.

Es preciso, considerar nuevos fundamentos teóricos y metodológicos que pueden orientar con mayor eficacia, el desarrollo de la competencia de resolución de problemas, para favorecer a los estudiantes, no sólo en su rol académico, evitando la desmotivación hacia el aprendizaje, las altas tasas de reprobación de la asignatura, la repetición y la deserción escolar; sino facilitando su interacción con las situaciones matemáticas que les plantea la vida cotidiana, de las cuales muchas veces, los estudiantes se sienten ajenos.

En el mismo sentido se resalta los aportes de Polya (1976:89), quién considera que la enseñanza de estrategias de resolución de problemas, debe ser una prioridad en la clase de matemáticas; pero no como la asimilación de un proceso mecánico según la particularidad del problema, sino como una actitud que favorezca el pensamiento crítico, la conciencia, la curiosidad, la creatividad, etc. Sólo sí se ponen en juego estas facultades inventivas, si se tiene en cuenta su contexto, podrán experimentar el descubrimiento y el goce del triunfo, lo que podría determinar su gusto y afición por el trabajo intelectual.

Es importante tener en cuenta los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional, en sus políticas de educación, los cuales señalan la importancia de promover el desarrollo del pensamiento matemático para que el estudiante pueda describir, organizar, interpretar y relacionarse con determinadas situaciones a través de la matemática (MEN, 1998:1).

Se debe tener en cuenta que las clases de matemáticas tienden a volverse rutinarias y los problemas que se plantean a los alumnos son descontextualizados; es decir, no se relacionan con situaciones reales; lo que de cierta forma hace que pierdan el interés, apliquen algoritmos mecánicamente, den soluciones incoherentes y no analicen el error. Por esta razón, el presente estudio se propone mejorar el aprendizaje en cuanto a la resolución de problemas matemáticos de funciones lineales haciendo uso de Geogebra.

Finalmente, es importante resaltar que uno de los fines de la educación es formar personas capaces de afrontar los incesantes cambios de la sociedad y el conocimiento, es decir, se debe ir a la par con el uso de tecnologías y con el conocimiento actualizado del saber y el uso de Geogebra que permite que los estudiantes manipulen, conjeturen, esbocen y planteen posibles soluciones, mediante la técnica del arrastre con ensayo y error de sus conjeturas lo que los llevará a construir su propio conocimiento, se espera que los estudiantes formulen conjeturas matemáticas, desarrollen y evalúen argumentos, eligiendo varios tipos de razonamientos y métodos de demostración al desarrollar el tema de función lineal, así mismo organizar y comunicar su pensamiento con coherencia y claridad, expresar ideas con precisión, reconocer conexiones entre conceptos matemáticos y la realidad, y aplicar lo aprendido en situaciones reales (Bello, 2013:48).

## 2. Planteamiento del problema

### 2.1 Descripción del problema

De acuerdo con el diagnóstico los estudiantes no comprenden la noción de incógnita, de pendiente, de variable, de intercepto y presentan de igual manera dificultades al relacionar la expresión algebraica de una función con la representación gráfica, comunicando el mismo tipo de justificación en todas sus respuestas; es decir, no se asocia el concepto de función lineal a situaciones de dependencia que dan origen a dichas representaciones por lo que se requiere promover el paso de la concepción mecanicista al de la concepción de objetos relacionados entre sí que se modelizan y entran en juego para facilitar el estudio de un fenómeno desde la aplicación de software.

Es importante advertir que estos errores, no solamente se refieren a dificultades en la ejecución de cálculos, de representaciones y relaciones entre sí, que se reflejan de manera constante a lo largo del curso, convirtiéndose en la causa de deficientes resultados en pruebas institucionales, internas y externas, como se muestra en algunos referentes y antecedentes de esta investigación. (Véase Anexo 1. Pruebas saber)

De acuerdo con Muñoz, (2012: 52), la enseñanza de la función lineal se ha encaminado por la parte mecánica operativa, por la simple elaboración de una línea recta en papel milimetrado, dejando a un lado las situaciones problemas de la vida real que se pueden modelar a través de la función lineal, permitiendo una mayor articulación con otras áreas del saber.

## **2.2 Pregunta de investigación**

¿Cómo contribuye una secuencia didáctica mediada por las TIC y el uso del software Geogebra para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos que se modelan con la función lineal en los estudiantes de grado 9° de la I.E.D Codema?

## **Objetivos**

### **3.1 Objetivo general**

Determinar la contribución de una secuencia didáctica mediada por las TIC y el uso del software geogebra para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos que se modelan con la función lineal de los estudiantes del grado noveno de la I.E.D Codema

### **3.2. Objetivos específicos**

Identificar las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de problemas modelada a partir de una función lineal.

Diseñar una secuencia didáctica para que los estudiantes puedan aprender a resolver problemas modelada a partir de la función lineal con el apoyo de las TIC y del software Geogebra.

Implementar la secuencia didáctica para resolver problemas de la función lineal a través del uso del Software Geogebra.

Analizar los resultados de la secuencia didáctica implementada con el fin de argumentar el favorecimiento del aprendizaje de los problemas matemáticos.

## **4. Estado del arte**

A continuación, se presentan los antecedentes sobre trabajos que priorizan el aprendizaje haciendo uso del software en matemáticas a nivel internacional, nacional - local, con el fin de conocer los aportes que han realizado, permitiendo hacer un recorrido histórico para comprender su evolución en el sector educativo en el presente y su proyección hacia el futuro.

Es de anotar que a nivel nacional se encuentran trabajos de grado similar los cuales son importantes a la hora de indagar sobre los resultados obtenidos y las limitaciones encontradas.

### **4.1 A nivel internacional**

#### **4.1.1 Uso de software en matemáticas**

Bello Durand (2013) en su trabajo: Mediación del software Geogebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria, proponen usar Geogebra como mediador de la enseñanza de la Programación Lineal, pues se piensa que con este software y las situaciones de aprendizaje propuestas a través de una serie de actividades se logrará que los alumnos puedan manipular, conjeturar, esbozar y plantear posibles soluciones. Este trabajo aporta al presente estudio ya que se puede construir el conocimiento sobre el tema y hacer representación verbal, algebraica y gráfico de manera natural y espontánea.

Paiva, S. (2014) propuso usar calculadoras gráficas y el programa matemático Solver aplicado en Excel, esta investigadora observó que el uso de estos recursos, en el desarrollo de su investigación, facilitaba la resolución de problemas de programación lineal, pero indicó que el uso de estas tecnologías no implicaba que los alumnos conocieran necesariamente procedimientos de cálculo básico en su desarrollo. Este trabajo llama la atención ya que haciendo

uso de software se puede ver fácilmente los errores al desarrollar operaciones aritméticas básicas.

Sánchez & López (2014) y Coronado (2012) en el trabajo titulado: Didáctica de la programación lineal con ordenador para estudiantes de administración y dirección de empresas trabajaron con diseños y aplicaciones interactivas en Programación Lineal para Internet. Diseñaron material didáctico para internet usando el programa Java y aplicaciones interactivas para desarrollar con la ayuda o mediación de software algunos temas matemáticos. Este trabajo aporta al presente estudio ya que al concluir sus investigaciones indicaron que existe una fuerte influencia de los software matemáticos en el aprendizaje de determinados conceptos, finalmente los alumnos con quienes trabajaron matemática haciendo uso de tecnologías ya no querían regresar a la enseñanza tradicional de lápiz o papel o bien del uso de pizarras sino preferían usar software en aulas de clase de matemática equipadas con recursos tecnológicos.

Benedicto Baldonado, (2012) en su trabajo: Estudio de funciones con Geogebra se centra en cómo alcanzar una correcta comprensión de los conceptos referidos a funciones haciendo uso del Geogebra, el problema que motiva esta investigación radica en que, en los cursos tradicionales de 2º de Bachillerato, cantidades significativas de estudiantes no logran comprender los conceptos básicos de funciones. Tiene como objetivo hacer una propuesta de trabajo basada en la utilización de Geogebra, dado que esta herramienta potencia la percepción visual y geométrica de los conceptos, facilitando con ello su comprensión. De este estudio llama la atención el hecho que en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, algunos estudiantes resuelven muchos problemas y ejercicios y, por supuesto, aprueban exámenes del área. Es de anotar que este hecho no garantiza la real comprensión de los conceptos matemáticos utilizados, pues muchos exámenes no trascienden lo operativo, lo mecánico o memorístico. Así mismo, este trabajo aporta al presente estudio ya que por la utilización de mecanismos de tipo visual-geométrico. El hecho de destacarlo

es porque para una correcta comprensión de los contenidos es importante la percepción visual de los conceptos, especialmente en estudiantes “visuales”. Es de anotar que las tecnologías computacionales tienen un fuerte impacto profesional en la práctica de las matemáticas. Se destaca el uso del Geogebra, como software libre, de fácil manejo, y que permite trabajar contenidos de geometría, álgebra, análisis, cálculo.

Coppié, Á y Velázquez, F. E. (2013) en el trabajo: Estudio de la Función Lineal mediado por TIC. Profesorado en Matemática, se describen prácticas que aportan al presente estudio ya que se aborda el estudio de las funciones lineales para resolver problemas extra e intra matemáticos recurriendo al uso de recursos tecnológicos con trabajo en grupos pequeños. Se realizó el análisis de los procesos mediante el uso de las TIC.

Dentro de un artículo de investigación de la revista Educación de matemática de México, Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia y Myriam Belisa Vega Restrepo; en el año 2012, en su trabajo “La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje”. toman importancia las figuras geométricas para la enseñanza y desarrollo de la geometría como parte clave, pero al igual resaltan la complejidad y el requerimiento de un conocimiento específico, destacan procedimientos cognitivos realizados por un grupo de estudiantes en una secuencia didáctica de enseñanza sobre maneras de transformar figuras geométricas, llegando a una conclusión que es indispensable y urgente abrir espacios específicos en los currículos escolares de la educación de una manera más contextualizada.

Roldán, (2008), en el Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de la República de Cuba; a través de su trabajo “Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la educación primaria”, destaca que la presentación de los contenidos se da a través de situaciones de aprendizaje. Este trabajo aporta el presente estudio ya que plantea un

sistema de medios que propician la movilidad en las figuras en métodos y procedimientos que promueven la búsqueda, exploración y experimentación a través de la geometría dinámica.

De igual forma en el I congreso de educación matemática de América central y el Caribe, Ruiz y Cerezo (2013) de la facultad de formación de profesorado y educación de la Universidad Autónoma de Madrid – España; desde el trabajo de investigación “Influencia del software de geometría dinámica Geogebra en la formación inicial del profesorado de primaria”, manifiesta que utilizó el software de geogebra para examinar la influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje sobre las matemáticas para determinar si se mejoran las competencias geométricas y didácticas de los estudiantes a cargo de un grupo de docentes. La metodología fue cuasi-experimental la cual obtuvo mejoras en el desarrollo de procesos y habilidades geométricas relacionadas con el contexto y no aislados con respecto a lápiz y papel. Este trabajo aporta al presente estudio ya que se concluye que mediante el uso de esta metodología se lograron avances en las competencias geométricas sin tener en cuenta el nivel de conocimiento digital de los educandos.

Al respecto del uso de las TIC, en el proyecto Edumat- Maestros, de la revista didácticas de las matemáticas para los maestros: Godino y Ruiz (2004) establece que los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso de una tecnología apropiada” todo lo expuesto propende por utilizar los recursos tecnológicos de manera responsable con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático de los estudiantes.

Una propuesta metodológica de la enseñanza y aprendizaje de la geometría aplicada en las escuelas críticas, de la universidad de Chile, por Alsina (1994), la adquisición de destrezas y habilidades de percepción visual pueden ser aprendidas y potenciadas a través del estudio de la geometría, ya que esta requiere que el alumno identifique y reconozca formas geométricas, relaciones y propiedades en una dos y tres dimensiones.

Lastra Torres y Romeo Cardone (2005) en el trabajo titulado Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas, para optar el título de magíster en educación, aborda la geometría desde el tema de cuadriláteros para niños de grado cuarto de primaria en tres escuelas de Chile y aplica el modelo Van Hiele, el software “Cabri” y da una relevante importancia al rol del maestro como factor significativo en la adquisición de los conocimientos de los estudiantes. Menciona que la geometría como parte de la matemática, permite analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales, que favorecen la comprensión y admiración por el entorno natural que rodea al individuo. Este trabajo aporta al presente estudio ya que se analiza cómo se estimula en los niños(as) la creatividad y una actitud positiva hacia las matemáticas y en los profesores los lleva a utilizar diferentes actividades como el plegado, el dibujo, el modelado, entre otras, que les dan otro valor y significado a los procesos en el aula.

Otra investigación analizada que pueden aportar al marco teórico es: La Elipse como lugar Geométrico a través de la Geometría del doblado del papel en el contexto de Van Hiele, de Santa Ramírez (2011), para optar el título de magíster en educación en la línea de educación matemática, hace énfasis en la desarticulación que existe entre conceptos y procedimientos, en cuanto al aprendizaje de las matemáticas, y en particular en la geometría, afirma que por esta razón muchos estudiantes, próximos a graduarse de bachilleres, presentan dificultades para comprender varios de los conceptos, afirmación que es importante tener en cuenta en el presente estudio.

En la Revista Uniciencia Vol. 27, No. 1, [74-94]. Enero – junio 2013, cuyos autores son Vargas Vargas y Gamboa Araya (2013), en el artículo de carácter científico que trata de la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y la enseñanza de la geometría, a la vez, reflexiona sobre la importancia de estudiar geometría y lo que esto significa

para la sociedad moderna; también hace un análisis de las concepciones y dificultades que se dan en la forma de enseñar y el aprender geometría.

El artículo, *Matemática y Arte en Educación Infantil*, escrito por la maestra de primaria y profesora titular de didáctica de las matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona, Edo (2008), se presentan contenidos y secuencias significativas en niños de preescolar para la enseñanza de figuras y sólidos geométricos a través de actividades relacionadas con distintas técnicas artísticas como pintura y escultura. En este artículo se escriben tres situaciones didácticas que se tendrán en cuenta ya que fueron diseñadas a partir de una misma propuesta metodológica, en tres aulas de distintas edades y partiendo, en cada caso, de una obra o artista distinto. Brinda orientación en cuanto a la secuencia didáctica, donde se trabaja de forma integrada el arte y la geometría a través, primero de la apreciación de pinturas y esculturas, y luego la composición de obras a partir de la apropiación de conceptos geométricos.

Arias (2013) en el trabajo *Construcciones dinámicas con GeoGebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática*, presentado en el I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe Santo Domingo República Dominicana, el objetivo fue conocer el programa Geogebra como herramienta de aprendizaje y enseñanza de la matemática, se realizaron construcciones diversas en el área de geometría y funciones. Recomienda preparar con anticipación la lección, realizar una guía de trabajo, usar actividades sencillas, Geogebra es un medio no un fin, y contar siempre con un plan B frente a cualquier eventualidad. Entre las ventajas del uso de Geogebra está que es software libre, es multiplataforma, multitarea, es motivante, apto para demostraciones visuales, actualización constante y que existe una comunidad virtual para apoyo.

Giubergia, Socolovsky, Ré. (2017), en el trabajo *Incorporación de TICs a las clases de Análisis Matemático*, se presenta una propuesta de incorporación de trabajos prácticos basados en

las Nuevas Tecnologías (NTICs) para los cursos de Análisis Matemático I, del primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional. El tema de conocimiento sobre el cual se realiza el desarrollo de la experiencia es el de “Derivada de una Función” utilizando como herramienta el software para matemática Geogebra. Se presentan los fundamentos teóricos, la estrategia didáctica diseñada para la realización de la experiencia, la práctica en el laboratorio de informática, las estadísticas obtenidas y se reflexiona sobre los resultados alcanzados. Se destaca la importancia de la incorporación de herramientas informáticas a la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. La utilización de la herramienta de software Geogebra como recurso didáctico y complemento de la clase tradicional, ha demostrado a través de la experiencia y de las estadísticas presentadas, ser práctica, útil y de un valor agregado apreciable.

#### **4.1.2 Resolución de problemas matemáticos**

Ramos, (2017: 69) en su trabajo: Aplicación del método de Pólya para el aprendizaje de Funciones lineales y cuadráticas en los estudiantes de primer Año de bachillerato general unificado del colegio de Bachillerato Pío Jaramillo Alvarado de la ciudad de Loja, Período 2015-2016, se evidenció que los estudiantes presentan dificultad en la resolución de problemas de funciones lineales y cuadráticas, además, que la aplicación del método de Pólya permite desarrollar en los estudiantes la capacidad de resolver problemas de funciones. Este trabajo es importante para el presente estudio ya que se concluyó que en el proceso educativo la metodología aplicada permite a los estudiantes internalizar el contenido de funciones lineales y cuadráticas y que mediante la aplicación del método de Pólya de una manera adecuada sirve para

mejorar el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas en los estudiantes de primer año de bachillerato general unificado

De Lera & Deulofeu Piquet (2010: 23), en su ponencia sobre planteamiento e interpretación de problemas contextualizados, aunque inicialmente hacen una reflexión sobre la importancia de enseñar a pensar matemáticamente a los alumnos, también parten de la realidad de que el día a día del aula matemática, muchas veces no lo permite, pues la enseñanza de esta asignatura tiende a ejercerse de forma rutinaria y descontextualizada. De acuerdo con esta situación, plantean el objetivo de comprobar cómo intentan resolver problemas contextualizados los estudiantes de 2º de bachillerato científico y tecnológico del instituto de Tarragona. Estos investigadores propusieron dos tipos de problemas a los estudiantes, con el mismo grado de dificultad, los primeros correspondientes a situaciones reales cercanas a ellos y los segundos, sacados de los textos de bachillerato y de pruebas para acceso a la universidad. El estudio aporta al presente trabajo ya que se comprobó, que los estudiantes comprenden con mayor facilidad los problemas relacionados con la vida real y proponen más de un método para resolverlos. Esta conclusión demuestra, la importancia de trabajar problemas contextualizados y de enseñar antes, estrategias o técnicas para analizarlos y resolverlos.

De igual forma García (2014: 89), en su estudio, describe el desempeño y las estrategias que usan los niños de la comunidad TeeSavi en México, para resolver problemas matemáticos contextualizados y descontextualizados. El maestro también comprueba que los niños tienen un mejor rendimiento cuando resuelven problemas relacionados con actividades que realizan con sus familias o en la comunidad, que cuando son ajenos a ellos. Es necesario destacar de este trabajo, el énfasis que se hace en usar un lenguaje cercano a los niños, plantear situaciones de su contexto y tener en cuenta las estrategias personales que utilizan los niños para que las socialicen y se aprovechen en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Pasando ya a un plano más experimental, el trabajo de Cintas, (2013: 21) representa un aporte esencial para el desarrollo de esta investigación, ya que fundamenta extensamente la importancia de contextualizar las matemáticas y propone un modelo de aprendizaje contextual para Grado 4° de bachillerato que constó de cuatro sesiones, caracterizadas por la experimentación, trabajo cooperativo y transferencia a la vida cotidiana. De este modelo de aprendizaje contextual, se puede rescatar, la importancia de usar materiales y recursos variados para favorecer la experimentación en contextos reales, el fomento de la investigación que propician el descubrimiento y la curiosidad, pero sobre todo, el trabajo en equipo, ya que el alumno no sólo aprende de los otros, sino enriquece valores como el respeto, la tolerancia y la solidaridad, entre otros.

Blanco Nieto, Cardenas Lizarazo, & Caballero Carrasco (2015: 79), abordan temas fundamentales relacionados con lo que significa centrar la atención en la resolución de problemas como elemento importante en el currículo y en los diferentes escenarios de enseñanza. Uno de los aspectos más valiosos por rescatar de este texto, además de la conceptualización, modelos de enseñanza y referentes para proponer problemas, es la relación de los aspectos cognitivos con los afectivos, los autores reflexionan sobre como las creencias, actitudes y emociones influyen en la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades de los estudiantes; así como en la preparación de las clases y la motivación que los maestros logran despertar en sus alumnos hacia el área de matemáticas

Por otro lado, Pifarre & Sanuy (2011: 32) en su investigación, no sólo diseñan una propuesta de enseñanza – aprendizaje de estrategias de resolución de problemas matemáticos relacionados con proporciones, razones y porcentaje; sino que analizan los entornos instruccionales adecuados para la enseñanza de esta competencia; destacando la importancia de la instrucción guiada, el modelado, la auto interrogación, el análisis y discusión del proceso, el aprendizaje colaborativo,

entre otros. Esta información, sin duda alguna contribuyó al marco teórico y la metodología que orientó el presente proyecto.

Y finalmente, siguiendo la teoría de Pólya (1995:52), respecto a la resolución de problemas Krulik & Rudnick, (1989:69), quiénes elaboran modelos instruccionales similares, que buscan que los estudiantes sean capaces en primer lugar, de reconocer las distintas partes o componentes a tener en cuenta en la resolución de problemas, para luego pasar a una adecuada interpretación.

#### **4.2 A nivel nacional - local**

Muñoz Cuartas, (2012:89) en su trabajo titulado: Diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC, busca que los estudiantes adquieran un mejor aprendizaje del concepto de la función lineal en las matemáticas, y su importancia en la modelación de situaciones problema, a través de una herramienta virtual de aprendizaje como lo es la plataforma Moodle. Se concluyó que los estudiantes del grupo experimental lograron un rendimiento académico promedio superior a los estudiantes del grupo control después de haber terminado la implementación de proceso de formación. Esto se atribuye al proceso de intervención realizado que promovió una propuesta para el aprendizaje significativo de la función lineal y la utilización de un Ambiente Interactivo de Aprendizaje, en comparación con un grupo control donde se desarrollan las actividades de enseñanza de manera tradicional.

Ospina García, D. (2012:17) en su trabajo: Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal tiene por objetivo comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal. Se concluyó que

los estudiantes muestran dificultades en la conversión al registro algebraico desde otro registro que no sea el gráfico, esto tiene que ver con la falta de congruencia entre las representaciones semióticas del concepto. Igualmente se concluye que el concepto de función debe ser abordado para su enseñanza de la misma forma como se dio epistemológicamente, desde el lenguaje natural y posteriormente realizar la conversión hacia otros registros de representación (gráfico, tabular, figural, simbólico) ya que la fórmula algebraica, la cual ha sido privilegiada por los docentes al inicio de la enseñanza del concepto genera una mayor dificultad en la conceptualización del mismo.

García Fajardo V. (2014:82). En su trabajo: Una secuencia didáctica que integra Geogebra para la enseñanza de ecuaciones lineales en grado octavo, presenta la aplicación de la ingeniería didáctica, tomando como eje fundamental el diseño, experimentación y evaluación de una secuencia didáctica que integra Geogebra para la enseñanza de ecuaciones lineales se encuentra sustentado bajo tres dimensiones que validan las fases de este trabajo, a saber, Dimensión histórico-epistemológica, Dimensión cognitiva y Dimensión didáctica. En este sentido la validación de este trabajo final se centra en el análisis detallado a priori y a posterior de la secuencia en relación con formas de razonamiento de los estudiantes frente a la construcción del concepto de ecuación mediado por diferentes registros de representación semiótica.

Martínez Gómez (2013) en el trabajo: Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra, presenta una unidad didáctica que sirve de guía para la enseñanza - aprendizaje del concepto de función y sus características para grado noveno. Se concluye que los módulos propuestos con el software Geogebra son una estrategia didáctica valiosa, así mismo se estableció que Geogebra es una herramienta de gran utilidad para diferentes temáticas.

Montoya Benjumea, Norman David (2015) en el trabajo: Propuesta de identificación del aporte de los recursos tecnológicos en la comprensión del concepto de función lineal de los

estudiantes del grado noveno en la Institución Educativa José Miguel de Restrepo y Puerta de Copacabana, se revisó el concepto de función lineal y cómo mejorar la comprensión a través de medios tecnológicos. Este trabajo se llevó a cabo debido a que es un tema de gran trascendencia y los estudiantes no lo comprenden bien, por lo cual se propone el uso de las TIC y las situaciones problema mediante el trabajo colaborativo para mejorar el proceso de aprendizaje de los conceptos y aplicaciones de la función lineal. Primero se afianzan los conceptos previos de los estudiantes y luego haciendo uso de entornos virtuales con Geogebra. Se concluye que el uso de las TIC se convirtieron en una herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza - aprendizaje y en una forma de aplicar lo aprendido.

Guevara Sánchez, C. A. (2011) en el trabajo de maestría titulado: Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación, se analizó el concepto de función y luego se proponen actividades de simulación como alternativa para integrar las representaciones de las funciones y mejorar la enseñanza. Se hace uso de Graph 4.3 y Geogebra para la construcción de modelos geométrico - dinámicos. Se hace una mirada desde lo general del concepto de función a lo particular como red conceptual y con significado para ser aprehendida por los estudiantes. A nivel curricular se relaciona con el aprendizaje de las matemáticas dándole sentido y coherencia desde diferentes pensamientos. En cuanto a lo pedagógico se asocia el concepto de función con las aplicaciones físicas y geométricas para lograr el aprendizaje significativo. Desde lo didáctico se construyen procesos de modelación y simulación haciendo uso de simuladores.

Barajas, C.; Fulano, B.; Ríos, W.; Salazar, L.; Pinzón, Á. A. (2016) en el trabajo de maestría titulado Función constante, lineal y afín, se diseñó de la unidad didáctica sobre el tema de función, su proceso de implementación, evaluación y la propuesta de mejora a partir del análisis de los resultados obtenidos Se implementó la unidad didáctica en el cuarto período del año

escolar 2015. Luego de implementarla, se recogió y codificó la información para introducirla al sistema ACE (análisis de consecución de expectativas). El análisis de los resultados obtenidos permitió evaluar la unidad didáctica e identificar las debilidades y fortalezas tanto en lo cognitivo como en lo afectivo. Se logró el mejoramiento y cualificación de la práctica docente y el trabajo en equipo permitió considerar varias miradas sobre el mismo objeto y posibilitó la realización de reflexiones y disertaciones profundas sobre la importancia de los análisis realizados.

En la revista *Praxis y saber* de la maestría en educación de la UPTC, se han realizado publicaciones de referentes y proyecto de investigación acerca de la implementación de la geometría dinámica, dentro de sus aplicaciones esta cabri geometry II, CaRMetal, Cabri3D, regla y compas, Paper folding, hacen pensar que aprender matemáticas sin el uso de estos recursos informáticos sería privarse de vivir experiencias fascinantes y novedosas en el campo de las representaciones de conceptos matemáticos; El uso de software permite que el estudiante utilice herramientas tecnológicas que faciliten su propio aprendizaje, rompiendo el paradigma que dificulta relacionar los conceptos geométricos con las vivencias personales.

Un grupo de investigadores en el ámbito de las matemáticas de la Universidad Pedagógica nacional “Aprendizaje y enseñanza de la geometría” Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry, en “Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemáticas con el uso de programas de geometría dinámica” (Camargo, Samper y Perry 2006. Pp. 371 – 383) Plantea que la geometría dinámica provee un contexto rico en posibilidades de expresión que apoya la actividad demostrativa de los estudiantes. De otro lado, se plantean acciones heurísticas tales como la visualización y exploración que ayudan a que el estudiante tenga más dominio a la hora de practicar habilidades geométricas como construcciones, mediciones, y transformaciones llegando a una verificación.

También, Martín Eduardo Acosta, Escuela de matemáticas del grupo Edumat – UIS Universidad Industrial de Santander; en el año 2010, a través de su trabajo “Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica” (Acosta, 2010) Destaca cómo es posible prever un aprendizaje por adaptación como resultado de la interacción de los estudiantes con las figuras dinámicas; por otro lado manifiesta como el profesor logra relacionar los conocimientos productos de los aprendizajes adquiridos por el software de geometría dinámica la cual los adapta a situaciones didácticas.

Retomando la relación de Geogebra en la construcción de figuras bidimensionales y tridimensionales al respecto la revista científica de la universidad Distrital Francisco José de Caldas publica un artículo en el año 2013, titulado Dibujando la realidad usando las Isometrías en el plano bidimensional, proyecto de innovación pedagógica se centra en la enseñanza-aprendizaje de las isometrías en el plano bidimensional, en los grados sextos y séptimo; se enfatiza en su utilidad para el desarrollo del arte gráfico haciendo uso de imágenes dadas, y el software de geogebra dando como resultado que es un proyecto que requiere de más tiempo y fundamentos pero que en lo poco que se evidencio dio grandes expectativas ya que el software permite un representación de imágenes reales.

Estos referentes permiten soportar la idea de la geometría dinámica como herramienta que facilita la representación de situaciones reales que viven los estudiantes en contexto abstracto, adquiriendo habilidades y competencias geométricas.

## 5. Marco teórico

A continuación, se presentan los referentes teóricos de acuerdo a los temas que competen a este trabajo. Se tienen en cuenta las teorías del conocimiento, aprendizaje, enseñanza, pensamiento, problemas matemáticos, estrategias de resolución, competencias matemáticas, pensamiento matemático y en cuanto al tema de función lineal geogebra, ambiente de aprendizaje y secuencia didáctica.

### 5.1 Teorías del conocimiento

Es de anotar que la evolución de la sociedad y de los avances tecnológicos obliga como seres humanos a transformar constantemente las costumbres; a pesar de que la ciencia ha evolucionado en las últimas décadas, las prácticas educativas aún siguen arraigadas a métodos tradicionales, la búsqueda de nuevas alternativas que permitan mejorar el que hacer, lleva a realizar una transformación en estrategias como lo menciona Chevallard (2012:48) “La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado, está constituido por la condición pulsional del saber humano y su tendencia al cambio”.

Ahora bien, el estudio de las matemáticas se ha realizado dentro del aula de una forma muy tradicional en la cual el docente ofrece una clase magistral aportando al educando una serie de información que en la mayoría de ocasiones no es asimilada ni comprendida, de igual forma (Mecina, 2010) afirma. “Nos limitamos a presentar solo dibujos de los cuerpos geométricos, sin dar la opción de manipular los mismos, (...). Uso casi nulo de recursos multimedia para que el alumno visualice, deduzca propiedades, se motive y trabaje a su ritmo” (p.159).

En este contexto se hace necesario como manifiesta Elliott (199:363). La idea de enseñanza implicada en el proceso de cambio también es diferente. Ya no se estructura como una actividad

orientada a continuar o determinar casualmente los resultados del aprendizaje. Se considera en cambio como una actividad capacitadora que aspira a facilitar un proceso dialectico.

De acuerdo a lo anterior es importante destacar a Duval (2016:45) quien manifiesta "que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación" en la cual las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática y nunca pueden considerarse independientes las representaciones semióticas de las mentales.

De igual forma como lo plantea el MEN (2004)

El desarrollo del pensamiento espacial se entiende como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales.

De ahí la importancia del uso de las TIC en el aula, en este proceso Riveros V. y Mendoza (2015) establecen que la sociedad del conocimiento demanda un aprendizaje flexible, aliado al cambio, adaptable a situaciones nuevas, capaz de manejar la incertidumbre, con visión de mundo, actuando como un ser humano pleno, capaz de construir y reconstruir su aprendizaje, estando consciente de sus virtudes y limitaciones, es así que el educando debe aplicar la tecnología informatizada mediante una planificación y una metodología para que su uso sea efectivo y significativo. La transparencia, la ubicuidad y la metodología en el uso de las TIC, son factores claves en su integración curricular.

## **5.2 Aprendizaje**

De acuerdo con Díaz - Aguado (2006; 68), el aprendizaje es una capacidad que en mayor o menor medida es poseída por todas las especies animales, ya que constituye un mecanismo

fundamental de adaptación al medio ambiente. Stuard citado por Wong (2015;5) establece que son varios los factores que impactan el aprendizaje de las personas por ejemplo la edad, educación, cultura, tipos y niveles de aprendizaje, ambiente de aprendizaje, actitudes y creencias, personalidad, motivación, así como estrategias y estilos de aprendizaje. Se establece que en el contexto pedagógico el aprendizaje es el proceso en el cual el estudiante con orientación del docente a través de una situación didáctica desenvuelve las habilidades y capacidades para apropiarse de conocimientos.

### **5.3 Enseñanza**

Se conoce como la transmisión de conocimientos, ideas, experiencias habilidades o hábitos a una persona que no los tiene. Se lleva a cabo teniendo en cuenta un conjunto de elementos como docentes que son los facilitadores, estudiantes que son el objeto del conocimiento el entorno en el cual se desarrolla el proceso. Se transmiten una serie de conocimientos, técnicas, normas y habilidades de acuerdo a diferentes métodos y con el apoyo de materiales (Medina, 2010; 58).

### **5.4 Pensamiento**

El pensamiento se define como la capacidad que tienen las personas para formar ideas y representaciones de la realidad en su mente; también es asociado al fenómeno psicológico racional objetivo y externo derivado del pensar para solucionar problemas. Ahora bien se puede establecer que el proceso de pensamiento es un medio de planificar la acción y de superar los obstáculos entre lo que hay y lo que se proyecta. El pensamiento es aquello que se trae a la realidad por medio de la actividad intelectual (Gonzalo, 2013;24).

## 5.5 Problemas Matemáticos

El concepto de problema matemático es complejo y ha sido abordado por varios autores desde distintos puntos de vista, a nivel filosófico, pedagógico y didáctico. Sin embargo, teniendo en cuenta el impacto que produjeron en el mundo de la enseñanza de la matemática los trabajos del profesor Pólya, a continuación se exponen en primer lugar, sus consideraciones al respecto.

Pólya (1995:59), precursor de este tipo de indagaciones en el campo matemático, desde una perspectiva global, indica que tener un problema significa “buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar”. Esto quiere decir, que es importante que el estudiante este consciente de que existe una dificultad, tenga deseos de resolverla, diseñe o planee la estrategia para resolverla y sobre todo compruebe si la solución que planteó es la correcta.

Así mismo, Polya, (1989) reflexiona:

... se entenderá que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados. p. (1).

Con esta proposición, el autor señala la importancia de enseñar a los estudiantes a analizar los problemas a profundidad, de ser perseverantes, recursivos y de estar en constante ejercitación, sólo así desarrollarán la competencia matemática. Pólya (1995), al respecto afirma:

La resolución de problemas es un arte práctico, como nadar o tocar el piano. De la misma forma que es necesario introducirse en el agua para aprender a nadar, para aprender a resolver problemas, los alumnos han de invertir mucho tiempo enfrentándose a ellos.

Y complementando lo anterior, Labarrere (2006:48) plantea que: “la solución de un problema no debe verse como un momento final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental”. Este complejo proceso de trabajo mental se materializa en el análisis de la situación ante la cual uno se halla: en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades; en la previsión y puesta en práctica de procedimientos de solución” (p. 86).

Es desde esta perspectiva, que el maestro debe hacer entender al estudiante, que no está mal equivocarse, que es a partir de los errores que se puede encender la creatividad y buscar otras alternativas posibles para solucionar los problemas.

Al respecto, el MEN (2006), más que definir el concepto de problema, resalta la importancia de esta actividad como eje organizador del currículo de la matemática y como oportunidad para abordar las situaciones problema que proporciona el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido. “Estos problemas pueden surgir del mundo cotidiano cercano o lejano, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad” p (51).

Por otro lado, Santos Trigo (1994) citado por García La Rosa, (2011); aunque plantea una definición sencilla de problema; pues la considera “como una tarea o situación a resolver”, argumenta que se caracteriza por tener los siguientes componentes.

- a) La existencia de un interés. Es decir, una persona o un grupo de individuos quieren o necesitan encontrar una solución.
- b) La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la situación.
- c) La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, numérico, geométrico). También el problema puede tener más de una solución.
- d) La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones pendientes a resolver esa situación. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

Ya refiriéndose a componentes específicos (Mayer, 2014), destaca cuatro elementos estructurales: 1) las metas, 2) los datos, 3) las restricciones y 4) los métodos. El autor se refiere a las metas como esos resultados que se desean alcanzar, a las restricciones como los obstáculos que se interponen en el camino para alcanzar la solución y a las operaciones, como aquellos procesos lógicos que se deben ejecutar para solucionar el problema.

De cualquier forma, Pólya (1995:49) plantea un procedimiento heurístico para resolverlos, teniendo en cuenta la experiencia, es decir, la indagación de diversos métodos o estrategias para resolverlos, puede incluir actividades como mirar a otros como lo hacen, dibujar un esquema del problema, probar examinar un ejemplo concreto o intentar abordar primero un problema más general.

### **5.6 Contextualización de problemas**

Blanco (2010) los denomina *problemas sobre situaciones reales*, es decir, “que plantean actividades lo más cercanas posible a situaciones reales que requieren el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos”. Pero, el autor además, plantea un método para resolverlos, que consiste en desarrollar tres fases: “creación de un modelo matemático de la situación, aplicación de técnicas matemáticas a este modelo y la traducción a la situación real para analizar su validez”; en otras palabras, consiste en representar la situación real, aplicar estrategias para la solución del problema y comprobar sí se obtuvo el resultado correcto, al traducirlo a la situación real.

Bishop (2010:77), al respecto, resalta el hecho que la matemática surge a partir de las prácticas sociales y la solución a las necesidades específicas del hombre, critica ampliamente la educación matemática descontextualizada, pues para él, este tipo de educación produce un aprendizaje impersonal, en el cual el estudiante no se esfuerza por obtener significados personales,

desestimulando el aprendizaje de los estudiantes, y por tanto, parte del fracaso en la matemática escolar. De igual forma, el autor concibe la educación matemática, como un proceso social, es decir que la enseñanza de la matemática debe ser contextualizada.

Para Bishop (2010:78), “el aprendizaje impersonal de las matemáticas ignora totalmente estas conexiones y significados personales y en consecuencia, despersonaliza el proceso de aprendizaje”. La tarea del docente es entonces, relacionar los contextos y vivencias de los estudiantes con los temas vistos en clase, desde una práctica de resolución de problemas; de esta manera los estudiantes no sólo desarrollarán aprendizajes significativos; sino que tendrán la oportunidad de expresar sus sentimientos, intuiciones, significados e interpretaciones personales. “Sin duda el aprendizaje impersonal es en esencia negativo”. p. (27). De igual forma, el MEN (2014) afirma

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problema procedentes de la vida diaria, de la matemática y de las otras ciencias en el contexto es la alternativa más propicia para poner en práctica el conocimiento activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas (p. 24).

Estos conceptos, permiten reflexionar sobre la importancia de hacer del contexto de los estudiantes y sus vivencias, el libro de estudio para la clase, pues la educación debe ser de la vida y para la vida; por eso Bishop (2010), al respecto añade:

Lo que de verdad necesita un enseñante no es un texto, sino actividades y recursos que contribuyan al desarrollo de los alumnos. Lo que de verdad necesita el alumno no es un texto, sino un entorno de aprendizaje apasionante, cálido, comprensivo e intelectualmente estimulante. p (29).

Por otra parte, hay que tener presente que la palabra contexto tiene un sentido amplio, uno intermedio y uno inmediato; como lo indican los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, establecidos por el MEN (2014):

Un contexto más amplio, el entorno sociocultural, al ambiente local, regional, nacional e internacional. Un contexto intermedio, cercano a la institución escolar, en donde se viven distintas situaciones y se estudian distintas áreas, y un contexto inmediato de aprendizaje preparado por el docente en el espacio del aula, con la creación de situaciones referidas a las matemáticas, a otras áreas, a la vida escolar y al mismo entorno sociocultural, etc., o a situaciones hipotéticas y aun fantásticas, a partir de las cuales los alumnos puedan pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento en forma significativa y comprensiva.

Desde esta definición, el Ministerio de Educación Nacional (2006), hace énfasis en la importancia de “diseñar situaciones matemáticas que posibiliten a los estudiantes tomar decisiones; exponer sus opiniones y ser receptivos a las de los demás; generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos” que partan desde el contexto inmediato hasta el contexto más amplio.

Cómo se observa, uno de los propósitos de plantear problemas contextualizados, es que el estudiante sea quien descubra por sí mismo, a través de su imaginación, de su creatividad y de sus decisiones, las soluciones posibles a un problema; que no siempre deben implicar la aplicación de una fórmula, la obtención de una cantidad; sino que también lo pueden llevar al análisis, la reflexión o la crítica.

### **5.7 Estrategias de resolución de problemas**

Al hacer revisión teórica sobre el tema, se encuentran los aportes de Barroso (2012), quien destaca a matemáticos como Dunlapy McKnight (1980), Schoenfeld (1985), Glass y Holyak (1986), Guzmán (1944) y Pólya (1989), ilustrando en una tabla los procesos planteados por cada uno de los autores, para resolver una situación matemática. Al analizar sus propuestas, se observa una estrecha relación entre sus teorías; a pesar de las diferencias terminológicas y la complejidad del análisis que presentan algunos autores. De igual forma, también se nota que algunos matemáticos consideran el proceso de resolución de problemas como algo lineal, donde los pasos

se deben aplicar uno tras otro; mientras que la propuesta de Pólya (1989) demuestra que varios procesos del análisis de un problema, pueden desarrollarse de forma simultánea e interactuar entre ellos para mejorar la comprensión de la situación y así solucionar el problema

A continuación se ilustra la comparación de modelos de resolución de problemas que plantea Barroso (2012).

**Tabla 1. Algunos modelos de resolución de problemas matemáticos**

Autores	1ª fase	2ª fase	3ª fase	4ª fase
Polya (1945)	Comprensión del problema <ul style="list-style-type: none"> <li>• Percepción de símbolos escritos</li> <li>• Decodificación de símbolos escritos</li> <li>• Formulación del significado general de las oraciones</li> </ul>	Planificación <ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinación de lo que hay que buscar</li> <li>• Examen de los datos relevantes</li> <li>• Análisis de las relaciones entre los datos</li> </ul>	Ejecución del plan <ul style="list-style-type: none"> <li>• Formulación de los datos mediante la notación matemática</li> <li>• Ejecución de los cálculos matemáticos</li> </ul>	Supervisión <ul style="list-style-type: none"> <li>• Verificación de las respuestas</li> </ul>
	Dunlap y McKnight (1980)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Traducción del mensaje general en un mensaje matemático</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elección de las operaciones matemáticas</li> <li>• Estimación de las respuestas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Decodificación de los resultados para que tengan sentido técnico</li> <li>• Formulación de los resultados técnicos como respuestas a la cuestiones iniciales</li> </ul>

<b>Gagné (1983)</b>	Traducción verbal de las situaciones descritas al lenguaje matemático		Fase central de cálculo	Validación de la solución
	- Lectura del problema	- Hipótesis	- Cálculo	- Verificación
<b>Montague (1988)</b>	- Paráfrasis	- Estimación		
<b>Schoenfeld (1979)</b>	- Visualización			
	- Enunciado del problema	- Diseño	- Implementación	- Verificación
<b>Uprichard, Phillips &amp; Soriano (1984)</b>	- Análisis	- Estimación	- Cálculo	- Verificación
	- Representación	- Traducción	- Monitorización	- Verificación
<b>Mayer (1991)</b>	- Traducción	- Planificación		
	- Integración		- Ejecución	
<b>Garofalo y Lester (1985)</b>	- Orientación	- Organización	- Ejecución	- Verificación

Fuente: Barroso (2012).

Estos procesos, sin duda han enriquecido las estrategias heurísticas para el desarrollo de la competencia matemática en la resolución de problemas. Bransford y Stein (2010); con su modelo ideal por ejemplo, siguen el modelo de Pólya, pero el primer paso lo subdividen en la identificación y definición, por una parte, y en la representación del problema por otra. De acuerdo con esto, además de buscar mejorar las habilidades personales en la resolución de problemas, lo aplican a diferentes situaciones en las que es preciso resolver problemas relacionados con la memoria, la comprensión y el aprendizaje, la crítica de razonamientos, la creatividad y la comunicación.

Teniendo en cuenta lo anterior, esta investigación se identifica con las ideas del matemático Pólya (1989), no sólo porque se interpretan de forma sencilla; sino porque el autor, además, da importancia a las actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas.

Para Pólya (1989;102), el principal fin es el de ayudar a que el alumno adquiriera mayor experiencia en la tarea de resolución de problemas, por lo que sugiere que el profesor asuma un rol de guía, que permita que el alumno tome gran parte de la responsabilidad que le corresponde en la aplicación de cuatro pasos fundamentales, que se ampliarán más adelante y que de una u otra forma se resuelven a partir de un ejercicio de preguntas, que pueden ser formuladas por el docente o por el mismo estudiante y que le ayudarán a alcanzar sus objetivos. Al docente, también le facilitará orientar su proceso de enseñanza – aprendizaje; a través de una metodología basada en la indagación. A continuación se describe cada una de las estrategias del matemático Pólya, para resolver problemas matemáticos.

**Modelo de Pólya.** Su propuesta pedagógica para resolver problemas matemáticos, consta de cuatro partes: comprender el problema, proyectar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Cada una de estas fases contiene unas preguntas de análisis de la situación que debe hacerse el estudiante para descubrir la solución del problema. Parafraseando a May Cen (2015), se describen y analizan de la siguiente forma:

**1. Comprender el problema.** Mediante preguntas como: “¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál y cómo es la condición?” (p. 19) el estudiante debe contextualizar el problema. Se puede afirmar que esta es una etapa complicada, porque muchas veces los estudiantes determinan los datos del problema que se ven a simple vista; pero cuando el problema trae datos ocultos que sólo se pueden inferir con un buen ejercicio de comprensión lectora, a los estudiantes les cuesta entender el problema. De igual forma, sin haber identificado bien los datos o la incógnita, se ha notado que los estudiantes se lanzan a desarrollar procedimientos para solucionar el problema, que solo los desgastan y confunden, hasta que ya no quieren saber más de la situación. Por estas razones, de acuerdo con Pólya (1989), es importante que en este paso, el estudiante se haga cada una de estas preguntas para comprender mejor el problema: ¿Entiendo lo

que dice?, ¿Puedo replantear el problema en mis propias palabras? ¿Distingo cuáles son los datos?, ¿Sé a qué quiero llegar?, ¿Hay suficiente información?, ¿Hay información extraña? y ¿Es este problema similar a otro que haya resuelto antes?. Teniendo claros cada uno de estos interrogantes, es posible que el estudiante contextualice el problema.

**2. Concebir un plan.** Según a May Cen (2015), en esta fase, “Pólya sugiere encontrar algún problema similar al que se confronta”, recordar problemas ya resueltos, el entorno en el que se mueve el problema y la propia forma de ser del solucionador, llevará al estudiante a la elección de un plan. Pero para encontrar ese plan o estrategia para solucionar el problema, Pólya (1989) en su libro como solucionar problemas, también sugiere estos ejercicios: ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema similar más simple, hacer una figura, hacer un diagrama, usar razonamiento directo, indirecto, usar propiedades de los números, trabajar hacia atrás, usar casos, resolver una ecuación, buscar una fórmula, usar un modelo, usar análisis dimensional, identificar submetas, usar coordenadas o usar simetría en el caso de problemas relacionados con el pensamiento métrico espacial.

**3. Ejecución del plan.** Luego de que se tiene claro el plan y las estrategias, este debe ejecutarse y observar los resultados. Sin embargo, es preciso que se dé un tiempo razonable para resolver el problema, no es hacer por hacer, sí no se vislumbra la solución del problema con una estrategia, será necesario aplicar otra, volver a revisar los datos, la incógnita. No hay que tener miedo de volver a empezar.

**4. Mirar hacia atrás.** Según May Cen (2015), “es en esta etapa en donde la resolución de un problema da pie a un gran descubrimiento”, en palabras de Pólya (1989) es preguntarse: “(...) ¿Es la solución correcta?, ¿Habría una solución más sencilla?, ¿Puede emplear este resultado o el método en otro problema? (...)” (p. 19). Al revisar estos cuestionamientos se puede relacionar el problema con otras situaciones y lugares en los que han surgido ese tipo de dificultades. Y por

supuesto, al resolver más problemas de ese tipo, mayor práctica se tendrá y mejor preparado se estará para resolver nuevos problemas. Pólya (1989) resume su teoría en la siguiente frase:

La solución de problemas es una escuela de la voluntad. Resolviendo problemas que parecen difíciles, el alumno aprende a perseverar pese a los fracasos, a apreciar el menor de los progresos, a lograr la idea esencial, a hacer un llamado a toda su fuerza de concentración. Si el alumno no encuentra en la escuela la oportunidad de familiarizarse con las diversas emociones que ofrece el esfuerzo con vista a la solución, su educación matemática ha fallado en su objeto más esencial (p. 81).

De acuerdo con lo anterior, Pólya hace ver su método para resolver problemas matemáticos, como un verdadero proceso de invención, inducción, experimentación, que usa el pensamiento de manera instintiva hasta llegar a la construcción de soluciones de un problema. Y más allá de lograr resolver un problema, propicia que el estudiante adquiera consciencia, asuma actitudes de perseverancia, creatividad, optimismo y sea competente. ¿Pero qué quiere decir competente?

### **5.8 Competencias matemáticas**

De acuerdo con la UNESCO (1999), citada por Argudín, (2005); define el término de competencia como el conjunto de “comportamientos socio-afectivos, y habilidades cognoscitivas, psicológicas sensoriales y motoras que permiten llevar a cabo adecuadamente un desempeño, una función, una actividad, o una tarea” (p.12).

Ahora bien, el Ministerio de Educación a través del Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación (Sinec), ha expandido el uso generalizado del concepto de competencia a todos los ámbitos de la educación, con las pruebas de Estado “Icfes”, Saber y Ecaes; y ha establecido el desarrollo de competencias matemáticas como el eje transversal en los estándares básicos de calidad; abarcando mucho más que el “saber hacer en contexto” (MEN, 2006).

De este modo se define la competencia matemática como el “conjunto de conocimientos, habilidades, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras

apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” ( MEN, 2006, p.49).

De acuerdo con lo anterior, las competencias matemáticas se desarrollan en la medida en que la escuela y la vida misma presentan a los estudiantes situaciones problema, para que estos, bajo la orientación del docente, pongan en juego sus habilidades cognitivas, su intuición y hasta su sentido común para solucionarlas, avanzando en niveles de competencia cada vez más complejos. Pero, ¿qué habilidades específicas deben desarrollarse en esta competencia?

### **5.9 Pensamiento matemático**

Los aspectos referidos antes en cuanto a estudiantes competentes matemáticamente, implican que la escuela y el contexto familiar promuevan espacios y actividades que busquen alcanzar un alto nivel en el desarrollo de los siguientes pensamientos:

**Pensamiento numérico y los sistemas numéricos;** se adquieren gradualmente y exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías de los números, en diversos contextos.

**Pensamiento espacial y los sistemas geométricos.** El pensamiento espacial opera mentalmente sobre modelos internos del espacio en interacción con los movimientos corporales y los desplazamientos de los objetos y con los distintos registros de representación y sus sistemas notacionales o simbólicos. (MEN, 1998; 60). En los Lineamientos Curriculares establecidos por el MEN (1998) se especifican conceptos y procedimientos relacionados con este tipo de pensamiento, como: la construcción de los conceptos de cada magnitud, la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes... (p.61)

**Pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas.** Según el MEN, (2006), “implica la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su

medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” p (63). Los conceptos que se deben tener claros son: magnitudes, conservación de magnitudes, estimación, patrones, instrumentos y procesos de medición, asignación numérica, trasfondo social de la medición.

**El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.** Está relacionado con “la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos”. Uno de los propósitos de cultivar este pensamiento desde la Primaria, es precisamente que los estudiantes aprendan a identificar cambios y reaccionar ante ellos, a ser más racionales, analíticos, a proponer hipótesis, a formular argumentos y desarrollen poco a poco, su sentido común.

Para el presente estudio, es importante abordar todos los tipos de pensamiento, porque los problemas matemáticos pueden abarcar situaciones combinadas, que implican más de un razonamiento. Por tanto, es importante que los estudiantes estén preparados para diferenciarlas y para planear las estrategias adecuadas que les permitan obtener una solución.

### **5.10 Función lineal**

La construcción conceptual sobre la función lineal se basa, de acuerdo con autores como Planchart, (2015), que en sus investigaciones han mostrado que a los estudiantes las representaciones semióticas del concepto matemático de función lineal se les han presentado de forma desordenada generando problemas de comprensión de dicho concepto; razón por la que el estudiante ve diferentes objetos matemáticos donde solo hay uno; es decir en este caso se evidencia la unicidad conceptual que se puede abordar cuando una misma representación puede ser tabular, algebraica, gráfica o tecnológica. En este sentido importante recordar que autores

como Vásquez, (2014) han generado aportes didácticos para abordar el concepto de función, desde teorías que buscan señalar la relación parte todo, argumentando que la función es mucho más que cualquiera de sus representaciones, la función es todo al mismo tiempo: lo algebraico, lo gráfico, lo verbal, lo icónico, etc.

Como el concepto de la función lineal ha sido uno de los más trabajados en matemáticas y es empleado en todas las ramas de la ciencia, en esta investigación se tendrán en cuenta los planteamientos de Vergnaud (1982), tomado por Godino (2003) en la modelización de la función lineal, de esta manera la estructura conceptual estará dada por el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica todas las operaciones posibles; adiciones, sustracciones, multiplicaciones, etc. Además del conjunto de elementos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas. Esta descripción de estructura conceptual se le atribuye una naturaleza de tipo epistémica. Los conceptos y teoremas que intervienen aquí se califican de “matemáticos”.

En cuanto a los conceptos, se tomarán todos aquellos que pueden ser representados y cuya noción de concepto Vergnaud, (1982), tomado por Godino (2003), representa un concepto matemático que se interpreta en términos semánticos. Este autor define las características de un concepto como una tripleta (S, I, Z) en la cual cada símbolo representa un aspecto a saber:

S: Conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto.

I: Conjunto de invariantes que constituyen el concepto.

Z: Conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.

Dentro de los conceptos a relacionar se encuentran todos los elementos existentes y definidos desde las diferentes formas de presentación, entre ellas; ecuación canónica de la línea recta  $(y - y_1) = m(x - x_1)$ , desde la forma punto pendiente  $y = mx + b$  y desde la forma general de la ecuación  $ax + by + c = 0$ .

La siguiente figura, muestra la estructura matemática de la función lineal.

Tomando como referente los modelos y representaciones en las matemáticas realistas desarrolladas por Bressan (2011), se realiza el mapa de la estructura matemática de la función lineal, en el que se plantea la función lineal y sus representaciones como categorías internas, que son las mentales y categorías externas u observables que se manifiestan mediante cuatro formas a saber:

Enunciados verbales que pueden ser orales o escritos.

Tabulación en la que se identifican las variables independiente y dependiente, representadas en los ejes horizontales, para la variable independiente y vertical para la dependiente.

Organizaciones gráficas o pictóricas de las que se obtiene una línea recta, que puede ser creciente cuando la pendiente es positiva, decreciente cuando la pendiente es negativa, horizontal cuando la pendiente es igual a cero y vertical cuando la pendiente no está definida.

Organizaciones simbólicas, cuando encontramos la ecuación de la función lineal en sus tres formas, ya expresadas en el párrafo anterior, diferenciado en cada una de ellas los elementos característicos como: punto por donde pasa la recta, la pendiente de la recta y el punto de corte de la recta con el eje de las ordenadas.

Según lo expuesto por Planchart (2015) las funciones comúnmente están representadas de cuatro formas:

1. Verbalmente por una oración que describe a la variable de entrada, relacionada a la variable de salida.
2. Numéricamente por una tabla o lista de pares ordenados que hace corresponder un valor de entrada con un valor de salida.

3. Gráficamente por puntos sobre una gráfica en un plano en el que los valores de entrada son representados en el eje horizontal y los valores de salida en el eje vertical.
4. Algebraicamente por una ecuación de dos variables.

En cuanto al primer numeral la oración o párrafo, es aquella parte gramatical que contiene los datos relevantes e incógnita de una situación problema que se pretende resolver por medio de procesos aritméticos y/o geométricos.

La tabulación es el proceso que consiste en representar por medio de una tabla de datos o pares ordenados las variables independiente y dependiente de una función lineal, esta se puede crear a partir de la ecuación de la función al asignar valores arbitrarios a la variable independiente y obtener por medio de procesos algebraicos el valor de variable dependiente. También se puede obtener la tabla observando la correspondencia entre las parejas ordenadas de una gráfica de la función.

La gráfica da la representación cartesiana de una función al poder ubicar en el plano parejas ordenadas  $(x,y)$  donde  $x$  se ubica en el eje horizontal y nos representa los valores de la variable independiente, mientras que  $y$  se ubica en el eje vertical representando los valores de la variable dependiente. Por lo general en los cursos de educación básica y media se llega a esta representación a través de una tabulación, aunque también se puede partir de la gráfica y desde allí ir a otros tipos de representación.

Está quizás es la representación de la función que más reconocen los estudiantes, pues consiste en una igualdad matemática con dos variables expresada por medio de operaciones matemáticas con sus respectivas jerarquías. De esta por lo general se parte para realizar representaciones numéricas (tabulación) y llegar a representaciones gráficas. Aunque el ideal es que también se pueda realizar el proceso inverso es decir partir de la gráfica y llegar a construir una tabla de datos y deducir la ecuación de la función.

En síntesis lo que se pretende es que el alumno interiorice el concepto de función y pueda moverse por cada una de sus diferentes representaciones externas para que así pueda llegar a construir sus propias representaciones internas que se adapten a sus estructuras mentales. Para Bressan (2005), dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. Este conocimiento proporciona el dominio formal de cada estructura conceptual. Es decir el estudiante debe tener la capacidad de moverse con habilidad de una representación a otra, por ejemplo poder a partir de la gráfica deducir la ecuación de la función, crear tablas de tabulación o enunciados que se adapten a la misma o partir de la ecuación, realizar tabulaciones y construir gráficas.

También poder tomar un texto y llevarlo al lenguaje matemático (matematizar) y expresarlo por medio de una ecuación que le permita encontrar la solución a la problemática que allí se le plantea.

### **5.11 Geogebra**

Geogebra es una aplicación de software libre con código abierto, ideal para la creación de applet interactivas con los que enseñar determinados conceptos científicos y con los que resolver algunos problemas de la matemática. Las nuevas tecnologías en aula de matemáticas permiten proporcionar imágenes visuales de las ideas y conceptos matemáticos, ayudando a visualizar el problema y a evitar obstáculos algebraicos. El Geogebra es un material didáctico que facilita la visualización de contenidos matemáticos mejorando la comprensión de conceptos y procedimientos. El Geogebra es una herramienta idónea para el desarrollo de la capacidad visual,

pues permite la representación de información abstracta en imágenes visuales de manera rápida y sencilla (Benedicto 2012)

### **5.12 Aplicación del Software Geogebra**

El uso de las TIC en la actualidad es una realidad indiscutible y para el caso la escuela como institución tiene las mayores responsabilidades en su difusión y aprovechamiento, ya que por formación y conocimiento debe buscar todas las posibilidades para fortalecer los mecanismos en los cuales los estudiantes interactúen con ellas y mejoren su aprendizaje, es decir, le corresponde a la escuela hacer uso de este tipo de herramientas no solamente porque generan motivaciones y mejores estímulos para un aprendizaje, o por que contribuyen a incrementar el interés de los temas tratados, sino porque mejoran la calidad de la formación de los estudiantes y coadyuvan a educar frente a un mundo que está inmerso en las TIC, donde las tecnologías como herramienta didáctica brindan una ayuda sin precedente al permitir que el estudiante mejore sus procesos de pensamiento y construya nuevos conocimientos.

En palabras de López (2006), el campo de la investigación didáctica admite, desde hace varias décadas, la necesidad de utilizar y generar programas o software de computadora para todos los aprendizajes en la enseñanza de las ciencias, esto por las innumerables ventajas que traen, desde el sentido pedagógico y didáctico el uso de este tipo de programas poseen características que permite una mejor comprensión del fenómeno, además de proveer gran capacidad de almacenamiento y de acceso a todo tipo de información, lo que hace que los ejercicios de simulación se toen los fenómenos naturales que son difíciles de observar en la realidad pero que desde la utilización del software se pueden representar como modelos de sistemas físicos que se pueden convertir en espacios interactivos donde el estudiante, enriquece su proceso de aprendizaje.

En relación al aprendizaje de la matemática y en palabras de Muñoz (2012), buena parte de los estudiantes no sienten gusto por las matemáticas, en este sentido, las clases se tornan repetitivas, donde el docente explica un ejercicio y luego se diligencian algoritmos que desarrollan operatividad en el estudiante, dejando atrás elementos como el análisis y la comprensión de fenómenos en contexto reales; por ello se hace necesario hacer uso de herramientas como el software Geogebra de manera que se generen ambientes diferenciados en el aula. En palabras de Godino y Batanero (2007), la enseñanza de las matemáticas debe permitir a los estudiantes la capacidad de resolver problemas desde la realización de un trabajo matemático auténtico, que no sólo incluye la solución de problemas, sino la utilización de los conocimientos previos en la solución de los mismos y el uso de herramientas como el software Geogebra.

Esta herramienta permite que el estudiante visualice e interactúe con los conceptos de las matemáticas, de una manera dinámica y reflexiva, permitiendo el desarrollo de habilidades en la interpretación y resolución de problemas, es decir complementa los procesos de aprendizaje al fortalecer procesos de pensamiento que llevan al análisis, la contrastación de resultados y el planteamiento de nuevos procesos.

### **5.13 Ambiente de aprendizaje**

Para el ambiente de aprendizaje se diseñaron actividades que implican la toma de decisiones en distintos ámbitos de concreción hasta culminar en un documento en el que el profesor concreta los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y selección de estrategias metodológicas (Godino, 1994).

Los elementos que se tuvieron en cuenta fueron:

La información disponible sobre los objetivos y contenidos del currículo de primaria y del proyecto de centro correspondiente.

Los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados.

El conjunto organizado de prácticas institucionales, operativas y discursivas, que proporcionan la solución a los tipos de problemas seleccionados (contenidos procedimentales, conceptuales y formas de representación)

Materiales y recursos disponibles para el estudio del tema, incluyendo los libros de texto y experiencias didácticas descritas en las publicaciones accesibles.

El conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado

Los criterios metodológicos y de evaluación incluidos en las orientaciones curriculares, así como las recomendaciones aportadas por la investigación didáctica descritas en publicaciones accesibles

#### **5.14 Secuencia didáctica**

La secuencia didáctica se refiere a un ámbito de enseñanza, comprende actividades sucesivas para enseñar un contenido educativo. Se caracteriza por una continuidad de actividades interrelacionadas y estructuradas progresivamente de tal manera que las actividades se complementan y amplían progresivamente. Se va de lo más simple a lo más complejo partiendo de la experiencia personal hacia la conceptualización. Se incluyen actividades de reflexión conceptual y se plantea la solución de problemas a partir del contexto de los estudiantes (Del Carmen, 2016).

## **6. Metodología**

A continuación se encuentra el enfoque investigativo abordado, el alcance, tipo de estudio, fases de la investigación, población, categorías, instrumentos de recolección de información y plan de acción.

### **6.1 Enfoque**

De acuerdo con Hernández (2011; pág. 108) el enfoque cualitativo se guía por áreas o temas significativos de la investigación, la investigación cualitativa capta la realidad “a través de los ojos” de la gente que está siendo estudiada, es decir, a partir de la percepción que tiene el sujeto de su propio contexto. (Cerde, 2010; pág. 58).

Con la intención de indagar y transformar las actuales prácticas pedagógicas respecto a la solución de problemas de función lineal, así como la búsqueda de las mejores alternativas de abordaje y solución, esta propuesta opta por el enfoque cualitativo, aplicado a la educación.

Se adoptó este enfoque, por ser flexible y abierto a toda clase de instrumentos y estrategias que promuevan la comprensión, la interpretación y valoración crítica de las concepciones que sustentan las prácticas, su relación e implicaciones con los niños. (Cerde, 2010; pág. 58).

### **6.2 Tipo de Estudio: Investigación acción**

La investigación se realizó a partir de la observación y reflexión de la experiencia de prácticas matemáticas mediante el uso de Geogebra. En el modelo de Investigación Acción se encuentra al

comienzo y al final del ciclo, en la planeación y en el seguimiento de la acción instaurada para transformar la práctica.

De esta manera, el objetivo es mejorar a través de su transformación y que al mismo tiempo que procure comprenderla, también demanda la participación de los sujetos en la mejora de sus propias prácticas, exige una actuación grupal por la que los sujetos implicados colaboran coordinadamente en todas las fases del proceso de investigación, realiza análisis crítico de las situaciones y se configura como una espiral de ciclos de planificación, acción, observación y reflexión; de esta manera se realizó el proceso para el diseño y la implementación de la herramienta didáctica, en el proyecto el proceso de aprendizaje.

El proyecto corresponde a Investigación Acción, la que según Restrepo, (2014; pág. 58) consiste en un proceso de reflexión y transformación continua de la práctica, para hacer de ella una actividad profesional guiada por un saber pedagógico apropiado, la investigación-acción educativa, y más particularmente la investigación-acción pedagógica, se ofrece como escenario y método potenciador.

En la investigación-acción, los relatos del diario de campo sirven de lente interpretativa de la vida en el aula y en la escuela. En esta tarea evaluadora de la práctica, el docente recapacita sobre su satisfacción personal frente al cambio que se ensaya y acerca del comportamiento de los estudiantes ante los nuevos planteamientos didácticos, formativos y otros indicadores subjetivos de efectividad.

**Estrategia.** La estrategia consistió en fortalecer el ambiente de aprendizaje, primero se diseñaron actividades en donde se involucraron el trabajo en grupo, sesiones generales, sesiones de prácticas, elaboración y presentación de informes, organización, investigaciones y preparación

de tareas haciendo uso de Geogebra para la resolución de problemas de funciones lineales teniendo en cuenta el método heurístico de Pólya.

Desde el punto de vista procedimental, luego de aplicar la prueba diagnóstica inicial a los estudiantes se diseñaron y aplicaron actividades y finalmente la prueba de salida de resolución de problemas, se analizaron y compararon los resultados cualitativamente, teniendo en cuenta las categorías.

### 6.3 Técnicas

**Observación:** respecto a esta técnica, DeWalt, Kathleen; DeWalt, Billie R., (2002), señalan que la observación implica un "proceso de aprendizaje a través de la exposición y el involucrarse en el día a día o las actividades de rutina de los participantes en el escenario del investigador" (p.91). Este proceso, se desarrolló de forma natural y espontánea.

**Actividades.** Se diseñaron teniendo en cuenta la pedagogía constructivista y se desarrolló bajo la siguiente estructura: Objetivo, estándar, tema, recursos, duración, metodología y evaluación.

### 6.4 Instrumentos de Recolección de Información

En la siguiente tabla se hace alusión a los instrumentos. Véase anexos 2, 3 y 4

**Tabla 2. Instrumentos**

<b>Instrumento</b>	<b>Actores</b>	<b>Información que se recolectara</b>	<b>Importancia de acuerdo a objetivos</b>	<b>Relación a categorías</b>	<b>Validación</b>
<b>Observación en clase</b>	Docentes, estudiantes e investigador	Planeación y desarrollo de clases	Determinar la metodología usada	Enseñanza Aprendizaje Pensamiento	Diario de campo Registros

<b>Instrumento</b>	<b>Actores</b>	<b>Información que se recolectara</b>	<b>Importancia de acuerdo a objetivos</b>	<b>Relación a categorías</b>	<b>Validación</b>
<b>Encuesta a estudiantes</b>	Investigador estudiantes	Verificar la aplicación de métodos para resolver funciones lineales	Analizar conocimientos y procedimientos llevados a cabo	Enseñanza Aprendizaje Pensamiento	Revisión de preguntas por parte de expertos
<b>Entrevista a docente</b>	Docente Investigador	Estrategias brindadas para resolución de problemas Planeación de clase Rol	Analizar capacitación y preparación y procedimientos	Enseñanza Aprendizaje Pensamiento	Revisión de preguntas por parte de expertos
<b>Prueba de entrada - salida</b>	Investigador estudiantes	Conocimientos y procedimientos	Investigador Estudiantes	Enseñanza Aprendizaje Pensamiento	Validación

## 6.5 Fases de la investigación

**Fase 1. Diagnóstico.** Aplicación de instrumentos: observación, encuesta a estudiantes, entrevista a docente, prueba diagnóstica para evaluar la competencia planteamiento y resolución de problemas de función lineal. Se identificaron las debilidades que presentan los estudiantes respecto a la competencia de resolución de problemas y manejo de la función lineal además del uso de Geogebra.

**Fase 2. Diseño y validación de los instrumentos.**

**Fase 3. Implementación** Diseño y aplicación de actividades teniendo en cuenta el método Pólya para la solución de problemas mediante una secuencia didáctica.

**Fase 4. Evaluación de la propuesta.** Constituye la fase que cierra el ciclo y da paso a la elaboración del informe. Constituye uno de los momentos más importantes del proceso de investigación acción es una tarea que se realiza mientras persiste el estudio. La reflexión permite indagar en el significado de la realidad estudiada y alcanzar cierta abstracción o teorizando sobre

la misma. Es el proceso de extraer el significado de los datos; implica una elaboración conceptual de esa información y un modo de expresarla que hace posible su conversación y comunicación.

## **6.6 Contexto institucional, social y escolar**

La investigación se llevó a cabo en la Institución Educativa Distrital CODEMA, ubicada en la localidad de Kennedy en el barrio Patio Bonito, en la Ciudadela la Primavera, atiende una población estudiantil de los niveles de preescolar, básico primario, básico Secundario y Media Vocacional cercana a los 3.000 estudiantes, en dos jornadas: mañana y tarde. (PEI, 2017)

En la actualidad el colegio da cabida a 2851 estudiantes, distribuidos así, 1448 en la jornada de la mañana y 1403 en la de la tarde. Está organizado por ciclos educativos, no tiene el programa 40X40 pero está trabajando en ello, además está interesado en implementar el grado 12 optativo.

Dentro de los recursos con que cuenta la institución educativa, está el internet con una capacidad de 8 megas, esta red es compartida con otras instituciones educativas. Cuenta además con 9 aulas especializadas, 2 para informática y 2 para ciencias, 1 para cada una de las áreas como: artes, humanidades, sociales, ludoteca y sala de música. La institución también posee 2 tableros inteligentes, 4 televisores, DVD, y un teatro en casa.

El número total de computadores está distribuido así: 35 computadores en cada una de las salas de primaria y secundaria, en el resto del colegio hay 13 correspondientes a las oficinas administrativas.

La biblioteca cuenta con 3600 libros de las editoriales Alfaguara, Magisterio, Taurus la ciencia para todos, Alfa omega, Mcgrawill, Pentrice, Larousse, Limusa, Pearson. Además cuenta con software educativos como: Cabri, Derive, Google, Sketch pero algunos de ellos no son compatibles con los equipos.

Respecto a la conectividad e incorporación de las Tic en determinadas localidades, se afirma que las aulas de sistemas tienen nodos compartidos con varios colegios, que apenas es un comienzo lento hacia una verdadera cobertura. Dentro de las instituciones se encuentra compartida la red por las oficinas, sala de maestros, biblioteca y ludoteca como los principales lugares que disponen del servicio de banda ancha, claro, no de buena calidad.

### 6.7 Población y muestra

La población corresponde a 120 estudiantes de grado noveno Jornada Tarde, del colegio Codema. Localidad de Kennedy. Bogotá. D. C., estudiantes con edades entre los 13 y 15 años de los estratos uno y dos. La muestra corresponde a 40 estudiantes y un docente.

### 6.8 Categorías de Análisis

A continuación, se presentan las categorías iniciales y emergentes para el análisis de la información de acuerdo a la formulación del problema y los objetivos de investigación. Véase Tabla 3.

**Tabla 3. Categorías**

<b>Aspectos a evaluar (categoría de análisis)</b>	<b>Elementos que componen el aspecto Subcategorías</b>	<b>Evidencias de información de los aspectos (indicadores)</b>	<b>Formas y medios de recolección de evidencias. (Instrumentos de recolección de información).</b>
Enseñanza	Prácticas Planeación y ejecución de actividades Desarrollo de actividades	Planeador de clase Procedimientos Modelos de análisis Uso de estructuras lógicas Uso TIC	Observación
Aprendizaje	Aprendizaje receptivo Aprendizaje por descubrimiento	Evaluaciones Test Tareas Registros Pautas de observación	Informes

Pensamiento

Modificación de  
conceptos y  
nocionesEvaluaciones  
Grupos de discusión

Informes

## 6.9 Plan de acción

Se tomó la idea de utilizar el Software Geogebra teniendo en cuenta que en la institución cada estudiante cuenta con un computador disponible como herramienta de trabajo, los estudiantes pueden usar esta herramienta en cualquier sitio debido a que es transportable y de libre acceso, Geogebra es un programa legal. La selección de software libre se decidió en función de la sencillez en su manejo, la disponibilidad para los sistemas operativos Windows y la robustez del programa, etc. Se pueden visitar este sitio para su descarga: Geogebra <http://www.geogebra.org/>.

Se diseñó una secuencia didáctica mediante actividades con una estructura que comprende: objetivos de aprendizaje, habilidad / conocimiento, estándares, flujo de aprendizaje, guía de valoración, introducción y desarrollo. Véase Anexo 5.

Dentro del flujo de aprendizaje se presentan cinco actividades: véase anexo 6 - 7 - 8 -9

Actividad 1. La función lineal, puntos de corte y pendiente

Actividad 2. Geogebra software de apoyo

Actividad 3. Graficación de la función lineal haciendo uso de Geogebra

Actividad 4. Método Pólya para solución de problemas

Actividad 5. Solución de problemas de función lineal

## 7. Resultados

### 7.1 Identificación de dificultades en la resolución de problemas modelada a partir de una función lineal

A continuación se presenta el análisis de las categorías de acuerdo a los instrumentos usados:

#### 7.1.1 Observación directa

**Tabla 4. Diagnóstico observación directa clase**

Categorías	Subcategorías	Observación directa
Enseñanza	Planeación	Los contenidos no se orientan para la vida, los estudiantes deben observar y actuar mediante la experimentación para llegar a reflexionar sobre la realidad
	Desarrollo de las clases	No se hace trabajo en grupos No se hace discusión de las actividades planteadas En pocas ocasiones se les pregunta a los estudiantes su opinión o se hace lluvia de ideas. Los estudiantes siempre buscan la aprobación del docente en las acciones emprendidas. Los estudiantes se muestran apáticos a la metodología usada por el docente
Aprendizaje	Recursos	No se hace uso de las TIC
	Evaluación Anticipación	Los estudiantes no desarrollan actividades complementarias Los estudiantes demuestran poco entusiasmo No hay curiosidad sobre el desarrollo de actividades Los estudiantes no identifican el problema de la situación planteada No se identifica la diferencia entre datos necesarios, superfluos e incompletos No se anticipa estrategias para posibles solución antes de ejecutar No se hacen representaciones mentales No se reflexiona sobre el problema
Pensamiento	Predicción	Dificultad para visualizar conceptos Dificultad al graficar rectas y construir demostraciones gráficas Los estudiantes no discuten sobre posibles soluciones a problemas planteados Los estudiantes no cuentan con un significado claro de la noción de pendiente, ya que ninguno de ellos asocia el signo de la pendiente con la inclinación de la recta, frente a esta condición es complicado que puedan convertir las representaciones graficas en algebraicas o viceversa. Los estudiantes recurren a graficar una a una las parejas registradas en las tablas, y solo a partir de una representación gráfica logran determinar si la relación entre las variables es o no lineal Es muy difícil que los estudiantes puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta para resolver problemas ya que no muestran una articulación espontánea y libre de sus diversas representaciones
	Uso de información no visual	Vacíos conceptuales No se asocia el concepto de función lineal a situaciones de dependencia que dan origen a representaciones
	Desarrollo léxico conceptual y escritural	Los estudiantes no verbalizan de manera adecuada a los resultado o no lo escriban en frases completas

<b>Categorías</b>	<b>Subcategorías</b>	<b>Observación directa</b>
		Falta comprensión del concepto de función lineal y su aplicación No evidencian la comprensión de la noción de incógnita, de pendiente, de variable, de intercepto Dificultades al relacionar la expresión algebraica de una función con la representación gráfica No pueden ubicar los puntos en el plano Dificultades al manejar escalas Se invierte el orden de las componentes Dificultades en la ejecución de cálculos Dificultades procedimentales No se hace uso de pensamiento crítico Dificultad para analizar representaciones graficas No se analizan relaciones entre sí de las funciones lineales

**Tabla 5. Diagnóstico observación directa docente**

<b>Categorías</b>	<b>Subcategorías</b>	<b>Entrevista docente</b>
Enseñanza	Planeación	El docente lleva a cabo la planeación teniendo en cuenta textos de diferentes editoriales, complementando con experiencia y conocimiento. Cada año se hacen ajustes al plan de área buscando que el estudiante aprenda buena parte de los contenidos planteados No se diseñan estrategias de enseñanza aprendizaje haciendo uso de las TIC
	Desarrollo de las clases	El desarrollo de las clases se lleva a cabo de acuerdo a la secuencia temática de los libros o textos guía, aplicando evaluaciones esporádicas y emitiendo juicios generalizados por el rendimiento de los estudiantes de acuerdo al resultado de las misma El desarrollo de la clase los docentes hacen exposiciones orales y hacen uso del tablero para la explicación de los temas, por su parte los estudiantes transcriben la teoría en los cuadernos y en ningún momento se da paso al uso de materiales didácticos para reforzar los conocimientos Los ritmos de aprendizaje los estudiantes son tratados por igual y no se le da mayor atención a estudiantes con diferentes ritmos de aprendizaje para reforzar temas que pueden ser confusos. No se aplican estrategias como el desarrollo del pensamiento en los estudiantes Los docentes no promueven el pensamiento, habilidades y valores de los estudiantes para que ellos organicen y compartan ideas y les permita pasar de lo abstracto a lo particular. Es necesario hacer que los estudiantes desarrollen su pensamiento y que lo hagan visible a fin de conocer lo que piensan. Se deja de lado el aprovechamiento del entorno en el que se está, motivo por el cual los estudiantes no indagan, no interpretan y no argumentan solo se limitan a seguir el texto guía y a lo que les dice el docente No se identifican fortalezas ni debilidades de procesos
	Recursos	No se identifican recursos didácticos de acuerdo a las necesidades. No se reflexiona sobre la implementación de estrategias ni recursos didácticos No hay capacitaciones a los docentes sobre TIC
	Evaluación	No se identifican necesidades de evaluación de aprendizajes en coherencia con el currículo y situaciones educativas. Al momento de diseñar y ejecutar estrategias de enseñanza sobre el tema, el docente acude a un lenguaje formal, dominado por gran rigidez y sí un estudiante

<b>Categorías</b>	<b>Subcategorías</b>	<b>Entrevista docente</b>
		no comprende el significado de todas las palabras empleadas en el enunciado del problema matemático, posiblemente tampoco entenderá qué es lo que debe hacer. También, se plantean situaciones ajenas a los estudiantes, sin tener en cuenta sus conocimientos previos y los métodos de enseñanza para analizar y resolver los problemas. Se parte de una clase magistral inductiva que difícilmente adopta métodos activos, que favorezca la interdisciplinariedad.

### **7.1.2 Encuesta estudiantes**

Se aplicó la encuesta a estudiantes que giro en torno de las falencias de comprensión de problemas de funciones, a continuación se presentan las respuestas.

#### **1. ¿Cuándo usted resuelve problemas de funciones lineales presenta dificultad de comprensión y dominio?**

a. Siempre \_\_\_\_      b. A veces \_\_\_\_      c. Nunca \_\_\_\_

De los 40 estudiantes responden siempre 12 lo que corresponde al 60%, A veces 25% y nunca 3 estudiantes que corresponde a 15%.

Se observa que la mayoría de estudiantes afirman que presentan dificultades al resolver problemas de funciones lineales. Es de anotar que de acuerdo con Pólya (1965), el docente en su rol de mediador de conocimientos debe ayudar a sus estudiantes lo que requiere práctica, dedicación y buenos principios. Esta ayuda que el docente puede brindar debe estar libre de imposición. De esta manera el estudiante puede percibir realmente la ayuda del docente

#### **2. ¿Cuándo considera usted que el planteamiento de un problema de funciones lineales es adecuado?**

a. Cuando se tiene todos los datos del problema

- b. Cuando se tiene claridad en el planeamiento del problema
- c. Cuando se facilita la identificación de la incógnita y los datos para encontrarla

El 50% de los estudiantes considera que el planteamiento de un problema de función lineal es adecuado cuando se tienen todos los datos del problema, el 25% dicen que cuando se tiene claridad en el planteamiento y otro 25% que cuando se facilita la identificación de la incógnita.

Es de anotar que los estudiantes aún no identifican la importancia de elementos tan importantes como la incógnita, los datos y la condición, la cual significa la relación entre los datos e incógnita necesarios para la solución de problemas.

### **3. ¿Qué pasos ejecuta usted cuando resuelve un problema de funciones lineales?**

- a. Leer detenidamente el problema, analizarlo y resolver hallando el valor desconocido
- b. Identificar los datos y la incógnita, aplicar formulas despejes y transformaciones
- c. Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y mirar hacia atrás

El 60% que corresponde a 12 estudiantes dicen que los pasos para resolver un problema más usado son los que corresponden al ítem a. Leer detenidamente el problema, analizarlo y resolver hallando el valor desconocido; el 20% dicen que b. Identificar los datos y la incógnita, aplicar formulas despejes y transformaciones y 20% dicen que Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y mirar hacia atrás.

De acuerdo con Pólya (1965), en su método para resolver problemas matemáticos los fundamento en las siguientes fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y mirar hacia atrás

**4. ¿Con qué frecuencia la docente de matemática usa la resolución de problemas durante el desarrollo del contenido de funciones lineales?**

- a. Siempre \_\_\_\_    b. A veces \_\_\_\_    c. Nunca \_\_\_\_

El 60% de los estudiantes dice que a veces y el 25% dicen que siempre y el 15% responden que nunca. Es de anotar que un aporte a la estrategias más adecuada para la enseñanza de la matemática hoy en día la constituye la resolución de problemas y plantean que dicha estrategia implica un proceso en el cual el aprendiz puede armonizar los conocimientos, reglas, técnicas ya adquiridos previamente, a partir de lo cual suministre una solución a una situación problema; por lo tanto, es necesario que el docente use la resolución de problemas de manera constante en su práctica pedagógica.

**5. ¿Con qué frecuencia la docente de matemáticas promueve la construcción de un plan que le ayude a la resolución de problemas de funciones lineales?**

- a. Siempre \_\_\_\_    b. A veces \_\_\_\_    c. Nunca \_\_\_\_

El 60% de los estudiantes dice que a veces y el 25% dicen que siempre y el 15% responden que nunca. Es de anotar que de acuerdo con Pólya (1965) plantea en la segunda fase de su método para resolver problemas, la concepción de un plan, la cual consiste en la necesidad de determinar la relación entre los datos y la incógnita, indica que de no encontrarse o establecerse una relación inmediata, se pueden considerar problemas relacionados y además preguntas sobre el empleo de todos los datos, con el fin de no olvidar el problema original. Por lo tanto es necesario que los docentes promuevan la construcción de un plan para resolver problemas

### 7.1.3 Entrevista docente

Se aplicó la entrevista al docente que giro en torno a la definición de problema matemático, a continuación se presentan las respuestas.

#### 1. ¿Qué es para usted un problema matemático?

- a. La búsqueda de un dato desconocido
- b. Una situación que requiere una solución
- c. La aplicación de operaciones matemáticas
- d. Una ecuación donde no se conoce un valor

El docente responde que un problema matemático es una situación que requiere una solución.

Es de anotar que un problema es toda situación con una meta a lograr que exija al sujeto la ejecución de una serie de acciones u operaciones para lograr su solución. Así mismo Pólya (1965), afirma que la solución de un problema planteado se logra fundamentalmente relacionando la incógnita con los datos y que no deben perder de vista en ningún momento dichos elementos.

#### 2. ¿Qué elementos encuentra usted en un problema matemático?

- a. Datos, despejes, transformaciones
- b. Datos y una incógnita para encontrar
- c. Signos matemáticos y fórmulas
- d. Una serie de ejercicios

El docente afirma que los elementos que se encuentran en un problema matemático son los datos y la incógnita a encontrar, Pólya (1965), expresa que el planteamiento de un problema es

adecuado cuando están presentes sus elementos principales, donde estos elementos son la incógnita, los datos y la condición, la cual significa la relación entre los datos e incógnita.

**3. ¿Cuándo considera usted que el planteamiento de un problema de funciones lineales es adecuado?**

- a. Cuando se tiene todos los datos del problema
- b. Cuando se tiene claridad en el planeamiento del problema
- c. Cuando se facilita la identificación de la incógnita y los datos para encontrarla

El docente responde que cuando se tienen todos los datos del problema lo que está acorde con el pensamiento de Pólya (1965), quien expresa que el planteamiento de un problema es adecuado cuando están presentes sus elementos principales como son la incógnita, los datos y la condición, la cual significa la relación entre los datos e incógnita.

**4. ¿Qué pasos ejecuta usted cuando resuelve un problema de funciones lineales?**

- a. Leer detenidamente el problema, analizarlo y resolver hallando el valor desconocido
- b. Identificar los datos y la incógnita, aplicar formulas despejes y transformaciones
- c. Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y mirar hacia atrás

El docente responde que Leer detenidamente el problema, analizarlo y resolver hallando el valor desconocido lo que no está de acuerdo con Polya (1965), ya que en su método para resolver problemas matemáticos los fundamento en las siguientes fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y mirar hacia atrás

**5. ¿Con qué frecuencia usa la resolución de problemas durante el desarrollo del contenido de funciones lineales?**

- a. Siempre \_\_\_\_
- b. A veces \_\_\_\_
- c. Nunca \_\_\_\_

El docente responde que A veces ya que por tiempo es complicado cumplir con el programa académico tan extenso.

**6. ¿Con qué frecuencia usted promueve la construcción de un plan que le ayude a los estudiantes en la resolución de problemas de funciones lineales?**

a. Siempre \_\_\_\_                      b. A veces \_\_\_\_                      c. Nunca \_\_\_\_

El docente responde que A veces ya que el grupo de estudiantes es grande y no prestan atención.

**7. ¿Con qué frecuencia usted comprueba los pasos que aplican los estudiantes en la resolución de problemas de funciones lineales y cuadráticas?**

a. Siempre \_\_\_\_                      b. A veces \_\_\_\_                      c. Nunca \_\_\_\_

El docente responde que A veces ya que el grupo de estudiantes es grande y es complicado hacer seguimiento a los procesos de resolución que usan los estudiantes.

**8. ¿Cuándo aplica usted la resolución de problemas de funciones lineales evidencia dificultad de comprensión y dominio en los estudiantes?**

a. Siempre \_\_\_\_                      b. A veces \_\_\_\_                      c. Nunca \_\_\_\_

El docente responde que siempre.

### 7.1.4 Diagnóstico prueba de entrada

**Tabla 6. Diagnóstico prueba de entrada**

<b>Categorías</b>	<b>Subcategorías</b>	<b>Prueba de entrada estudiantes</b>
Enseñanza	Desarrollo de las evaluaciones	Los estudiantes presentan dificultad para utilizar el razonamiento adecuado ya que no se pueden comunicar o no pueden explicar lo que descubren en los problemas planteados. No se lleva un seguimiento adecuado de los argumentos o conjeturas. No entienden lo que plantea la situación problemática No explican con orden ni método la situación planteada No están convencidos de lo planteado
	Evaluación	Los estudiantes memorizar a la hora de preparar evaluaciones Los estudiantes muestran dificultad para contextualizar los conocimientos académicos en acciones prácticas.
Aprendizaje	Anticipación	No se transfieren sus conocimientos prácticos o experiencias respecto a la intuición sobre temas como inclinación de una rampa a conocimientos teóricos No se incorporan otras partes de su saber: pendientes como una razón
	Predicción	No se tiene una actitud de búsqueda de soluciones
	Uso de información no visual	Los estudiantes no relacionan los problemas matemáticos con su entorno inmediato
	Resultado de evaluaciones	No identifican variable dependiente – independiente No despejan variables No sustituye valores numéricos en ecuaciones lineales <b>Se dificulta:</b> Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos Hallar la ecuación de una recta dadas condiciones específicas Identificar los parámetros de una función lineal, afin, Establecer relaciones de adición, multiplicación entre variables. Establecer relaciones de estructura semántica de comparación, igualdad, combinación. Verificar si la solución encontrada satisface la ecuación lineal. <b>Graficación se dificulta:</b> Establecer relaciones de estructura semántica de comparación, igualdad, combinación Codificar las variables de una ecuación lineal. Se dificulta: Representar rectas en el plano a partir de dos o más puntos dados. Identificar coordenadas de puntos pertenecientes a una recta Determinar la ecuación de la recta dadas condiciones gráficas Representa gráficamente, ecuaciones lineales a partir de la pendiente y un punto, ecuaciones afines a partir de la pendiente y un punto, a partir de parámetros identificados en la ecuación.
Pensamiento	Formulación de enunciados lógicos	dificultades en relación a la comprensión del concepto de función lineal y su aplicación

En cuanto al proceso de resolución de problemas se observó que los estudiantes presentan problemas en cuanto a la comprensión del problema, no se lleva a cabo la planificación de la solución de problemas, los estudiantes no intentan resolver los ejercicios, o lo hacen de manera parcial. En cuanto a la obtención de soluciones se presentan respuestas erróneas, errores de escritura y calculo debido a que no se maneja un proceso para la resolución de problemas. Hay inconvenientes con los conocimientos previos y al momento de graficar para algunos estudiantes el realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico presenta mucha dificultad, se pone en duda como se representa una función, presentan dificultades en la notación de las funciones, se les dificulta reconocer en la gráfica un comportamiento global, donde intervienen dos magnitudes que varían conjuntamente.

Se propuso a los estudiantes comunicar por escrito lo esencial del proceso de resolución de los problemas propuestos escribiendo el proceso que siguió para resolver el problema, de esta manera el docente reconoció con las propias palabras de los estudiantes los procesos mentales y procedimientos que utilizaron para llegar a la solución, y al mismo tiempo valorar las propias estrategias de los estudiantes y ayudar a quienes tienen mayores dificultades.

### 7.1.5 Triangulación

**Tabla 7. Triangulación de la información de acuerdo a las categorías de análisis**

<b>Categoría de análisis</b>	<b>de</b>	<b>Estudiantes</b>	<b>Docentes</b>
Enseñanza		Los estudiantes no cuentan con autonomía en el desarrollo de las clases, no participan, dependen de las opiniones de los docentes buscando siempre la aprobación de sus acciones Los estudiantes se muestran apáticos a la metodología usada por el docente y no se involucran con agrado en el desarrollo de las clases.	No se planifica de acuerdo a las necesidades de formación y no se contextualiza la educación con las prácticas pedagógicas haciendo uso de las TIC Los contenidos son seleccionados de acuerdo a textos guía No se diseñan estrategias de enseñanza aprendizaje

Categoría de análisis	Estudiantes	Docentes
Aprendizaje	<p>La participación es voluntaria y solo algunos niños se sienten seguros para expresar su opinión, por lo general siempre son los mismos.</p> <p>Los estudiantes están sujetos a la voz y dirección del maestro para todo el desarrollo de las actividades.</p> <p>No hay actividades que surgieran del interés del estudiante.</p> <p>Los estudiantes muestran dificultad para contextualizar los conocimientos académicos en acciones prácticas.</p> <p>A los estudiantes se les dificulta dar opiniones sobre el tema de la clase.</p> <p>Los estudiantes tienen aprendizaje memorístico.</p> <p>Los estudiantes no desarrollan actividades complementarias</p> <p>No siguen un proceso para desarrollo de situaciones problema</p>	<p>No se identifican recursos didácticos de acuerdo a las necesidades</p> <p>No se reflexiona sobre la implementación de estrategias ni recursos didácticos</p> <p>No se identifican necesidades de evaluación de aprendizajes en coherencia con el currículo y situaciones educativas</p> <p>No se identifican fortalezas ni debilidades de procesos</p> <p>No se establecen procesos de mejoramiento</p> <p>Se evalúa retención de conocimientos</p> <p>Resistencia al cambio ya que no se hace uso de las TIC</p> <p>En el aula se utiliza el trabajo individual y no el trabajo en grupo</p> <p>Las preguntas se utilizan solo para evaluar, pocas veces para activar el conocimiento, estas son un índice de cuanto sabe el estudiante</p> <p>Se planean las actividades, con el fin de dar cumplimiento al plan curricular y las temáticas.</p> <p>Se considera que dar cumplimiento a los objetivos es que los estudiantes aprueben las evaluaciones</p> <p>Se evalúa el aprendizaje de contenidos desde el resultado de las evaluaciones sin tener en cuenta otros criterios ligados al aprendizaje para dar continuidad a las temáticas.</p> <p>No aprovechamiento de las TIC como herramienta fundamental en el desarrollo de contenidos curriculares.</p>
Pensamiento	<p>El trabajo que se hace sobre el pensamiento del estudiante es memorización ya que ellos al decir una lección o dar una respuesta de memoria creían haber logrado el objetivo pero eso era solo momentáneamente.</p> <p>Los estudiantes no se cuestionaban sobre si lo que aprendían podían llevarlo a su contexto y si era útil o no para su vida.</p> <p>A los estudiantes se les dificulta hacer preguntas sobre el tema de la clase, siempre esperaba que fuera el profesor el que preguntara.</p>	<p>Dentro de la práctica pedagógica no se tiene en cuenta el desarrollo de pensamiento</p> <p>Es importante que los niños tengan claros los conceptos</p> <p>El docente cree que las notas son reflejo del conocimiento de los estudiantes</p> <p>No se da espacio para que el estudiante tengan pensamiento crítico y ayuden a construir el conocimiento.</p>

## **7.2 Diseño e implementación de la secuencia didáctica para aprender a resolver problemas de la función lineal**

En el Anexo 6 se presentan las actividades de la secuencia didáctica que a continuación se describen. A continuación se presenta el resumen de cada actividad es de anotar que la función de las TIC en el trabajo desarrollado fue determinante ya que se motivó el interés de los estudiantes hacia las matemáticas, se mejoran los razonamientos de los estudiantes y sus conjeturas, los estudiantes desarrollan la competencia de resolución de problemas, se fomenta el trabajo en equipo, favorece el espíritu de búsqueda promoviendo la integración y creatividad. Se desarrollan habilidades de manejo, asociación y conceptualización que van más allá de la simple adquisición de conocimiento incentivando la habilidad de exploración e investigación.

Así mismo el uso de otras herramientas como power point hace el trabajo menos monótono y los docentes tienen la posibilidad de mejorar la gestión de práctica.

### **7.2.1 Actividad 1. La función lineal, puntos de corte y pendiente**

El docente hace una exposición haciendo uso de diapositivas power point y videos sobre el tema. (Véase anexo 6 (Secuencia didáctica), y 8 (link videos) y 9 (link diapositivas)).

Para conocer las funciones lineales se presenta un recurso interactivo en el cual están varios ejemplos de gráficas de funciones lineales para que el estudiante observe la diferencia entre las funciones. Se analizan los puntos de corte y pendiente de una función mediante ejemplos e igualmente se hace uso de recursos interactivos. Los estudiantes grafican funciones haciendo uso de tabla de valores, igualmente se grafican funciones realizando puntos de corte. Se analizan situaciones problemáticas para analizar la pendiente. El desarrollo de la actividad se presenta en el Anexo 6. (Interacción docente - estudiante, recursos, tiempo). Anexo 7 Evidencias.

**Tabla 8. Análisis actividad 1**

Dificultades observadas	Los estudiantes no recordaban algunos conceptos trabajados en años anteriores.
Fortalezas	Repasar temas vistos haciendo uso de videos y diapositivas
Aprendizaje significativo	Se trabajó en grupo y se solucionaron dudas
Rol docente	Expositor - Guía Se vio la necesidad de reestructurar la planeación incorporando nuevos elementos. (TIC)
Rol estudiantes	Activo Se llevaron a cabo talleres y ejercicios para reforzar las temáticas vistas, tomando actividades de diferentes textos para cumplir este fin.
Comportamiento estudiantes	Algunos estudiantes se mostraron dispersos pero a medida que se avanzaba en el desarrollo de la clase se integraron mostrándose más motivados.
Conclusiones	Para mantener la atención de los estudiantes es necesario estar pendientes del desarrollo de actividades haciendo seguimiento.

### 7.2.2 Actividad 2. Geogebra software de apoyo

Mediante el uso de videos (Véase anexo 6 (Secuencia didáctica), y 8 (link videos)) se presenta un curso de Geogebra en donde el docente cumple el rol de guía mientras los estudiantes analizan como instalar el software, construcciones simples, uso de iconos y accesos directos, deslizadores, botones, guardar archivos entre otros. Los estudiantes tienen la posibilidad de observar ejercicios previamente diseñados y cambiando valores observa los cambios de dirección de las funciones. Se observa cómo se pueden realizar graficaciones con el uso del ratón y procesos con barra de entrada con comandos. Anexo 7 Evidencias.

**Tabla 9. Análisis actividad 2**

Dificultades observadas	En algunos computadores no funciono el programa Geogebra, se volvió a instalar y funcionó pero se perdió tiempo
Fortalezas	Los estudiantes se mostraron motivados por aprender Geogebra
Aprendizaje significativo	Los estudiante se apoyaron unos a otros resolviendo dudas sobre el uso de Geogebra
Rol docente	Guía
Rol estudiantes	Activo - participativo
Comportamiento estudiantes	Atentos y motivados
Conclusiones	Los estudiantes se mostraron motivados por el uso de videos para el aprendizaje de Geogebra

	Se evidenciaron algunos grados de dificultad en el uso de Geogebra, pero mediante el registro visual se comprendieron y analizaron conceptualizaciones del tema de funciones.
--	---

### 7.2.3 Actividad 3. Graficación de la función lineal haciendo uso de Geogebra

Se hace uso de Geogebra para realizar graficaciones básicas de acuerdo a instrucciones del docente, luego se empieza a realizar solución de sistemas de ecuaciones (Véase anexo 6 Secuencia didáctica). Anexo 7 Evidencias.

**Tabla 10. Análisis actividad 3**

Dificultades observadas	Algunos estudiantes mostraron dificultades para graficar la función lineal en Geogebra teniendo que volverles a explicar el procedimiento.
Fortalezas	Los estudiante hicieron uso del trabajo colaborativo para salir de dudas
Aprendizaje significativo	El aporte de compañeros para despejar dudas fue importante
Rol docente	Guía orientador
Rol estudiantes	Activo participativo
Comportamiento estudiantes	Inquietos al no poder graficar pero con el apoyo de compañeros y docentes sacaron adelante la guía. El trabajo fue llamativo para los estudiantes. Al comienzo surgieron dudas sobre el funcionamiento de Geogebra pero con el tiempo se consiguió autonomía por parte de los estudiantes.
Conclusiones	Es necesario reforzar algunos temas en donde los estudiantes se sienten con falencias. Los estudiantes desarrollaron diferentes formas de representación de funciones de manera manual y haciendo uso de Geogebra integrando consciente y significativamente tipos de pensamiento matemático en la construcción del concepto de función.

### 7.2.4 Actividad 4. Método Pólya para solución de problemas

En esta actividad el docente expone la teoría del método Pólya para la solución de problemas mediante el uso de diapositivas en power point, se explican los cuatro pasos: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás para verificar que la respuesta este acorde con lo solicitado. Se explica el proceso mediante varios ejercicios para que los estudiantes se apropien del método Pólya. (Véase anexo 6 Secuencia didáctica). Anexo 7 Evidencias.

**Tabla 11. Análisis actividad 4**

Dificultades observadas	Algunos estudiantes estaban dispersos
Fortalezas	Los estudiantes se apropiaron de los pasos para solucionar problemas con el método Pólya al usar problemas de la vida real.
Aprendizaje significativo	Aprendizaje en grupo en donde con la ayuda de los compañeros se despejaron dudas.
Rol docente	Guía orientador
Rol estudiantes	Activo Se aplicaron problemas siguiendo el método Pólya en donde los estudiantes manifestaron la importancia de seguir un proceso para la solución de problemas.
Comportamiento estudiantes	Los estudiantes dispersos distraían a quienes estaban trabajando en las actividades. Luego se dieron cuenta que no usaban el raciocinio para analizar los problemas presentados sino que lo hacían por anticipación sin seguir ningún proceso. Confiaban más en los procedimientos adquiridos mecánicamente que en su propio razonamiento.
Conclusiones	Los estudiantes vieron las fortalezas de usar el método Polya ya que no solo sirve para matemáticas sino para la toma de decisiones en la vida diaria.

**7.2.5 Actividad 5. Solución de problemas de función lineal**

En esta actividad se formulan problemas para que los estudiantes realicen el proceso de solución haciendo uso del método Pólya tanto a nivel individual como grupal. Anexo 7 Evidencias.

**Tabla 12. Análisis actividad 5**

Dificultades observadas	Hay que compartir computadores
Fortalezas	Se aprendió a resolver problemas de función lineal haciendo uso del método Pólya
Aprendizaje significativo	El trabajo en grupo motiva
Rol docente	Guía
Rol estudiantes	Activo
Comportamiento estudiantes	Gusto por trabajar haciendo uso del computador y sobre papel El trabajo virtual fue enriquecedor ya que los estudiantes siempre muestran disposición, especialmente cuando el trabajo es en grupo.
Conclusiones	El aprendizaje es más significativo haciendo uso de las TIC ya que es más sencillo hallar la pendiente y ecuación de recta con Geogebra. Los estudiantes demostraron habilidades para trabajar Geogebra y desarrollar los problemas planteados. Les gusto comparar lo realizado a mano y como en el computador se podían ver los resultados y comparar en poco tiempo. Los estudiantes se caracterizan por ser visuales y táctiles mostrando habilidades para trabajar las TIC. Cuando están frente a un computador nada los distrae y se les olvida hasta el tiempo y que tienen otras asignaturas a las cuales asistir.

### **7.3 Análisis de los resultados de la secuencia didáctica implementada: hallazgos**

A continuación se presentan los hallazgos de acuerdo a las categorías analizadas.

#### **7.3.1 Categoría enseñanza**

Tabla 13. Enseñanza

Subcategoría	Análisis
<b>Planeación de clases y actividades</b>	<p><b>Momento 1:</b> la planeación con elementos básicos donde se evidenciaba tema, logros actividades y evaluación. Uso del tablero</p> <p><b>Durante.</b> Se vio la necesidad de reestructurar la planeación incorporando nuevos elementos. (TIC)</p> <p><b>Momento 2:</b> la planeación con lo exigido pero incluyen elementos que hace que realmente sea significativa, en la parte metodológicas y de evaluación : Uso Geogebra</p> <p><b>Análisis:</b> al observar que la planeación no solo debe contener los elementos exigidos sino por el contrario debe ser una herramienta que ayude a evidenciar que se hace un trabajo significativo con los estudiantes.</p>
<b>Desarrollo de clase</b>	<p><b>Momento 1:</b> talleres y ejercicios para reforzar las temáticas vistas, tomando actividades de diferentes textos para cumplir este fin.</p> <p><b>Momento 2:</b> las actividades debían ser planeadas para que se adaptara a lo que se les enseña a los estudiantes y no a un texto.</p> <p><b>Momento 3:</b> diseño de actividades para ser aplicadas con Geogebra</p> <p><b>Análisis:</b> desarrollo de habilidades: pensamiento matemático, científico, y lógico. Resolución de problemas paso a paso según método Pólya</p> <p><b>Momento 1:</b> se utilizaba en el aula el trabajo individual la mayor parte del tiempo y el trabajo en grupo en menor medida con talleres de completar información y nada de proponer.</p> <p><b>Momento 2:</b> se vio la necesidad de cambiar el trabajo del aula para que fuera más productiva, dinámica y que los estudiantes se integraran con agrado.</p> <p><b>Después:</b> se estructuro el trabajo para que fuera individual o en grupo que buscaban desarrollar el conocimiento con diversas actividades prácticas que ayudaran a la construcción del conocimiento.</p> <p><b>Análisis:</b> El trabajo del aula siempre debe estar enfocado en desarrollar un fin. Resolución de problemas paso a paso según método Pólya</p>
<b>Recursos</b>	<p><b>Momento 1:</b> se utilizaba en el aula tablero y marcadores</p> <p><b>Después:</b> se estructuro el trabajo mediante actividades</p> <p><b>Momento 2:</b> se vio la necesidad de complementar el trabajo del aula y usar computadores con el software Geogebra haciendo uso de guías y actividades</p> <p><b>Análisis:</b> El trabajo fue llamativo para los estudiantes. Al comienzo surgieron dudas sobre el funcionamiento de Geogebra pero con el tiempo se consiguió autonomía por parte de los estudiantes.</p>
<b>Evaluación</b>	<p><b>Momento 1:</b> aplicación de evaluaciones con varios problemas y secciones de opción múltiple y completar espacios privilegiando la memorización.</p> <p><b>Después:</b> uso de talleres para ser evaluados en el aula de clase mediante Geogebra con trabajo individual y grupal, presentación de informes e investigaciones en internet.</p> <p><b>Momento 2:</b> se vio la necesidad de una evaluación como proceso continuo y de retroalimentación permanente siendo el estudiante protagonista de ese proceso y sobre el cual debe ir fundamentando y por el cual debe ir cambiando</p> <p><b>Análisis:</b> evaluación centrada en el estudiante en donde se superan las debilidades y se da un proceso de valoración continúa y no un simple proceso de calificación.</p>

### 7.3.2 Categoría aprendizaje

Subcategoría	Análisis
<b>Anticipación</b>	<p><b>Momento 1:</b> los estudiantes no hacen anticipación de estrategias para la solución de problemas</p> <p><b>Momento 2:</b> los estudiantes llevan a cabo procesos de anticipación de solución de situaciones problema haciendo uso de herramientas visuales o mentales</p> <p><b>Análisis:</b> es importante la anticipación ya que permite evaluar la corrección o no de las operaciones realizadas. Si no se anticipa los estudiantes aceptan como correctos los resultados que son ilógicos, puesto que confían más en los procedimientos adquiridos mecánicamente que en su propio razonamiento.</p>
<b>Predicción</b>	<p><b>Momento 1:</b> No se predice, no se vislumbra la solución</p> <p><b>Momento 2:</b> Los estudiantes identifican los datos y la meta del problema</p> <p><b>Análisis:</b> Es necesario que el docente trabaje en sus clases planteando situaciones diversas y variadas que permitan al estudiante reflexionar, analizar y razonar, para concebir un plan que le permita obtener la solución de los problemas dado</p>
<b>Uso información no visual</b>	<p><b>Momento 1:</b> No se hace uso de la información para tratar de definir el problema, no se verifica la información que se tiene a la mano.</p> <p><b>Momento 2:</b> se analiza el problema para identificar la información relevante planteando la posible solución dentro de varias alternativas de acuerdo a la selección de alternativas factibles</p> <p><b>Análisis:</b> Además de la información no visual también se usa la visual que permite representar los datos o información que suministra el problema, esta estrategia es de gran utilidad ya que permite visualizar mejor la situación planteada y por ende contribuye a que el estudiante comprenda mejor y genere nuevas ideas de resolución. Con la visualización se comprenden los conceptos y condiciones mejor que las frases verbales.</p>
<b>Participación</b>	<p><b>Momento 1:</b> la participación en el desarrollo de la clase era solo de un mínimo grupo de estudiantes, participaban siempre los mismos.</p> <p><b>Momento 2:</b> se empezaron a hacer cambios en el desarrollo de la clase y se inició con actividades en las que pudieran participar todos los estudiantes.</p> <p><b>Momento 3:</b> se realizan planeaciones de clase en las que se involucren todos los estudiantes.</p> <p><b>Análisis:</b> cuando hay participación activa de los estudiantes en el desarrollo de la clase, el aprendizaje es más significativo y todos los estudiantes aprenden más fácilmente, esto lo pueden demostrar con las opiniones que den, los escritos que realicen y / o el producto terminado que presenten. Es fundamental que todos los niños participen y se sientan seguros de hacerlo, enseñándoles a respetar el turno de los demás y escuchar sus opiniones.</p>

### 7.3.3 Categoría pensamiento

Subcategoría	Análisis
Desarrollo léxico conceptual	<p>Planteamiento de preguntas</p> <p>Se vio la importancia de conocer la innumerable cantidad de interrogantes que plantean los estudiantes en cada tema de clase y a la vez la confianza y libertad con que preguntan</p> <p>Se puede evidenciar que los estudiantes preguntan, se preguntan y se aprovechan los conocimientos previos para construir conocimientos y despejar muchas</p>
Formulación enunciados lógicos	<p>Capacidad de construir ideas o conceptos y establecer relaciones entre ellas</p>

## 8. Análisis de resultados

A continuación se presentan los ciclos de reflexión de acuerdo a las categorías

### 8.1 Ciclos de reflexión pensamiento lógico

**Tabla 14. Pensamiento lógico**

<b>Subcategoría</b>	<b>Análisis</b>
<b>Modificación de conceptos y nociones</b>	Identifica las magnitudes (variables) que intervienen en la situación. Utiliza material concreto para representar la situación
<b>Habilidades - destrezas</b>	Los estudiantes comprendieron los pasos de resolución de problemas con la teoría de Pólya y ahora es usada.

### 8.2 Ciclos de reflexión pensamiento matemático

**Tabla 15. Pensamiento matemático**

<b>Subcategoría</b>	<b>Análisis</b>
Pensamiento numérico	Justifica y explica con sus propias palabras (oral - escrito) las relaciones y regularidades encontradas entre las variables involucradas.
Pensamiento espacial	
Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Propone un modelo de solución asociado a valores particulares, en donde invisibilizan la expresión para cualquier figura, por valores específicos en la secuencia Reconocen los conceptos centrales implicados en la situación problema. Reconoce y coordina diversos modelos de la situación-problema.
Pensamiento aleatorio y sistema de datos	
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	

### 8.3 Ciclos de reflexión pensamiento científico

**Tabla 16. Pensamiento científico**

<b>Subcategoría</b>	<b>Análisis</b>
Observación Hipótesis Experimentación Predicción Teoría	Visualiza el problema desde diferentes puntos de vista. Plantea modelos de solución elaborados a partir de esquemas, dibujos donde se evidencia la manera en que comprende el patrón Enuncia modelos en los que utiliza notaciones y símbolos de la matemática para la obtención de modelos generales. Propone las primeras expresiones generalizadas, formulas, “ecuaciones” que dan cuenta de la relación de dependencia entre las variables involucradas en cada una de las situaciones planteadas. Constituye expresiones algebraicas que modelen la situación planteada y valida el modelo encontrado. Valida del modelo matemático encontrado

### 8.4 Necesidades identificadas y cambios realizados

**Tabla 17. Necesidad identificada antes - después**

<b>Necesidad identificada</b>	<b>Antes</b>	<b>Cambio realizado</b>	<b>Después</b>
Estudiantes pasivos	Los estudiantes seguían instrucciones del docente sin participar su rol era pasivo Los estudiantes no preguntaban de esta manera el docente da por hecho que todo quedo entendido y aprendido La mayoría de los estudiantes se conforman con la información que el docente le ofrezca durante el desarrollo de la clase.	Los estudiantes participan en clase Tienen una visión del mundo real más allá del aula de clase Los estudiantes fueron protagonistas al aprender nuevos conceptos, aplicar información y construir sus conocimientos a través del uso de las TIC: Geogebra Manejo de habilidades y de competencias Los estudiantes compartieron ideas entre ellos, expresaron sus propias opiniones y negociaron soluciones, (Bryson, 2010; Reyes, 2015).	Haciendo uso de Geogebra se logró que los estudiantes fueran los protagonistas de su aprendizaje ya que ellos empezaron a trabajar activamente. El rol de los estudiantes fue activo ya que participaban y preguntaban usando pensamiento crítico,
Papel del docente	Clases magistrales Desarrollo de las clases avanzando en contenidos para dar cumplimiento al plan de estudios.	Guía Retroalimentación por parte del docente Autoevaluación constante	Paso de ser el centro del aula a orientar guiar y acompañar a los niños en el descubrimiento de su nuevo conocimiento, aprendió al

Necesidad identificada	Antes	Cambio realizado	Después
Motivación	<p>Desmotivación por el uso de metodología con clases magistrales</p> <p>Poco interés de los estudiantes en el desarrollo de las clases</p> <p>Falta de actividades con uso TIC que dinamicen clases para salir de la rutina de las clases magistrales, donde el único protagonista es el profesor, el estudiante cumple el papel de receptor pasivo.</p>	<p>Uso de TIC Geogebra que motivan al estudiante</p> <p>Mayor participación en clase y mejor disposición para realizarlas tareas (Bottoms &amp; Webb, 2010; Moursund, Bielefeldt, &amp; Underwood, 2013).</p> <p>Se aumentaron las habilidades sociales y de comunicación.</p> <p>Mejoraron las habilidades para la solución de problemas (Moursund, Bielefeld, &amp; Underwood, 2013).</p> <p>Aumentar la autoestima de los estudiantes. Los estudiantes interpretan motivando su curiosidad adquiriendo aprendizajes significativos</p>	<p>lado de ellos y compartió sus inquietudes buscándoles quien les pudiera asesorar y aclarar las dudas</p> <p>El rol del docente fue de guía.</p> <p>Rol de animador y facilitador de ambientes que favorezcan la curiosidad, la investigación, el trabajo cooperativo</p> <p>Las clases cambiaron ya que no se centraba en el contenido de las temáticas, sino las actividades iban encaminadas a complementar y enriquecer el conocimiento de los estudiantes y así poderlo llevar a la práctica con Geogebra</p>
Evaluación memorística	<p>Evaluación de conocimientos a través de formatos para evidenciar el aprendizaje de contenidos por parte de los estudiantes en forma memorística y repetitiva de conceptos.</p>	<p>Se evaluó el análisis y síntesis, transferencia de conocimientos y procedimientos a otros contextos, pensamiento crítico, investigación y manejo de diversas fuentes de información, expresión oral y escrita, trabajo en equipo, responsabilidad individual y grupal, planificación y organización y toma de decisiones</p> <p>Los estudiantes retienen mayor cantidad de conocimiento y habilidades dónde se pueden utilizar en el mundo real (Blank, 2010; Bottoms &amp; Webb, 2010; Reyes, 2015).</p>	<p>La evaluación paso de ser memorística a ser trabajada formativamente por medio del uso de guías a desarrollar con Geogebra</p>

<b>Necesidad identificada</b>	<b>Antes</b>	<b>Cambio realizado</b>	<b>Después</b>
Vínculo con la vida real	Escasa o nula relación de lo aprendido con el contexto. No hay transversalidad del conocimiento ni se aplica lo aprendido a la vida cotidiana.	Se hizo una conexión entre el aprendizaje en el aula y la realidad. Los estudiantes hacen uso de sus fortalezas individuales de aprendizaje (Thomas, 2015)	Con el uso de Geogebra se trabajó para que los estudiantes pudieran vivir una experiencia práctica aprender haciendo.

### **8.5 Prueba de salida Análisis**

En la prueba de salida se evidenció el gusto por el uso de Geogebra y se concluye que se logró la transferencia del conocimiento de principios teóricos, desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo y así mismo se incentivó el interés por la investigación y uso de las TIC.

Los estudiantes fueron capaces de inferir el enunciado verbal como una forma de representar una función, fue difícil para ellos simbolizar lo verbalizado e interpretar la simbolización usada en el contexto de las funciones

Evidenciaron logros en cuanto al uso de un lenguaje simbólico formal.

El uso de la tecnología es una herramienta importante para el desarrollo de la visualización y el razonamiento lo que permite generar un ambiente agradable logrando un aprendizaje dinámico

La resolución de problemas fue una estrategia efectiva y adecuada para desarrollar habilidades logrando aprendizajes significativos

Se posee discriminación visual para distinguir similitudes y diferencias entre figuras

Se captan representaciones visuales donde se comprenden e interpretan representaciones visuales con vocabulario adecuado

Se posee habilidad visomotora para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo y lograr reproducir una figura en la computadora

Los estudiantes realizan construcciones geométricas utilizando un lenguaje apropiado minimizando el tiempo de trabajo.

## 9. Conclusiones

Mediante el diseño y aplicación de un ambiente de aprendizaje y haciendo uso de recursos didácticos digitales de la mano del método Pólya para la resolución de problemas, los estudiantes siguieron el proceso para que logran entender el planteamiento del problema, replantearlo con sus palabras, distinguir los datos, saber realmente lo que solicitaba el problema y analizar la información suministrada y de acuerdo con los conocimientos previos diseñaron planes o estrategias para su solución mediante figuras, diagramas, razonamiento, formulas, modelos entre otras, para luego ejecutar el plan y finalmente revisar si la respuesta obtenida estaba acorde con la solicitud del problema.

Siguiendo a Pólya (1995), se confirma la importancia de enseñar a los estudiantes a analizar los problemas a profundidad, de ser perseverantes, recursivos y de estar en constante ejercitación. Los estudiantes se motivaron con el trabajo propuesto y aceptaban el reto de resolver problemas tomándose el tiempo para reflexionar sobre el proceso a seguir para buscar la solución teniendo en cuenta diferentes estrategias. De esta manera la resolución de problemas se convirtió en una experiencia significativa.

Así mismo se ratifica lo establecido por Benedicto (2012), Geogebra es una herramienta idónea para el desarrollo de la capacidad visual, pues permite la representación de información abstracta en imágenes visuales de manera rápida y sencilla ya que haciendo uso de Geogebra se logró que los estudiantes fueran los protagonistas de su aprendizaje ya que ellos empezaron a trabajar activamente. El rol de los estudiantes fue activo ya que participaban y preguntaban usando pensamiento crítico.

Siguiendo a Godino (1994) en cuanto al ambiente de aprendizaje se diseñaron actividades que implicaron la toma de decisiones. Las clases cambiaron ya que no se centraba en el contenido de

las temáticas, sino las actividades iban encaminadas a complementar y enriquecer el conocimiento de los estudiantes y así poderlo llevar a la práctica con Geogebra

En la prueba de salida se evidenció el gusto por el uso de Geogebra y se concluye que se logró la transferencia del conocimiento de principios teóricos, desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo y así mismo se incentivó el interés por la investigación y uso de las TIC.

Es de anotar que la planeación de la unidad didáctica contribuyó a la obtención de resultados favorables, se dio el aprendizaje identificando los logros y errores en los cuales incurren con mayor frecuencia para planear y plantear cambios en la enseñanza - aprendizaje.

Se establece que los estudiantes realizaron un análisis de sus procesos de aprendizaje en cuanto a avances y dificultades valorando el aprendizaje. Se establece que la enseñanza debe ser un espacio en donde exista interacción entre los estudiantes y docentes con una comunicación de doble vía llegando a transmitir conocimientos y socializando los aprendizajes.

Se resalta la innovación de este trabajo ya que se convirtió en ejemplo para otras asignaturas y alentó hacia la reflexión de nuevas prácticas pedagógicas y los roles que se deben desempeñar cuando se usan las TIC frente a los cambios continuos, por lo cual es importante integrar nuevos recursos y estrategias asumiendo una actitud positiva frente a la innovación y las tecnologías en la educación.

Es de anotar que al realizar el trabajo se pudo reflexionar en torno a la pertinencia de la práctica docente en el aprendizaje de los estudiantes. Se proporcionaron herramientas prácticas para mejorar los hábitos y actualizar los métodos y el trabajo en equipo permitió considerar varios aspectos y reflexiones que no se dan de manera individual.

Los estudiantes se apropiaron de conocimientos a través de la experimentación con el uso de computadores, así mismo construyendo explicaciones construyendo nuevos significados trabajando de manera responsable. Se construyeron argumentos y representaciones teniendo en

cuenta el respeto y la capacidad para escuchar y plantear puntos de vista de los compañeros. Así mismo al trabajar en equipo interactuaron productivamente asumiendo sus compromisos.

Se evidenció que los estudiantes desarrollaron estrategias para conducir a otros saberes, lo que favoreció el aprendizaje a través de la aplicación de conceptos generando espacios de participación activa en el proceso de enseñanza - aprendizaje accediendo a potencialidades y generando teorías.

Se debe hacer énfasis en que al abandonar formas de trabajo arraigadas implica dedicar tiempo y esfuerzo por lo tanto se debe dedicar atención a los conocimientos, habilidades, saberes, materiales y experiencia para lograr la meta y no desfallecer. Así mismo, se dieron profundas transformaciones en la enseñanza de las matemáticas respecto a la planeación, valoración de expectativas de aprendizaje, delimitación de temas, diversidad de contextos y el uso de recursos y materiales que incentivan a los estudiantes para lograr su aprendizaje.

Finalmente se concluye que el objetivo de estudio se cumplió ya que la secuencia didáctica mediada por las TIC haciendo uso de geogebra para la resolución de problemas matemáticos que se modelan con la función lineal contribuyó en los siguientes aspectos:

Haciendo uso de Geogebra se logró que los estudiantes fueran los protagonistas de su aprendizaje ya que ellos empezaron a trabajar activamente.

El rol de los estudiantes fue activo ya que participaban y preguntaban usando pensamiento crítico.

El docente paso de ser el centro del aula a orientar guiar y acompañar a los niños en el descubrimiento de su nuevo conocimiento, aprendió al lado de ellos y compartió sus inquietudes buscándoles quien les pudiera asesorar y aclarar las dudas

Las clases cambiaron ya que no se centraba en el contenido de las temáticas, sino las actividades iban encaminadas a complementar y enriquecer el conocimiento de los estudiantes y así poderlo llevar a la práctica con Geogebra

La evaluación paso de ser memorística a ser trabajada formativamente por medio del uso de guías a desarrollar con Geogebra

Con el uso de Geogebra se trabajó para que los estudiantes pudieran vivir una experiencia práctica aprender haciendo.

## 10. Recomendaciones y Sugerencias

El uso de la tecnología es una herramienta importante para el desarrollo de la visualización y el razonamiento lo que permite generar un ambiente agradable logrando un aprendizaje dinámico, motivo por el cual se debe usar de manera regular en el aula de clase.

Es necesario introducir el programa Geogebra desde la básica primaria para que los niños aprendan a usarlo y desarrollen su creatividad, además empiecen a usar las nuevas tecnologías brindándole al estudiante la oportunidad de desarrollar su pensamiento creativo lógico matemático, habilidad y destreza para resolver problemas de la vida cotidiana y realizar trabajos por proyectos. Por tal motivo es necesario brindar estrategias didácticas suficientes donde los alumnos puedan aprender y pensar utilizando esquemas más complejos para organizar información y adquiriendo habilidades computacionales.

Involucrar a los padres de familia dentro del proceso formativo de sus hijos es importante, pues el acercamiento al colegio y a los docentes permite complementar el desarrollo integral de los estudiantes dentro de su contexto académico y social.

Es necesario hacer seguimiento y evaluación a los resultados, logros, avances y dificultades que van surgiendo en el desarrollo de las acciones a través de socializaciones, retroalimentación y acciones de revisión y ajustes para garantizar el éxito.

## 11. Aprendizajes pedagógicos y didácticos obtenidos

A continuación se dan a conocer los aprendizajes pedagógicos y didácticos obtenidos con el trabajo realizado.

**Tabla 18. Aprendizajes pedagógicos obtenidos**

<b>Aprendizaje pedagógico</b>	<b>Análisis</b>
Interacción entre los estudiantes y docentes Pedagogía	La enseñanza debe ser un espacio en donde exista interacción entre los estudiantes y docentes con una comunicación de doble vía llegando a transmitir conocimientos y socializando los aprendizajes Pedagogía activa. Permite comprender el contexto real del desempeño profesional articulando conocimientos propios de la disciplina e intentando lograr un sinergismo que conduzca a una formación integral. (Maldonado, 2007). Aprendizaje de manera didáctica y dinámica El trabajo en grupo es fundamental para mejorar las relaciones con los demás. Se aprendió a conocer y a comprender más los compañeros. Permitió desarrollar la tolerancia. Al usar la coevaluación los estudiantes se sintieron participes de su aprendizaje en grupo, dándole importancia a la participación individual. De acuerdo con Barkley, Cros y Howell (2010) es más eficaz que las calificaciones reflejen una combinación del rendimiento individual y grupal acuerdo con Mosqueira (2010) la autoevaluación y coevaluación permitieron abandonar el aprendizaje memorístico
Rol del docente	Orientador, acompañante y evaluador del proceso (Álvarez, 2010) El docente cumplió el rol de guía a lo largo del proceso y así lo manifestaron los estudiantes que se sentían escuchados y apoyados en todo momento valorando los esfuerzos individuales
Rol de los estudiantes	Los estudiantes construyeron su conocimiento a través de la colaboración aprendiendo a través del proceso mostrando autonomía, responsabilidad y compromiso.
Articulación saberes	Articulación de distintas disciplinas, en sus aspectos práctico y teórico, (Álvarez, 2010)
Retroalimentación.	Se llevó a cabo la interacción continua con los estudiantes
Aprendizaje.	Los estudiantes comentaron que se dio aprendizaje ya que con el uso de las TIC: Geogebra se intercambiaron ideas, se reforzaron conocimientos y se complementaron los diferentes puntos de vista
Trabajo colaborativo	El trabajo colaborativo favorece la responsabilidad para buscar el éxito colectivo. De acuerdo con Martin (2011), el trabajar colaborativamente lleva a compartir responsabilidades pero exige mayor estructura y organización, de acuerdo a la experiencia se notó que los estudiantes se sintieron comprometidos haciéndose responsables. El trabajo colaborativo permite integrar el equipo y lograr la tareas asignadas, de acuerdo con Guitert y Giménez (2000), señalan que es conveniente que cada uno se plantee unos objetivos de trabajo, participación, compromiso e implicación en la dinámica de grupo lo que lleva a que el equipo asegure que sus integrantes contribuyan para lograr un objetivo

<b>Aprendizaje pedagógico</b>	<b>Análisis</b>
Desarrollo de competencias	De acuerdo con Cataldi y Cabero (2012) el trabajo colaborativo ayuda a mejorar las competencias de los estudiantes fortaleciendo el modelo educativo, encontrándose que se gestionaron los acuerdos, la negociación y la tolerancia para trabajar en grupo.
Resultados académicos	Modificar los ambientes de enseñanza donde el estudiante pueda participar de su aprendizaje, experimentar, compartir, discutir ideas y observar; motiva al estudiante a obtener buenos resultados en su proceso de evaluación.

**Tabla 19. Aprendizajes didácticos obtenidos**

<b>Aprendizaje didáctico</b>	<b>Análisis</b>
Aprender haciendo	Proyectos que van más allá del aula con impacto en la vida real Los estudiantes exploraron sus áreas de interés dentro del marco de un currículo establecido Los estudiantes realizaron su trabajo y actuaron siendo activos y dinámicos.
Interacción	metodología centrada en el alumno y en su aprendizaje, se trabaja de manera autónoma Los estudiantes estuvieron receptivos a la propuesta y ampliaron sus conocimientos gracias a la experiencia vivida y al trabajo en equipo. De acuerdo con Guitert (2007) con la interacción al argumentar y expresar ideas se ayuda a la construcción de conocimientos
Uso TIC	Se observó gran interés que despierta el uso de las TIC en los estudiantes, la gran motivación con que hacen uso de ellos y los alcances conceptuales, reflejados en los desempeños obtenidos

En la siguiente tabla se presentan los aprendizajes comportamentales.

**Tabla 20. Aprendizajes comportamentales**

<b>Valores</b>	<b>Análisis</b>
<b>Responsabilidad.</b>	Se promovió el trabajo autónomo, formando personas que aprenden por cuenta propia. Los estudiantes se comprometieron a ser centro de aprendizaje, además retomando a Basabe (2010) se reconoció que los estudiantes obtuvieron mejores logros apoyándose en conocimientos, comunicación y gracias a la capacidad para aprender por su cuenta. Al comienzo los estudiantes al prender el computador lo primero que hacían era activar cuentas de correo y uso de Facebook, pero luego ya se dedicaron por completo a Geogebra.
<b>Solución a problemas de grupo</b>	Retomando a Wang, Ku&Sun (2009) citado por Arroyo (2012), se encontró que una comunicación clara es fundamental para los equipos.
<b>Desarrollo capacidades</b>	<b>de</b> Análisis, síntesis, investigación, transferencia de conocimientos, pensamiento crítico, responsabilidad individual y grupal, manejo de fuentes de información, expresión oral y escrita, trabajo en equipo, planificación, organización, toma de decisiones.
<b>Desarrollo competencias</b>	<b>de</b> Se promovieron las competencias cognitivas, colaborativas, tecnológicas y meta cognitivas. Se desarrolló el aprendizaje de habilidades y procedimientos como la capacidad de análisis, síntesis, resolución de problemas, habilidades de trabajo cooperativo, comunicación escrita
<b>Empatía</b>	Se promovió una conciencia de respeto hacia los compañeros desarrollando empatía, trabajo disciplinar, se promovió la capacidad de investigación

**Reflexión Pedagógica.** Geogebra permite observar como al variar los extremos del intervalo, la recta secante se mueve a lo largo de la curva variando su pendiente. Geogebra proporciona imágenes con movimiento que facilitan la visualización al representar todas las rectas. Además, conforme se varía el intervalo, el estudiante no solo puede observar el cambio geométrico que experimenta la recta, sino que además el Geogebra muestra el cálculo numérico de la pendiente lo que lleva a un mejor aprendizaje.

Los estudiantes comprendieron los conceptos estudiados, los conocimientos fueron aumentando progresivamente, relacionando la información nueva con la obtenida en sesiones anteriores, favoreciendo un aprendizaje significativo. Se creó un ambiente de mayor participación y discusión de las informaciones.

Se adquirieron destreza en el manejo de herramientas de software aplicadas a la enseñanza de las funciones, de esta manera las representaciones gráficas son más fáciles de construir haciendo uso del software.

El uso de software permite guardar el trabajo con facilidad y recuperarlo de acuerdo al tiempo de trabajo disponible para retomarlo, así mismo las actividades se pueden imprimir.

El uso de Geogebra facilita la posibilidad de visualizar objetos matemáticos y sus conexiones tanto en ventana gráfica como en una ventana algebraica, a través de la manipulación de objetos usando la ventana de entrada de esta manera, se disminuye la memorización de conceptos.

Del mismo modo, se puede hacer uso de la propiedad “arrastre”, con lo cual es posible determinar la región factible, también hacen uso del cambio de escalas con el zoom de GeoGebra, de este modo obtienen gráficos precisos y no distorsionados de un problema al resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

Geogebra, al ser portátil y libre, los alumnos tienen la posibilidad de reforzar en casa sus tareas según su propio ritmo de aprendizaje, además los profesores tendrán más tiempo en dar un significado adecuado a los conceptos de los alumnos y validar las respuestas en clase.

**Logros.** Se aprovechó la visualización dinámica e interactiva que ofrece Geogebra para comprender, profundizar y mejorar la observación y análisis de las propiedades de las funciones.

Se fomentó que el estudiante fuera protagonista de su propio aprendizaje, favoreciendo un aprendizaje significativo. Las actividades comenzaron recordando los contenidos matemáticos aprendidos en las sesiones anteriores para que los nuevos contenidos se relacionen e integren con los anteriores

La comprensión de los conceptos proporciona mejores resultados en la práctica.

Se facilitó el trabajo autónomo de los estudiantes, cada uno realizó las actividades de manera individual y grupal observando los resultados que el programa informático proporciona y sacando conclusiones propias y grupales.

Se potenció una aproximación visual en el trabajo con funciones haciendo uso de la componente visual y no basándose únicamente en procedimientos analíticos metódicos

La visualización de determinados conceptos permite que los alumnos comprendan los contenidos que son difíciles de entender sin su representación

Se facilitó la visualización de imágenes dinámicas y comprensión de conceptos de función lineal

El uso de Geogebra permite el diseño y el desarrollo de actividades en las que los alumnos pueden vivir experiencias matemáticas significativas para su aprendizaje, es decir, pueden tomar decisiones, reflexionar, comprobar, conjeturar, razonar. En definitiva, investigar.

**En cuanto a la función lineal los estudiantes lograron:**

Determinar la posición relativa de rectas en el plano.

Analizar la posición relativa de rectas, dadas sus pendientes utilizando recursos gráficos.

Emplear recursos gráficos para determinar el cambio de una recta al modificar los parámetros de una ecuación dada.

Identificar en la gráfica el punto de corte de una recta con el eje de las ordenadas.

Identificar en la gráfica el punto de corte de una recta con el eje de las abscisas.

Hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas

Reconocer y manipular los comandos básicos del software Geogebra.

Interpretar tablas de valores utilizando Geogebra.

Determinar la solución de un sistema de ecuaciones utilizando Geogebra.

Determinar si dos ecuaciones con dos incógnitas representan: rectas paralelas, utilizando Geogebra.

Determinar si dos ecuaciones con dos incógnitas representan: rectas perpendiculares, utilizando Geogebra.

Determinar si dos ecuaciones con dos incógnitas representan: rectas secantes (superpuestas), utilizando Geogebra.

Relacionar la representación gráfica de una situación con los datos del enunciado.

Establecer relaciones numéricas secuenciales entre variables.

Establecer relaciones numéricas no secuenciales entre variables.

Identificar las variables con símbolos en el Software

Predecir el comportamiento de una variable a partir de las ecuaciones generadas en el software

## **Resolución de problemas**

Los estudiantes lograron tener referentes reales y claros de los procesos a seguir para interpretar y analizar adecuadamente una situación matemática.

Se convirtieron en protagonista de su aprendizaje y adquirieron sobre todo una actitud positiva, que como bien lo indica (Pólya, 1995), es esencial para encontrar la solución a los problemas

La enseñanza de las matemáticas en la escuela de hoy, tiene que trascender a la vida social, cultural y política de los ciudadanos; y para ello, debe partir de sus situaciones cotidianas, de la realidad local y nacional; para que el estudiante considere el aprendizaje una actividad apasionante, cálida, que estimule su pensamiento crítico y desarrolle sus habilidades cognitivas para su propio servicio y el de sus comunidades

Partir de problemas contextualizados, promovió el aprendizaje significativo de las matemáticas; debido a que los estudiantes tuvieron la posibilidad de evocar sus conocimientos previos respecto a un tema, realizaron conexiones entre conceptos con otras áreas y por ende comprendieron la utilidad del conocimiento en situaciones matemáticas de la vida cotidiana, lo cual es muy importante, según pedagogos de la corriente constructivista como Ausubel, Bruner, Bransford

No es suficiente proponer problemas matemáticos contextualizados; hay que tener presente que los estudiantes traen consigno vacíos conceptuales, dificultades de comprensión lectora, poca agilidad para hacer cálculos rápidos y son impulsivos o precipitados al momento de resolver un problema. Estas situaciones influyeron negativamente y por esta razón, enseñarles un método, como el de Pólya, sirvió para brindarles una guía para analizar los problemas de un modo ordenado y sistemático, les generó mayor seguridad y confianza para solucionar las situaciones;

pero sobre todo que les quitó el temor a equivocarse, y por el contrario les permitió reflexionar sobre el error, como una oportunidad de aprendizaje

Fue necesario reforzar otras habilidades asociadas a la competencia de resolución de problemas; como fue el ejercicio de la comprensión lectora, el cuál le permite al estudiante interpretar adecuadamente las situaciones, identificar la incógnita, los datos del problema, saber a dónde quiere llegar, si es suficiente la información que se presenta, pero sobre todo replantear la situación con sus propias palabras.

Es de resaltar, que estas dificultades se reforzaron a lo largo de la intervención pedagógica, que además requirió el apoyo de otras asignaturas en cuanto al fortalecimiento de la comprensión lectora, desarrolló de la lógica y pensamiento crítico. Las evidencias de este progreso, se observan en los resultados arrojados por las listas de cotejo para verificar la aplicación de los pasos del método Polya, así como en los resultados de las Pruebas de resolución de problemas que se desarrollaron.

## Referencias

- Alsina, C Claudi; Burgués, C. Flamarich, Fortuny y Aymemmi (1994). “Invitación a la Didáctica de la geometría”. Editorial Síntesis de S.A. España
- Álvarez, V., Herrejón, V., Morelos, M. y Rubio, M.T. (2010). *Trabajo por proyectos: aprendizaje con sentido*. Revista Iberoamericana de Educación, 52(5), 1-13. Recuperado el 15 de mayo de 2010 de: <http://www.rieoei.org/3202.htm>
- Argudín, Y. (2005). *Educación Basada en competencias. Nociones y antecedentes*. México: Trillas.
- Arias (2013) Construcciones dinámicas con GeoGebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática, I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe Santo Domingo República Dominicana. I CEMACYC, República Dominicana
- Arroyo (2012). *Aprendizaje basado en proyectos como estrategia para fomentar el trabajo colaborativo en la educación a distancia*. Maestría en educación con acentuación en procesos de enseñanza aprendizaje. México.
- Barajas, C.; Fulano, B.; Ríos, W.; Salazar, L.; Pinzón, Á. A. (2016). *Función constante, lineal y afín*. En Gómez, Pedro (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 3* (pp. 1-54). Bogotá: Universidad de los Andes
- Barkley, E. Cross, P. y Howell, C. (2010). *Técnicas de aprendizaje colaborativo*. Madrid, España: Morata
- Barroso, J. J. (2012). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 257-286.
- Basabe, L. (2010). *Acerca de los usos de la teoría didáctica (capítulo 8)*. Camilloni, Alicia (2007a) (Comp.), *El saber didáctico* (pp.201-231). Buenos Aires: Paidós

- Bello Durand, J. B. (2013). Mediación del software geogebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de Educación secundaria. Tesis para optar el grado de Magíster en la Enseñanza de las Matemáticas Lima – Perú.
- Benedicto Baldonado, C. (2012). *Estudio de funciones con geogebra* Universitat De Valencia Máster en Profesor/a de Educación Secundaria. Valencia
- Bielefeldt, T., & Underwood, S. (2010). *Foundations for The Road Ahead: Project-based learning and information technologies*. Washington, DC: National Foundation for the Improvement of Education. Retrieved July 10, 2002, from <http://www.iste.org/research/roadahead/pbl.html>
- Bishop, A. (2010). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. España: PAIDOS.
- Blanco Nieto, L., Cárdenas Lizarazo, J., & Caballero Carrasco, A. (2015). *La resolución de problemas de matemática en la formación inicial de profesores de primaria*. Cáceres (España): Universidad de Extremadura
- Blanco, L. (2010). *Una clasificación de problemas matemáticos*. *Epsilon* (25), 49 - 60.
- Blank, W. (2010). *Authentic instruction*. In W.E. Blank & S. Harwell (Eds.), Promising practices for connecting high school to the real world (pp. 15–21). Tampa, FL: University of South Florida. (ERIC Document Reproduction Service No. ED407586) Citado y disponible en <http://www.eduteka.org/AprendizajePorProyectos.php>
- Bottoms, G., & Webb, L.D. (2010). *Connecting the curriculum to “real life.” Breaking Ranks: Making it happen*. Reston, VA: National Association of Secondary School Principals. (ERIC Document Reproduction Service No. ED434413) versión en español disponible en [www.eduteka.org/AprendizajePorProyectos.php](http://www.eduteka.org/AprendizajePorProyectos.php)

- Bransford, J., & Stein, B. (2010). *Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear*. Barcelona: Labor
- Bressan, A. & Gallego, M. (2011). *La Educación Matemática Realista: Bases teóricas*. III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea. Santa María, Argentina
- Bryson, E. (2010). *Will a project approach to learning provide children opportunities to do purposeful reading and writing, as well as provide opportunities for authentic learning in other curriculum areas?* Unpublished manuscript. (ERIC Document Reproduction Service No. ED392513) Citado y disponible en [unipanamericana.edu.co/desercioncero/.../2-aprendizaje\\_proyectos.pdf](http://unipanamericana.edu.co/desercioncero/.../2-aprendizaje_proyectos.pdf)
- Cataldi, Z y Cabero, J. (2012). *Las competencias profesionales en ambientes informáticos para trabajo colaborativo y resolución de problemas. Teoría de la educación. Educación y cultura en la sociedad de la información*. 135 - 161
- Cerda, H. (2010). *Los elementos de la investigación*. Bogotá: El Búho.
- Chevallard, Y. (2012). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage, Editions (2ième Edition revisada y aumentada, en colaboración con Marie-Alberte Joshua)
- Cintas, P. J. (2013). *La contextualización de las matemáticas*. Almería: Universidad de Almeria.
- Coppié, Á y Velázquez, F. E. (2013). *Estudio de la Función Lineal mediado por TIC*. Profesorado en Matemática. Argentina
- De Lera, C. G., & Deulofeu Piquet, J. (2010). *Planteamiento e interpretación de problemas contextualizados extremos. II Congreso Internacional de Didactiques* (pág. 8). Girona: Universidad de Girona.
- Del Carmen, (2016). *El análisis y secuenciación de los contenidos educativos*. Ice Horsori

- DeWalt, Kathleen; DeWalt, Billie R. (2002). *Participant observation: a guide for fieldworkers*. AltaMira Press: Walnut Creek, CA.
- Díaz -Aguado, M.J. (2006) *Aprendizaje cooperativo y educación intercultural*. Investigación-acción en centros de primaria. *Psicología Educativa*, 5,2. pp. 141-200
- Duval, Raymond. (2016). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle
- Edo, M. (2003). Intuir y construir nociones geométricas desarrollando sentimientos y emociones estéticas en Educación Infantil y Primaria , 233–248
- Elliott (1993). *El cambio Educativo en la Investigación – Acción*. Madrid: Morata.
- García Fajardo V. (2014). *Una secuencia didáctica que integra GeoGebra para la enseñanza de ecuaciones lineales en grado octavo* Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ingeniería y Administración Palmira, Colombia Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
- García La Rosa, J. (2011). *Propuesta metodológica para el tratamiento a la resolución de problemas geométricos de cálculo y demostración*. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, 3(29), Online. Recuperado el 12 de agosto de 2017, de <http://www.eumed.net/rev/ced/29/jegr.htm>
- García, J. G. (2014). El contexto cultural y la resolución de problemas: vistos desde el salón de clases de una comunidad Ñuu Savi. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(1), 50-73.
- Giubergia, Socolovsky, Ré. (2017). Incorporación de TICs a las clases de Análisis Matemático *Revista Iberoamericana de Educación en Tecnología y Tecnología en Educación* N°19 | ISSN 1850-9959 | Junio 2017 | Red de Universidades Nacionales con Carrera en Informática – Universidad Nacional de La Plata (Red UNCI – UNLP)

- Godino, J. D. y Batanero, C. (2007). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14, nº 3: 325-355.
- Godino, J. D. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-1-1. [164 páginas; 8,3MB] (Recuperable en, <http>)
- Godino, J. y. (2003). *El interaccionismo simbólico en educación matemática*. *Educación matemática*, 12 (1), 70-92.
- Gómez, P (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 3*
- Gonzalo Sanz, L. M. *Entre libertad y determinismo. Genes, cerebro y ambiente en la conducta humana*. Cristiandad: Madrid (2013)
- Guevara Sánchez, C. A. (2011) Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación. Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín Facultad de ciencias maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales.
- Guitert, M. Romeu, T. y Pérez - mateo, M. (2007). *Competencias TIC y trabajo en equipo en entornos virtuales*. RUSC: Revista de Universidad y Sociedad del conocimiento.
- Hernández Sampieri R., Fernández Collado, Baptista L. (2011). *Metodología de la Investigación*, Capítulo 1. Editorial McGraw-Hill.
- Labarrere, A. (2006). *Bases psicológicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. La Habana: Pueblo y educación.
- Lastra Torres, S. Romeo Cardone (2005). Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas. Santiago de Chile. 2005. Disponible en [http://www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2005/lastra\\_s/sources/lastra\\_s.pdf](http://www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2005/lastra_s/sources/lastra_s.pdf)

- López, F. & Velázquez E. (2006). *Un ejemplo de la utilidad de los contextos en la matemática realista: los algoritmos de suma y resta por columnas*. Disponible en:  
[www.box.com/shared/static/a2497an0iv.pdf](http://www.box.com/shared/static/a2497an0iv.pdf).
- Maldonado, P. (2007). *El aprendizaje basado en proyectos aplicado en educación técnica*. Ponencia presentada en I Congreso Internacional de Educación Técnica. UPEL IPB
- Marmolejo (2012) Marmolejo Avenia y MB Vega Restrepo, La visualización en las figuras geométricas: importancia y complejidad de su aprendizaje; México
- Martin, A. Domínguez, M. y Paralela (2011). *El entorno virtual: un espacio para el aprendizaje colaborativo*. EDUTECH, Revista electrónica de tecnología educativa 35, 1-9
- Martínez Gómez (2013) Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Naturales y Exactas  
Departamento de Matemáticas y Estadística. Manizales, Colombia.
- May Cen, I. (2015). George Pólya (1965). Cómo plantear y resolver problemas [título original: How To Solve It?]. *Entreciencias: diálogos en la sociedad del conocimiento*, 3(8), 419 - 420.
- Mayer, R. (2014). *Thinking, problem solving and cognition*. New York: Freeman.
- Mecina, (2010). Uso de las TIC en la enseñanza de la geometría en ESO. Disponible en  
<http://mates.albacete.org/ICEAMCM/PDF/ticgeo%20a%20pena.pdf>
- Medina Rivilla A. (2010). *Didáctica General* Ed. Pearson, Español
- MEN, (2004) Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Enlace editoriales Ltda;  
Santa Fé de Bogotá
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Obtenido de Mineducación:  
[http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)
- MEN. (2014). *Lineamientos curriculares*. Bogotá: SED.

MEN. (2017). *Mineducación*. Obtenido de Lineamientos curriculares:

[http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)

Montoya Benjumea, Norman David (2015) Propuesta de identificación del aporte de los recursos tecnológicos en la comprensión del concepto de función lineal de los estudiantes del grado noveno en la Institución Educativa José Miguel de Restrepo y Puerta de Copacabana. Universidad Nacional de Colombia. Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Ciencias Medellín

Mosqueira, R. (2010). *La evaluación continua y la autoevaluación en el marco de la enseñanza de la programación orientada a objetos*. XV Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática. 223-230

Moursund, D., Bielefeldt, T., & Underwood, S. (2013). *Foundations for The Road Ahead: Project-based learning and information technologies*. Washington, DC: National Foundation for the Improvement of Education. Retrieved July 10, 2002, from <http://www.iste.org/research/roadahead/pbl.html>

Muñoz Cuartas, O. (2012). *Diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC: Estudio de caso en el grado noveno de la Institución Educativa la Salle de Campoamor*. Trabajo final de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Facultad De Ciencias. Universidad Nacional De Colombia. Sede Medellín

Ospina García, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal*. Universidad Autónoma de Manizales. Maestría en Enseñanza de las Ciencias. Manizales

Paiva, S. (2014). *A programação linear no ensino Secundário*. Universidade Portucalense *Infante D. Henrique Departamento del novação, Ciência e Tecnologia*. (Dissertação do

- grau de Mestre em matemática/ Educação). UPIDH, Lisboa, Portugal. Recuperado de <http://repositorio.uportu.pt/dspace/handle/123456789/62?mode=full>
- PEI, (2017). *Institución educativa Distrital Codema Bogotá*.
- Pifarre, M., & Sanuy, J. (2011). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la Eso: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias*, 297-308.
- Planchart, M. O. (2015). *La Modelación Matemática: Alternativa didáctica en la enseñanza de precálculo. 360° en Ciencias y matemáticas*, <http://cremc.ponce.inter.edu/1raedicion/modelacion.htm>.
- Pólya, G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas*. DF, México: Trillas.
- Pólya, G. (1989). *Como resolver un problema*. México: Trillas.
- Pólya, G. (1995). *¿Cómo plantear y resolver problemas matemáticos?* México: Trillas.
- Ramos Ramos, M (2017). *Aplicación del método de Pólya para el aprendizaje de Funciones lineales y cuadráticas en los estudiantes de primer Año de bachillerato general unificado del colegio de Bachillerato Pío Jaramillo Alvarado de la ciudad de Loja, Período 2015-2016*. Ecuador.
- Restrepo Gómez, B. (2014). *La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico*. Educación y Educadores, núm. 7, pp. 45-55
- Reyes, R. (2015). *Native perspective on the school reform movement: A hot topics paper*. Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory, Comprehensive Center Region X. Retrieved July 10, 2002, from <http://www.nwrac.org/pub/hot/native.html>
- Riveros V. y Mendoza (2015). *Bases teóricas para el uso de las TIC en Educación*, Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia. Disponible en [http://tic-apure2008.webcindario.com/TIC\\_VE3.pdf](http://tic-apure2008.webcindario.com/TIC_VE3.pdf) (11 de mayo)

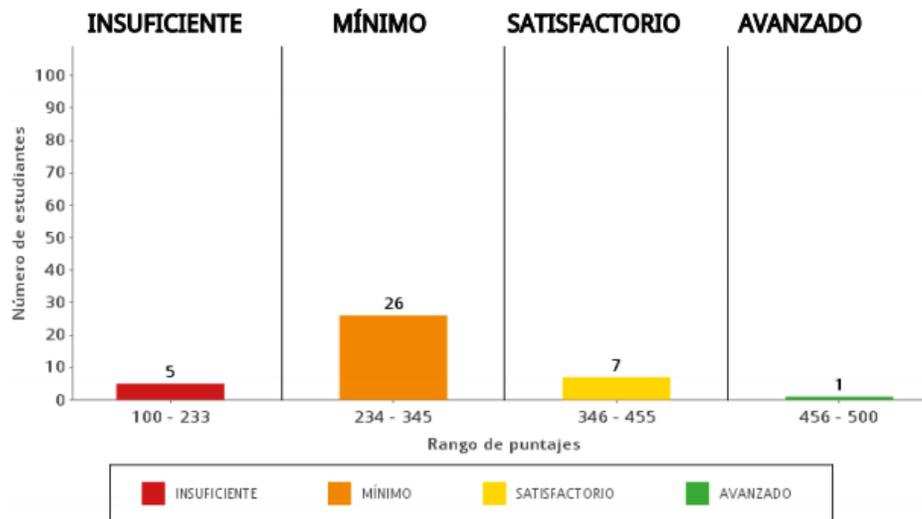
- Roldan T. (2008), *Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la educación primaria*; Cuba, 2008
- Ruiz López N. and Atrio Cerezo S. (2013). *Influence of digital proficiency in geometric skills acquisition in GeoGebra*; Madrid: Universidad Autónoma,.
- Sánchez Álvarez, I. y López Ares, S. (2014) *Didáctica de la programación lineal con ordenador para estudiantes de administración y dirección de empresas*. *Revista de Enseñanza Universitaria* 1999, N° 14-15, 129-138.
- Santa Ramírez, Z. M. (2011). *La Elipse como lugar Geométrico a través de la Geometría del doblado del papel en el contexto de Van Hiele*. Tesis de maestría. Universidad de Antioquia. Medellín.
- Thomas, J.W. (2015). *Project based learning overview*. Novato, CA: Buck Institute for Education. Retrieved July 10, 2002, from <http://www.bie.org/pbl/overview/index.html>  
versión en español [www.eduteka.org/AprendizajePorProyectos.php](http://www.eduteka.org/AprendizajePorProyectos.php)
- Vargas Vargas G. y Gamboa Araya, R. (2013). *Revista Uniciencia* Vol. 27, No. 1, [74-94]. Enero – junio 2013. Disponible en <http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia>
- Vásquez, S. (2014). *El concepto de función a través de la historia*. *Revista Iberoamericana de Educación (Unión)*, 1(16), 141-155.
- Wong, M. M-H. (2015). *The relations among causality orientations, academic experience, academic performance, and academic commitment*. *Personality and Social Psychology Bulletin*, 26, 315-326.

## Anexos

### Anexo 1. Pruebas saber

#### Resultados de noveno grado en el área de matemáticas

#### Distribución de los estudiantes según niveles de desempeño en matemáticas, noveno grado



Icfes interactivo (2016)

## Anexo 2. Encuesta a estudiantes



MATEMATICAS – GRADO NOVENO. CODEMA I.E.D  
CONSTRUYENDO UNA COMUNIDAD CRÍTICA, JUSTA Y TOLERANTE

**Universidad de la Sabana**  
**Maestría en Proyectos Educativos Mediados por TIC**

**Objetivo:** Analizar la resolución de problemas con la función lineal utilizando el programa Geogebra con el fin de contribuir con el aprendizaje de los estudiantes del grado noveno de la I.E.D Codema.

Por favor responda de acuerdo a su punto de vista.

**1. ¿Cuándo usted resuelve problemas de funciones lineales presenta dificultad de comprensión y dominio?**

a. Siempre \_\_\_ b. A veces \_\_\_ c. Nunca \_\_\_

**2. ¿Cuándo considera usted que el planteamiento de un problema de funciones lineales es adecuado?**

- a. Cuando se tiene todos los datos del problema
- b. Cuando se tiene claridad en el planteamiento del problema
- c. Cuando se facilita la identificación de la incógnita y los datos para encontrarla

**3. ¿Qué pasos ejecuta usted cuando resuelve un problema de funciones lineales?**

- a. Leer detenidamente el problema, analizarlo y resolver hallando el valor desconocido
- b. Identificar los datos y la incógnita, aplicar formulas despejes y transformaciones
- c. comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y mirar hacia atrás

**4. ¿Con qué frecuencia el docente de matemáticas usa la resolución de problemas durante el desarrollo del contenido de funciones lineales?**

a. Siempre \_\_\_ b. A veces \_\_\_ c. Nunca \_\_\_

**5. ¿Con qué frecuencia la docente de matemáticas promueve la construcción de un plan que le ayude a la resolución de problemas de funciones lineales?**

a. Siempre \_\_\_ b. A veces \_\_\_ c. Nunca \_\_\_

Observaciones:

---



---

Gracias

### Anexo 3. Consentimiento informado

**Universidad de la Sabana**  
**Facultad de Tecnologías para la Academia**  
**Consentimiento Informado**

Bogotá, julio de 2014

Estimado padre de familia:

Mediante este documento solicito comedidamente su consentimiento para que su hijo (a) participe en el trabajo de investigación, realizado por el Licenciado *Edgar Gallo Duarte* como requisito para optar por el título de Magister Proyectos Pedagógicos Mediados por TIC en la Universidad de la Sabana, durante los años 2014 , 2015 y 2016 o el tiempo que pueda durar el proyecto.

**Objetivo:** Analizar la resolución de problemas con la función lineal utilizando el programa Geogebra con el fin de contribuir con el aprendizaje de los estudiantes del grado noveno de la I.E.D Codema.

Las pruebas, actividades realizadas, videos, fotografías, entrevista y demás información generada del mismo, serán tomadas para uso pedagógico exclusivamente y que se encuentre relacionado con el estudio citado.

Agradezco su colaboración.  
Doy mi consentimiento.

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: \_\_\_\_\_

NOMBRE DEL PADRE DE FAMILIA \_\_\_\_\_

FIRMA \_\_\_\_\_ C.C \_\_\_\_\_

## Anexo 4. Entrevista a docente de matemáticas



MATEMATICAS – GRADO NOVENO. CODEMA I.E.D  
CONSTRUYENDO UNA COMUNIDAD CRÍTICA, JUSTA Y TOLERANTE

### Universidad de la Sabana

#### Maestría en Proyectos Educativos Mediados por TIC

**Objetivo:** Analizar la resolución de problemas con la función lineal utilizando el programa Geogebra con el fin de contribuir con el aprendizaje de los estudiantes del grado noveno de la I.E.D Codema.

Por favor responda de acuerdo a su punto de vista.

**1. ¿Qué es para usted un problema matemático?**

- a. La búsqueda de un dato desconocido
- b. Una situación que requiere una solución
- c. La aplicación de operaciones matemáticas
- d. Una ecuación donde no se conoce un valor

**2. ¿Qué elementos encuentra usted en un problema matemático?**

- a. Datos, despejes, transformaciones
- b. Datos y una incógnita para encontrar
- c. Signos matemáticos y fórmulas
- d. Una serie de ejercicios

**3. ¿Cuándo considera usted que el planteamiento de un problema de funciones lineales es adecuado?**

- a. Cuando se tiene todos los datos del problema
- b. Cuando se tiene claridad en el planeamiento del problema
- c. Cuando se facilita la identificación de la incógnita y los datos para encontrarla

**4. ¿Qué pasos ejecuta usted cuando resuelve un problema de funciones lineales?**

- a. Leer detenidamente el problema, analizarlo y resolver hallando el valor desconocido
- b. Identificar los datos y la incógnita, aplicar formulas despejes y transformaciones
- c. Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y mirar hacia atrás

**5. ¿Con qué frecuencia usa la resolución de problemas durante el desarrollo del**

**contenido de funciones lineales?**

a. Siempre \_\_\_\_                      b. A veces \_\_\_\_                      c. Nunca \_\_\_\_

**6. ¿Con qué frecuencia usted promueve la construcción de un plan que le ayude a los estudiantes en la resolución de problemas de funciones lineales?**

a. Siempre \_\_\_\_                      b. A veces \_\_\_\_                      c. Nunca \_\_\_\_

**7. ¿Con qué frecuencia usted comprueba los pasos que aplican los estudiantes en la resolución de problemas de funciones lineales y cuadráticas?**

a. Siempre \_\_\_\_                      b. A veces \_\_\_\_                      c. Nunca \_\_\_\_

**8. ¿Cuándo aplica usted la resolución de problemas de funciones lineales y cuadráticas evidencia dificultad de comprensión y dominio en los estudiantes?**

a. Siempre \_\_\_\_                      b. A veces \_\_\_\_                      c. Nunca \_\_\_\_

Observaciones:

---

---

Gracias

## Anexo 5. Prueba de entrada - diagnóstico



MATEMÁTICAS – GRADO NOVENO. CODEMA I.E.D  
CONSTRUYENDO UNA COMUNIDAD CRÍTICA, JUSTA Y TOLERANTE

### Universidad de la Sabana Maestría en Proyectos Educativos Mediados por TIC

**Objetivo:** analizar el tratamiento y conversión de representaciones que hacen los estudiantes sobre el concepto función lineal. (Conversiones textuales a gráficas).

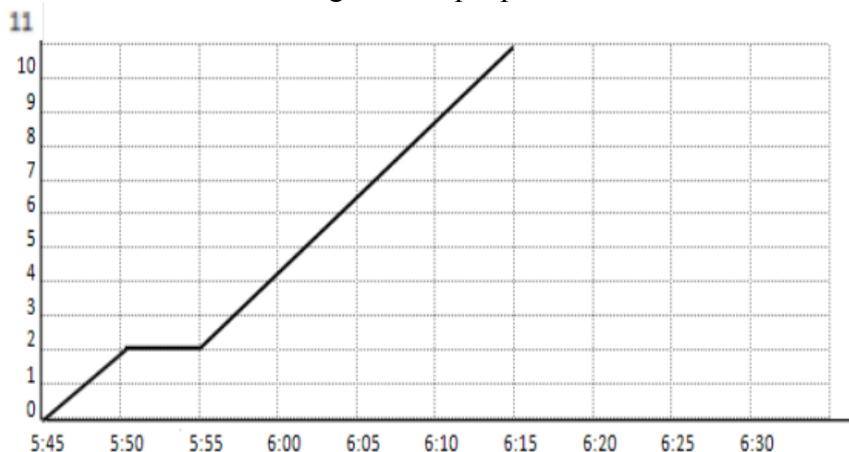
**Camino al colegio.** Vanessa, Fabián, Paula y Santiago, viven en una urbanización cercana, cuando van al Colegio, suelen hacerlo en bicicleta. La primera clase empieza a las **6:30 am**, lo cual significa que deben salir de casa alrededor de las **5:45 am**. Porque llegar tarde implicaría un fuerte llamado de atención, ya que la puntualidad es una característica importante para el buen desempeño escolar. La distancia de la urbanización al colegio es de **11 km**. Cada Uno de ellos nos contó su recorrido:

**Vanessa** dice: Yo siempre salgo con mucha tranquilidad y despacio, Porque a esas horas de la mañana no te puedes apresurar... además todavía está oscuro. Ya en el camino empiezo a pedalear más de prisa, porque no me gusta llegar tarde

**Fabián** dice: Esta mañana me fui para el Colegio en la bicicleta bien rápido, pero en la mitad del camino ¡Se daña la cadena! Trate de organizarla pero no tenía herramientas y no se mucho de mecánica, así que me toco irme caminando, con mi bicicleta en la mano el resto del recorrido y lo peor es que llegué tarde al Colegio

**Paula** dice: Yo Salí de mi casa a la misma hora que todos, a una misma velocidad en todo el recorrido, ni muy rápido ni muy despacio y eso si no me entretuve con nada y lo mejor de todo llegué un poquito más temprano para prepararme para la clase de Matemáticas.

**Santiago.** Escribe la historia... Imagínate lo que pudo haber dicho



**Actividad.** Cada estudiante debe graficar el recorrido de los estudiantes y explicar el paso a paso que utilizo para el desarrollo de la actividad

Fuente: Ospina García, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal*.

Nombre: \_\_\_\_\_ Código \_\_\_\_\_

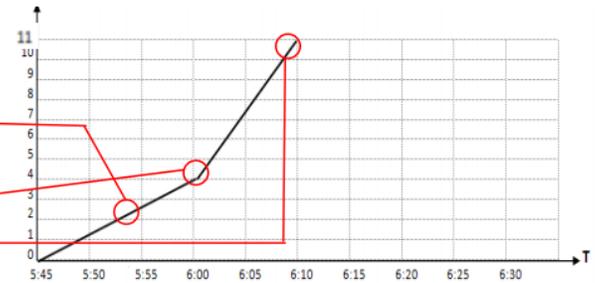
<b>Vanesa</b>	<b>Fabián</b>
<b>Paula</b>	<b>Santiago</b>

Relate el paso a paso para realizar la graficación o historia

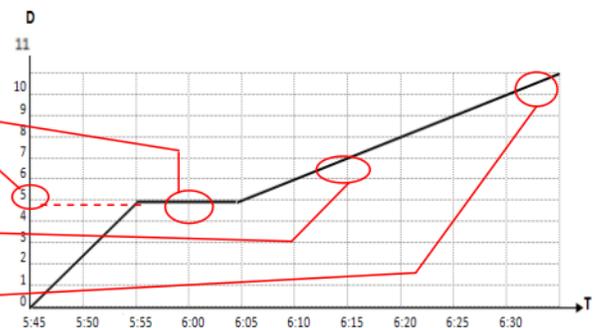
1	
2	
3	
4	

## Solución

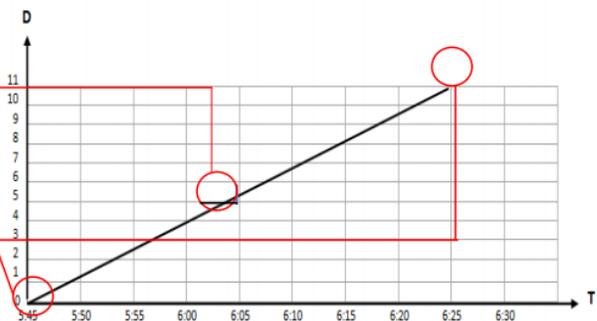
**Vanesa dice:** Yo siempre salgo con mucha tranquilidad y despacio, Porque a esas horas de la mañana no te puedes apresurar... además todavía está oscuro. Ya en el camino empiezo a pedalear más de prisa, porque no me gusta llegar tarde



**Fabián dice:** Esta mañana me fui para el Colegio en la bicicleta bien rápido, pero en la mitad del camino ¡Se daña la cadena! Trate de organizarla pero no tenía herramientas y no se mucho de mecánica, así que me tocó irme caminando con mi bicicleta en la mano el resto del recorrido y lo peor es que llegué tarde al Colegio



**Paula dice:** Yo Salí de mi casa a la misma hora que todos, a una misma velocidad en todo el recorrido, ni muy rápido ni muy despacio y eso si no me entretuve con nada y lo mejor de todo llegué un poquito más temprano para prepararme para la clase de Matemáticas.



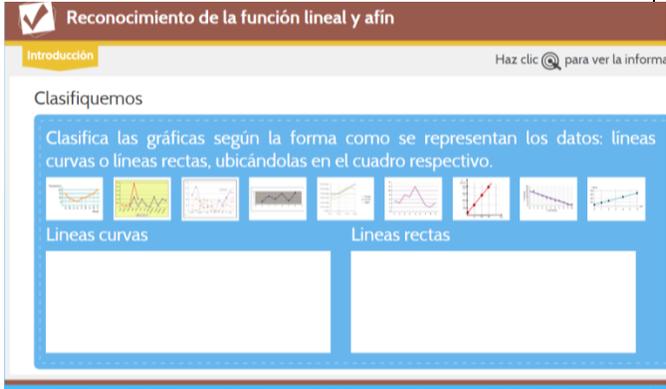
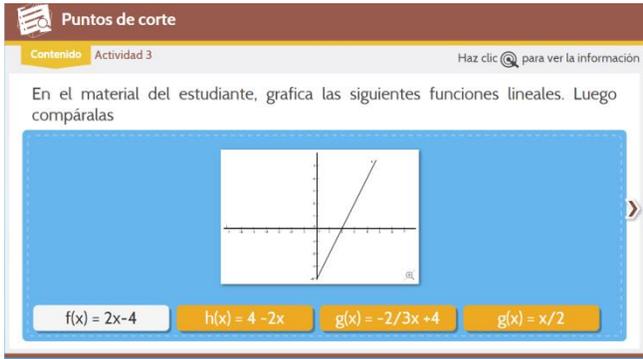
## Anexo 6. Secuencia didáctica

### Función lineal

<b>Objetivos de aprendizaje</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Describir los elementos y sus características, de la función lineal</li> <li>• Identifica componentes que conforman la línea recta, como representación gráfica de la función lineal</li> <li>• Usar los elementos de la expresión de la función lineal, para encontrar la ecuación de la recta.</li> <li>• Graficar la función lineal haciendo uso de Geogebra</li> <li>• Analizar y resolver problemas de función lineal teniendo en cuenta el método Pólya y hace uso de Geogebra</li> </ul>
<b>Habilidad/ conocimiento</b>	<p><b>Determina las características de una función lineal</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica las variables dependiente e independiente.</li> <li>• Identifica la expresión general de la función lineal como <math>y=mx + b</math>.</li> <li>• Reconoce las letras <math>x</math> e <math>y</math> como aquellas que representan las variables.</li> <li>• Reconoce lo que representan las letras <math>m</math> y <math>b</math> en la expresión <math>y=mx +b</math>.</li> <li>• Representa gráficamente la función lineal, en el plano cartesiano.</li> <li>• Reconoce la gráfica de la función lineal, como una línea recta</li> <li>• Describe procesos algebraicos que permiten encontrar los puntos de corte con los ejes del plano cartesiano</li> </ul> <p><b>Caracteriza la gráfica de la función lineal.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica los puntos en el plano cartesiano, con los cuales se forma la línea recta.</li> <li>• Reconoce la pendiente en la expresión algebraica <math>y=mx + b</math>, y lo que representa en la gráfica</li> <li>• Identifica en la expresión algebraica y en la gráfica, si una pendiente es positiva o negativa.</li> <li>• Encuentra la pendiente de una recta, usando los puntos que la conforman</li> <li>• Deduce la expresión que le permite encontrar la pendiente de una recta.</li> <li>• Reconoce la función constante, como aquella, cuya gráfica es una línea recta paralela al eje <math>x</math> del plano cartesiano.</li> </ul> <p><b>Reconocimiento de la ecuación de la recta.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica la expresión general de la función lineal como <math>y=mx + b</math>.</li> <li>• Usa el valor de la pendiente (<math>m</math>) y el valor del intersección con el eje “<math>y</math>” (<math>b</math>), para encontrar la ecuación de la recta.</li> <li>• Usa el valor de dos puntos o coordenadas para encontrar la ecuación de la recta</li> <li>• Describe la ecuación general de la recta (<math>Ax + By + C = 0</math>) por medio de la expresión de la función lineal <math>y = mx + b</math>.</li> </ul> <p>Soluciona problemas de función lineal</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Grafica la función lineal haciendo uso de Geogebra</li> <li>• Analiza y resuelve problemas de función lineal teniendo en cuenta el método Pólya y hace uso de Geogebra</li> </ul>
<b>Estándares</b>	<p><b>Pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos</b></p> <p>Identifico relaciones entre propiedades de las ecuaciones</p> <p>Modelo situaciones de variación con funciones</p> <p>Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación</p>
<b>Flujo de aprendizaje</b>	<p>Introducción</p> <p>Objetivos</p>

	<p>Actividades</p> <p>Actividad 1. La función lineal, puntos de corte y pendiente</p> <p>Actividad 2. Geogebra software de apoyo</p> <p>Actividad 3. Graficación de la función lineal haciendo uso de Geogebra</p> <p>Actividad 4. Método Pólya para solución de problemas</p> <p>Actividad 5. Solución de problemas de función lineal</p> <p>Resumen</p> <p>Actividades de aprendizaje</p>
<b>Guía de valoración</b>	Se espera que el estudiante resuelva problemas a partir de la ecuación de la recta e identifique los elementos que la componen, a partir de los procedimientos trabajados haciendo uso de Geogebra
<b>Tiempo</b>	5 clases de dos horas cada una
<b>Recursos</b>	<p>Computadores</p> <p>Software Geogebra - videos - power point</p> <p>Fotocopias suministradas por docente con ejercicios a realizar (guías)</p> <p>Esferos - cuadernos borrador - lápiz</p> <p>Regla - escuadra</p> <p>Lista de link</p> <p>Bibliografía propuesta</p> <p>Tablero</p>
<b>Rol del docente</b>	Guía
<b>Rol del estudiante</b>	Activo
<b>Introducción</b>	El docente presenta el tema a trabajar, se socializan los objetivos y se dan a conocer los recursos interactivos a usar.
<b>Desarrollo</b>	<p>Motivación.</p> <p>Normas para el desarrollo de clase en el salón de informática</p> <p>Presentación de la actividad a realizar</p> <p>Exposición del tema (uso de diapositivas, videos o tablero de acuerdo a la temática).</p> <p>Desarrollo de la actividad planeada.</p> <p>Evaluación: se evalúa el proceso realizado con una ficha de seguimiento por estudiante.</p>

### Actividad 1. La función lineal puntos de corte y pendiente

Desarrollo	Evidencia
<p>El docente hace una exposición haciendo uso de diapositivas power point y videos sobre el tema. (Anexo 7-8)</p> <p><b>Conociendo las funciones lineales:</b> el docente presenta el recurso interactivo en el cual presenta varios ejemplos de gráficas de funciones lineales la intención es que algunas pasen por el centro y otras no, el docente pregunta al estudiante:</p> <p>¿Qué tienen en común?                  ¿En qué se diferencian?</p> <p>Además de que observen las gráficas, la idea es que también se evidencien la función que representa la gráfica.</p> <p>Después de socializar las respuestas con los estudiantes, se les indica que todas son funciones lineales, pero en particular las que no pasan por el origen reciben el nombre de función lineal.</p> <p>Luego el recurso permite que los estudiantes concluyan que las funciones lineales son de la forma <math>y=mx+b</math>, pero las funciones afín son aquellas que no pasan por el punto (0,0), es decir que b es diferente cero.</p>	 <p>Fuente: <a href="http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/G_9/M/M_G09_U03_L05/M/M_G09_U03_L05/M_G09_U03_L05_01_01.html">http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/G_9/M/M_G09_U03_L05/M/M_G09_U03_L05/M_G09_U03_L05_01_01.html</a></p>
<p><b>Puntos de corte</b></p> <p>Para la siguiente actividad el docente pide a los estudiantes que realicen la gráfica de las siguientes funciones lineales haciendo uso de lápiz y papel.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>f(x) = 2x-4</math></li> <li><math>h(x) = 4 -2x</math></li> <li><math>g(x) = -2/3x +4</math></li> <li><math>g(x) = x/2</math></li> </ol> <p><math>y=2x-4</math></p> <p>Se pregunta</p> <p>¿Qué valor toma x cuando y es 0?                  ¿Qué valor toma y cuando x es 0?                  ¿Qué tienen de particular esos puntos?</p> <p>Los estudiantes evidencien que son los puntos de corte. Luego se pide que realice los pasos algebraicos que debe realizar para encontrar esos puntos, luego el recurso muestra la solución.</p>	 <p>Fuente: <a href="http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/G_9/M/M_G09_U03_L05/M/M_G09_U03_L05/M_G09_U03_L05_03_01.html">http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/G_9/M/M_G09_U03_L05/M/M_G09_U03_L05/M_G09_U03_L05_03_01.html</a></p>

**Pendiente.**

**Haciendo uso del recurso interactivo se analiza la pendiente de las funciones y se realizan ejercicios.**

Hallar la ecuación de la recta

$$y = mx + b$$

Si  $m=3$  y  $b= 10$ . Rta:  $y = 3x+10$

Si  $m= -1/2$  y  $b =4$  Rta:  $y= -1/2 x +4$

Ejercicios  $m=3$  y  $b=-3/2$ ;  $m = 8$  y  $b =-0,3$ . El recurso valida las respuestas.

**Tarea**

En cada caso halle la ecuación de la recta y realice la respectiva gráfica.

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, - 4) y que tiene una pendiente de  $- 1/3$
2. Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos P(1, 2) y Q(3, 4)
3. Determina la ecuación general de la recta de pendiente  $-4$  y que pasa por el punto (5,  $-3$ )

Halla la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos en cada caso:

1. (-2,5) y (-7,5)
2. (5,-1) y (-5,6)
3. (3,2) y (5,4)

**La pendiente**

Contenido Actividad 4 Haz clic  para ver la informa

Lee con atención la siguiente situación y completa los datos



José paga una cantidad fija mensual más una tarifa por hora por el servicio de Internet, debido que la tarifa por hora es constante, se trata de una relación lineal.

Para encontrar la tasa en dólares por hora, divide el cambio de tarifa entre el cambio de tiempo para dos meses. Usando los valores de octubre y noviembre, José tiene:

$(28,55 - 19,70) / (8-5) = \square / \square = \square$

De modo que tasa es \$  por hora Validar

**Fuente**

[http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/na\\_spublic/ContenidosAprender/G\\_9/M/M\\_G09\\_U03\\_L05/M/M\\_G09\\_U03\\_L05/M\\_G09\\_U03\\_L05\\_03\\_03.html](http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/na_spublic/ContenidosAprender/G_9/M/M_G09_U03_L05/M/M_G09_U03_L05/M_G09_U03_L05_03_03.html)

## Tarea



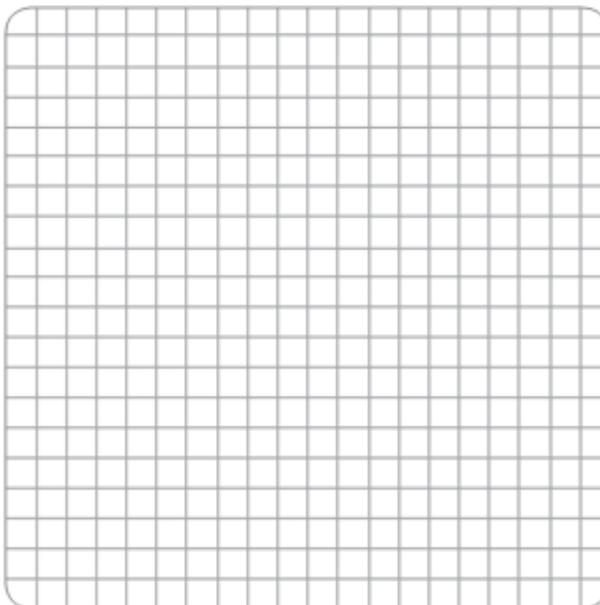
MATEMATICAS - GRADO NOVENO. CODEMA I.E.D  
CONSTRUYENDO UNA COMUNIDAD CRÍTICA, JUSTA Y TOLERANTE

---

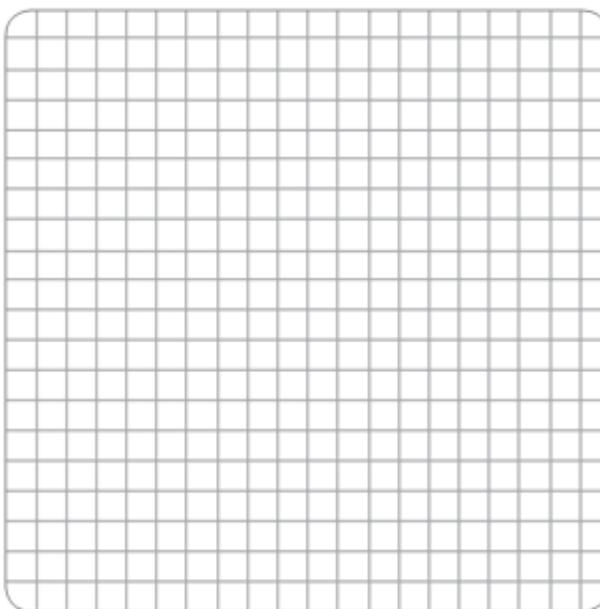
**Punto de Corte**

Grafica las siguientes funciones lineales y compáralas con el recurso digita

$$- f(x) = 2x - 4$$

$$- h(x) = 4 - 2x$$



### Actividad pendiente

Lee con atención la siguiente situación y completa los datos



José paga una cantidad fija mensual más una tarifa por hora por el servicio de internet, debido que la tarifa por hora es constante, se trata de una relación lineal.

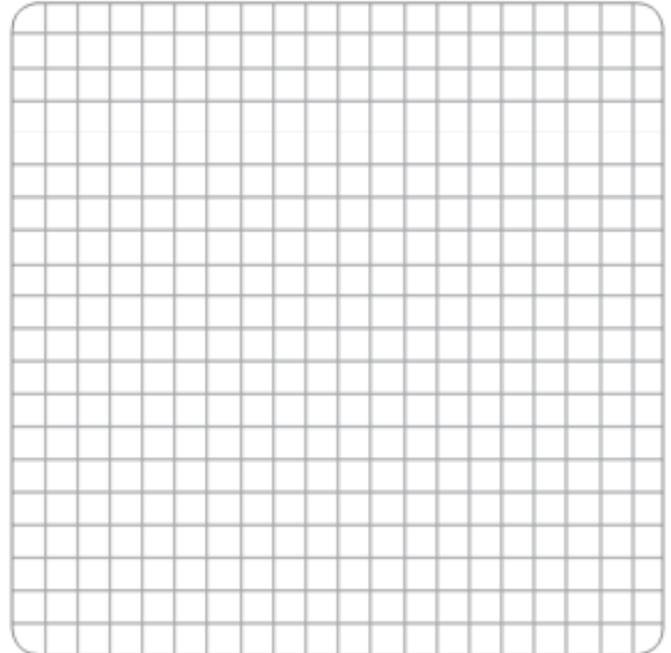
Para encontrar la tasa en dólares por hora, divide el cambio de tarifa entre cambio de tiempo para dos meses. Usando los valores de Octubre y Noviembre, José tiene:

$$\frac{28,55 - 19,70}{8 - 5} = \text{[red box]} = \text{[red box]}$$

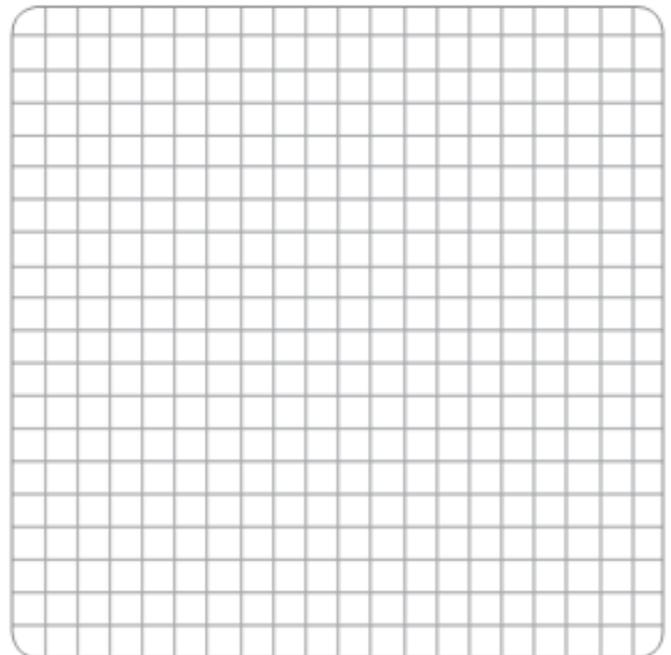
De modo que la tasa es \$ [red box] por hora



1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A(2, -4)$  y que tiene una pendiente de  $A(2, -4)$

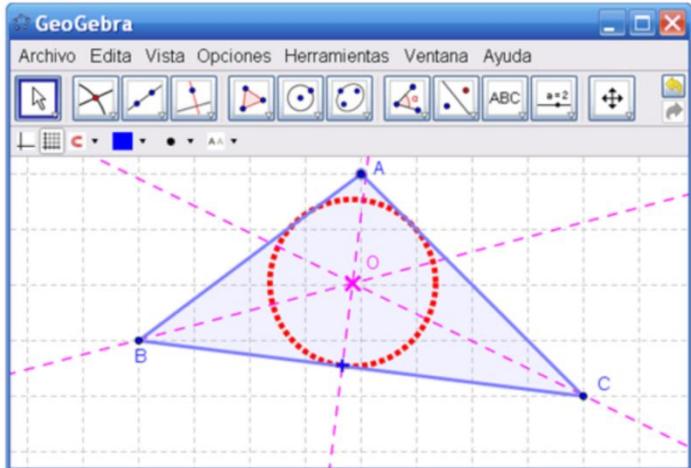


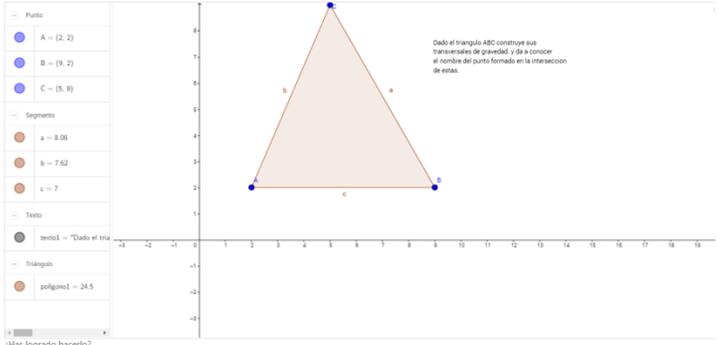
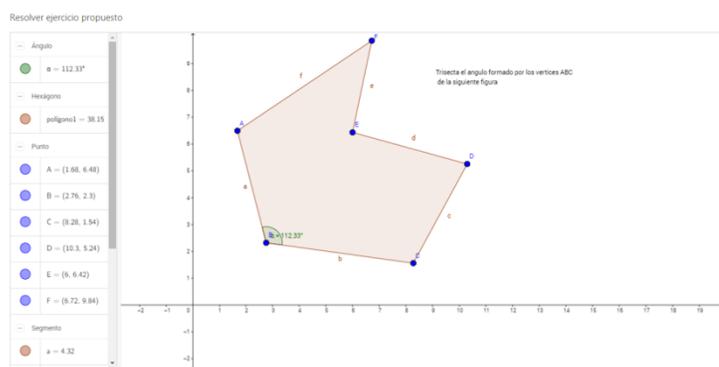
2. Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos  $P(1, 2)$  y  $Q(3, 4)$



## Actividad 2. Geogebra software de apoyo

Desarrollo	Evidencia						
<p>Curso Geogebra</p> <p>Los estudiantes son llevados a la sala de informática y se procede a enseñarles tutoriales de Geogebra para que aprendan a utilizarlo.</p> <p>El docente pasa por cada puesto y despeja dudas de la información de los tutoriales.</p> <p>Con los tutoriales los estudiantes aprenden a instalar Geogebra, conocer ventanas, barras de acceso, construcciones simples, botones, además de:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Realizar gráficos de puntos en el plano.</li> <li>2. Realizar operaciones algebraicas para hallar el conjunto solución.</li> <li>3. Representar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales en el plano.</li> <li>4. Representar puntos en la ventana</li> <li>5. Representar rectas en la ventana</li> <li>6. Determinar las coordenadas de ecuaciones.</li> </ol>	<p>Videos</p> <p><b>Curso Geogebra - 01 Instalar Geogebra</b>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=a9Hw1VT-YxY&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg">https://www.youtube.com/watch?v=a9Hw1VT-YxY&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg</a></p> <p><b>Curso Geogebra - 02 Vistazo rápido</b>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=FZfj6L7jNQo&amp;index=2&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg">https://www.youtube.com/watch?v=FZfj6L7jNQo&amp;index=2&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg</a></p> <p><b>Curso Geogebra - 03 Construcción simple</b>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=5cAmWPZNS2Y&amp;index=3&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg">https://www.youtube.com/watch?v=5cAmWPZNS2Y&amp;index=3&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg</a></p> <p><b>Curso Geogebra - 04 Construcción con la barra de entrada</b>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=wIxyzTJGA&amp;index=4&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg">https://www.youtube.com/watch?v=wIxyzTJGA&amp;index=4&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg</a></p> <p><b>Curso Geogebra - 05 Deslizadores y rastros</b>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=ewj_bsWGcNI&amp;index=5&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg">https://www.youtube.com/watch?v=ewj_bsWGcNI&amp;index=5&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg</a></p> <p><b>Curso Geogebra - 06 CAS (parte 1) Botones</b>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=dYgRdkTBKfQ&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg&amp;index=6">https://www.youtube.com/watch?v=dYgRdkTBKfQ&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg&amp;index=6</a></p> <p><b>Curso Geogebra - 07 CAS (parte2) Polinomios y ecuaciones</b>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=G20x99dkvt4&amp;index=7&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg">https://www.youtube.com/watch?v=G20x99dkvt4&amp;index=7&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg</a></p> <p><b>Curso Geogebra - 08 CAS (parte 3) Sistemas de ecuaciones</b>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=Xhmv3OC2NFE&amp;index=8&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg">https://www.youtube.com/watch?v=Xhmv3OC2NFE&amp;index=8&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg</a></p> <p><b>Cómo guardar una imagen hecha con Geogebra</b>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=W4-ts-xBS5c&amp;index=10&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg">https://www.youtube.com/watch?v=W4-ts-xBS5c&amp;index=10&amp;list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAAlg5Tg</a></p>						
<p><b>Graficación de funciones lineales en Geogebra</b></p> <p>Se presentan videos para que los estudiantes aprendan a graficar funciones.</p>	<p><a href="https://www.youtube.com/watch?v=pGUIbeIx6Ak&amp;t=127s">https://www.youtube.com/watch?v=pGUIbeIx6Ak&amp;t=127s</a>            Graficación función <a href="https://www.youtube.com/watch?v=8NfT-R508nE">https://www.youtube.com/watch?v=8NfT-R508nE</a>  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=3QnZx55bXRI">https://www.youtube.com/watch?v=3QnZx55bXRI</a></p>						
<p><b>Links con actividades desarrolladas en Geogebra</b></p> <p>Los estudiantes mediante la red investigan más sobre temas que les llaman la atención para desarrollar con Geogebra.</p>	<p><a href="https://app.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf">https://app.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf</a>  <a href="https://wiki.geogebra.org/en/Tutorials">https://wiki.geogebra.org/en/Tutorials</a>  <a href="https://margaritaapplets.jimdo.com/u1-geogebra/">https://margaritaapplets.jimdo.com/u1-geogebra/</a>  <a href="https://www.geogebra.org">https://www.geogebra.org</a></p>						
<p><b>Actividad práctica</b></p> <p>Construir un triángulo y la circunferencia intermedia entre la inscrita y la que lo circunscribe</p> <p><b>1. Proceso con el ratón</b></p>	<p><b>Pasos:</b></p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;"></td> <td>Seleccionar de la barra de herramientas, la de "Polígono". Ahora, un <i>click</i> tras otro en la <b>Vista Gráfica</b>, permite crear los vértices <i>A</i>, <i>B</i>, y <i>C</i> de un triángulo que se cierra reiterando un <i>click</i> sobre <i>A</i>.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;"></td> <td>Elegir la "Bisectriz": (un <i>click</i> sobre el triangulito inferior izquierdo que aparece en el borde de la cuarta caja de herramientas, despliega todas las disponibles y activar la cuarta, la <i>Bisectriz</i>. Para trazar las de un par de ángulos, basta con indicar los tres puntos que los delimitan, en sentido anti-horario con el vértice entre sendos laterales: <i>B</i>, <i>C</i>, <i>A</i> para uno y <i>A</i>, <i>B</i>, <i>C</i> para el otro.</td> </tr> </tbody> </table>	1		Seleccionar de la barra de herramientas, la de "Polígono". Ahora, un <i>click</i> tras otro en la <b>Vista Gráfica</b> , permite crear los vértices <i>A</i> , <i>B</i> , y <i>C</i> de un triángulo que se cierra reiterando un <i>click</i> sobre <i>A</i> .	2		Elegir la "Bisectriz": (un <i>click</i> sobre el triangulito inferior izquierdo que aparece en el borde de la cuarta caja de herramientas, despliega todas las disponibles y activar la cuarta, la <i>Bisectriz</i> . Para trazar las de un par de ángulos, basta con indicar los tres puntos que los delimitan, en sentido anti-horario con el vértice entre sendos laterales: <i>B</i> , <i>C</i> , <i>A</i> para uno y <i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> para el otro.
1		Seleccionar de la barra de herramientas, la de "Polígono". Ahora, un <i>click</i> tras otro en la <b>Vista Gráfica</b> , permite crear los vértices <i>A</i> , <i>B</i> , y <i>C</i> de un triángulo que se cierra reiterando un <i>click</i> sobre <i>A</i> .					
2		Elegir la "Bisectriz": (un <i>click</i> sobre el triangulito inferior izquierdo que aparece en el borde de la cuarta caja de herramientas, despliega todas las disponibles y activar la cuarta, la <i>Bisectriz</i> . Para trazar las de un par de ángulos, basta con indicar los tres puntos que los delimitan, en sentido anti-horario con el vértice entre sendos laterales: <i>B</i> , <i>C</i> , <i>A</i> para uno y <i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> para el otro.					

Desarrollo	Evidencia															
	<table border="1"> <tr> <td data-bbox="699 224 740 331">3</td> <td data-bbox="740 224 813 331"></td> <td data-bbox="813 224 1403 331">Con la herramienta "<i>Intersección de Dos Objetos</i>", indicando ambas bisectrices, queda establecido el punto del centro de la circunferencia buscada. Para llamarlo "<i>O</i>", basta con un clic derecho sobre el punto (Mac OS: ctrl-clic) y elegir "<i>Renombra</i>" del menú contextual desplegado.</td> </tr> <tr> <td data-bbox="699 331 740 384">4</td> <td data-bbox="740 331 813 384"></td> <td data-bbox="813 331 1403 384">Se traza la "<i>Recta Perpendicular</i>" desde "<i>O</i>" al segmento <i>a</i> (del lado que une <i>a B</i> con <i>C</i>).</td> </tr> <tr> <td data-bbox="699 384 740 491">5</td> <td data-bbox="740 384 813 491"></td> <td data-bbox="813 384 1403 491">Se vuelve a emplear la herramienta "<i>Intersección de Dos Objetos</i>" para que quede establecido el de la perpendicular con el lado <i>a</i>, "<i>E</i>". <u>Atención</u>: Es importante distinguir que lo que se interseca sea la perpendicular con el lado, no con el triángulo que es una alternativa también posible pero errónea en este caso.</td> </tr> <tr> <td data-bbox="699 491 740 564">6</td> <td data-bbox="740 491 813 564"></td> <td data-bbox="813 491 1403 564">Con "<i>Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos</i>" se completa la construcción con un clic en el punto centro <i>O</i> y otro en el de intersección recientemente creado, "<i>E</i>".</td> </tr> <tr> <td data-bbox="699 564 740 672">7</td> <td data-bbox="740 564 813 672"></td> <td data-bbox="813 564 1403 672">Con "<i>Elige y Mueve</i>" se puede emplear el ratón o <i>mouse</i> para desplazar los vértices del triángulo y notar como toda la construcción se ajusta dinámicamente a los cambios, manteniendo las relaciones establecidas que dan lugar a la circunferencia correspondiente.</td> </tr> </table> 	3		Con la herramienta " <i>Intersección de Dos Objetos</i> ", indicando ambas bisectrices, queda establecido el punto del centro de la circunferencia buscada. Para llamarlo " <i>O</i> ", basta con un clic derecho sobre el punto (Mac OS: ctrl-clic) y elegir " <i>Renombra</i> " del menú contextual desplegado.	4		Se traza la " <i>Recta Perpendicular</i> " desde " <i>O</i> " al segmento <i>a</i> (del lado que une <i>a B</i> con <i>C</i> ).	5		Se vuelve a emplear la herramienta " <i>Intersección de Dos Objetos</i> " para que quede establecido el de la perpendicular con el lado <i>a</i> , " <i>E</i> ". <u>Atención</u> : Es importante distinguir que lo que se interseca sea la perpendicular con el lado, no con el triángulo que es una alternativa también posible pero errónea en este caso.	6		Con " <i>Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos</i> " se completa la construcción con un clic en el punto centro <i>O</i> y otro en el de intersección recientemente creado, " <i>E</i> ".	7		Con " <i>Elige y Mueve</i> " se puede emplear el ratón o <i>mouse</i> para desplazar los vértices del triángulo y notar como toda la construcción se ajusta dinámicamente a los cambios, manteniendo las relaciones establecidas que dan lugar a la circunferencia correspondiente.
3		Con la herramienta " <i>Intersección de Dos Objetos</i> ", indicando ambas bisectrices, queda establecido el punto del centro de la circunferencia buscada. Para llamarlo " <i>O</i> ", basta con un clic derecho sobre el punto (Mac OS: ctrl-clic) y elegir " <i>Renombra</i> " del menú contextual desplegado.														
4		Se traza la " <i>Recta Perpendicular</i> " desde " <i>O</i> " al segmento <i>a</i> (del lado que une <i>a B</i> con <i>C</i> ).														
5		Se vuelve a emplear la herramienta " <i>Intersección de Dos Objetos</i> " para que quede establecido el de la perpendicular con el lado <i>a</i> , " <i>E</i> ". <u>Atención</u> : Es importante distinguir que lo que se interseca sea la perpendicular con el lado, no con el triángulo que es una alternativa también posible pero errónea en este caso.														
6		Con " <i>Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos</i> " se completa la construcción con un clic en el punto centro <i>O</i> y otro en el de intersección recientemente creado, " <i>E</i> ".														
7		Con " <i>Elige y Mueve</i> " se puede emplear el ratón o <i>mouse</i> para desplazar los vértices del triángulo y notar como toda la construcción se ajusta dinámicamente a los cambios, manteniendo las relaciones establecidas que dan lugar a la circunferencia correspondiente.														
<p><b>2 Proceso con barra de entrada</b>                  Se abre una nueva hoja de trabajo (Archivo – Nuevo) e introducir los siguientes comandos en la Barra de Entrada (al pie de la pantalla), pulsando Enter (Intro en algunos teclados) al final de cada línea.                  A = (2, 1)                  B = (12, 5)                  C = (9, 11)                  Polígono[A, B, C]                  Circunferencia inscrita[A, B, C]                  b_a = Bisectriz [A, B, C]                  b_b = Bisectriz [B, C, A]                  M = Interseca [b_a, b_b]</p>																

Desarrollo	Evidencia
<p>Construcción de rectas            Ingresa al link <a href="https://www.geogebra.org/m/2187647">https://www.geogebra.org/m/2187647</a> y modifica los datos. Observa lo que sucede.</p>	 <p>¡Has logrado hacerlo?</p>
<p>Construcción de rectas            Ingresa al link <a href="https://www.geogebra.org/m/2187675">https://www.geogebra.org/m/2187675</a> y analiza el proceso de construcción</p>	<p>Resolver ejercicio propuesto</p> 

**Tarea**

MATEMATICAS – GRADO NOVENO. CODEMA I.E.D  
CONSTRUYENDO UNA COMUNIDAD CRÍTICA, JUSTA Y TOLERANTE

**Actividad n° 1**

- 1) Colocar la cuadrícula en la vista gráfica.
- 2) A través de la barra de herramientas, marcar los puntos A(-2,4), B(2,3), C(-2,2) y D(1,2).
- 3) Unir los cuatro puntos utilizando segmentos. ¿Qué polígono me queda determinado?-----  
-----
- 4) Analizar los objetos dependientes en la vista algebraica: ¿Qué representan las letras minúsculas?-- ----- ¿Qué significan los valores numéricos?-----  
-----
- 5) Mover el punto D a otra posición ¿Qué se observa en la vista algebraica?-----  
-----
- 6) Insertar la imagen creada en Geogebra.

**Actividad n° 2**

- 1) Trabajar en una hoja nueva.
- 2) A través de la barra de entradas, marcar los puntos A (-3,0), B (-1,3), C (4,3) y D (4,-1).
- 3) Trazar rectas que pasen por dichos puntos.
- 4) Analizar los objetos dependientes en la vista algebraica, y responder:  
¿Qué representan las letras minúsculas?-----  
La letra “b” es la ecuación de una recta-----  
La letra “c” es la ecuación de una recta-----  
¿Cuál es la pendiente de la recta “a”? ¿Y la ordenada al origen?-----  
¿Cuál es la pendiente de la recta “d”? ¿Y la ordenada al origen?-----
- 5) Analizar las rectas graficadas y relacionar:  
Si la pendiente de la recta “d” es menor que cero, la recta es-----  
Si la pendiente de la recta “a” es mayor que cero, la recta es-----
- 6) Insertar la imagen creada en Geogebra.

**Actividad n° 3**

- 1) Trabajar en una hoja nueva.
- 2) Crear dos puntos, uno que pertenezca al segundo cuadrante y otro al tercer cuadrante.
- 3) Trazar una recta que pase por dichos puntos.
- 4) Marcar su pendiente (a través de la barra de herramientas), y completar: a-----0.
- 5) Crear dos puntos, uno que pertenezca al primer cuadrante y otro al cuarto cuadrante.
- 6) Trazar una recta que pase por dichos puntos.
- 7) Marcar su pendiente (a través de la barra de herramientas), y completar: a-----0.

8) Insertar la imagen creada en Geogebra.

#### **Actividad n° 4**

- 1) Trabajar en una hoja nueva.
- 2) Crear tres puntos no alineados.
- 3) Trazar una recta que pase por dos de esos tres puntos.
- 4) Utilizando la barra de herramientas, trazar una recta paralela a la recta creada que pase por el tercer punto.
- 5) Analizar los objetos dependientes en la vista algebraica, y responder:  
 En la recta a ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen?-----  
 En la recta b ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen?-----  
 ¿Qué condición deben cumplir ambas rectas para que sean paralelas?-----  
 -----
- 6) Editar las rectas para que queden del mismo color.
- 7) Crear otros tres puntos no alineados.
- 8) Trazar una recta que pase por dos de esos tres puntos.
- 9) Utilizando la barra de herramientas, trazar una recta perpendicular a la recta creada que pase por el tercer punto.
- 10) Analizar los objetos dependientes en la vista algebraica, y responder:  
 En la recta a ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen?-----  
 En la recta b ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen?-----  
 ¿Qué condición deben cumplir ambas rectas para que sean perpendiculares?-----  
 -----
- 11) Insertar la imagen creada en Geogebra.

#### **Actividad n° 5**

- 1) Trabajar en una hoja nueva.
  - 2) Crear una recta y un punto no perteneciente a ella.
  - 3) Calcular la distancia entre dicho punto y la recta. Anotar los comandos utilizados.
  - 4) Insertar la imagen creada en Geogebra.
- Los comandos utilizados son:

---



---

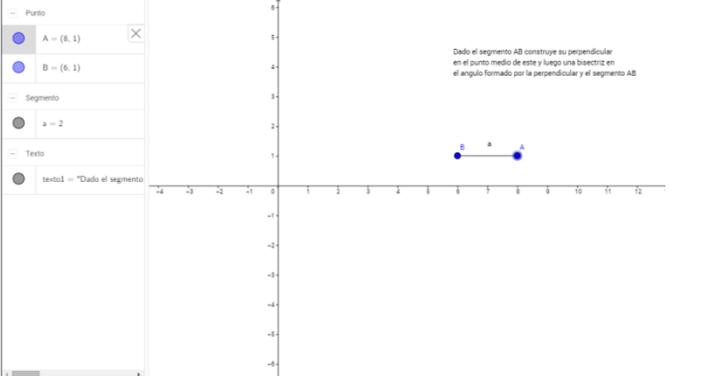
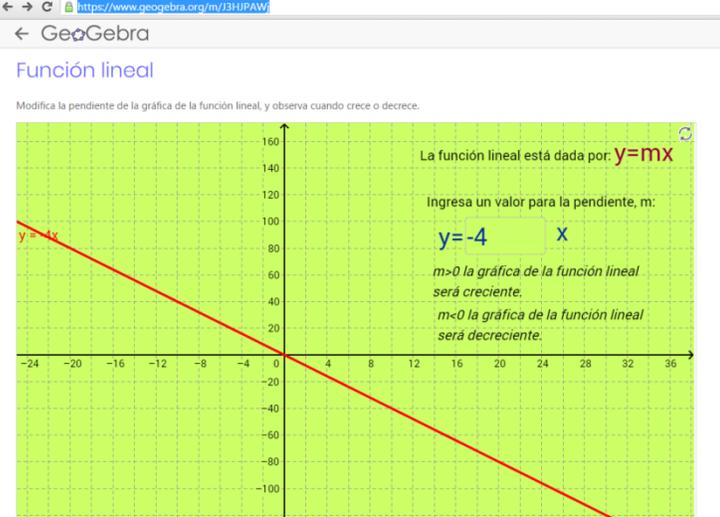
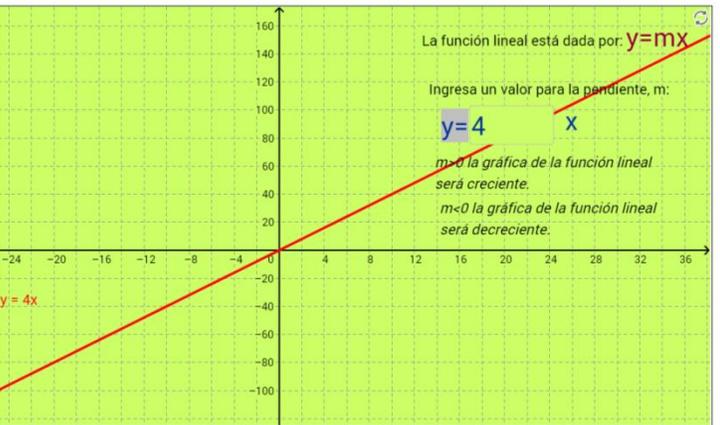


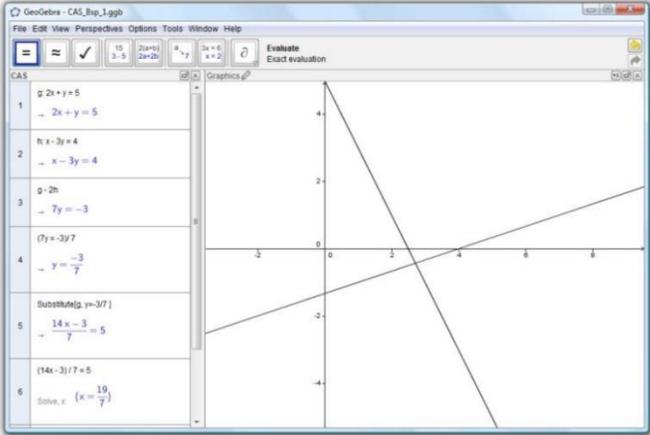
---



---

### Actividad 3. Graficación de la función lineal haciendo uso de geogebra

Desarrollo	Evidencia
<p><b>Graficaciones</b></p> <p>Construcción de rectas: visita el link <a href="https://www.geogebra.org/m/2187563">https://www.geogebra.org/m/2187563</a> Realiza cambios en los valores y observa lo que sucede.</p>	
<p>Graficar una función lineal Ir al link <a href="https://www.geogebra.org/m/J3HJPAWj">https://www.geogebra.org/m/J3HJPAWj</a> Realiza cambios en los valores y observa lo que sucede.</p>	
<p>Cambiar el valor de <math>y = -4</math> por valores positivos y negativos y observar lo que sucede. Identifica si es función creciente o decreciente.</p> <p><math>Y = 4</math></p>	

Desarrollo	Evidencia																		
<p>Realiza cambios en los valores y observa lo que sucede.</p>																			
<p>Resolución de un Sistema de Ecuaciones</p> <p><b>Objetivo</b> Resolver un sistema de ecuaciones lineales por método de sustitución</p> <p>Fuente:  <a href="https://app.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf">https://app.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf</a></p> <p>Pasos: Pulsando la flecha en el borde lateral derecho de la Vista Gráfica, en el menú desplegado de Apariencias, seleccionar X = CAS y Gráficos. La sigla CAS refiere a álgebra simbólica computacional.</p> <p>Es importante tener en cuenta que la Vista CAS de Cálculo Simbólico sólo está disponible a partir de GeoGebra 4.2 en adelante.</p> <p><b>Pasos de Construcción</b> Se deben anotar los siguientes comandos en las filas de la vista CAS, pulsando Enter (Intro en algunos teclados), después de cada línea.</p>	<table border="1" data-bbox="672 695 1377 1045"> <tbody> <tr> <td>1</td> <td><math>g: 2x + y = 5</math></td> <td>... para crear la recta g</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>h: x - 3y = 4</math></td> <td>... para crear la recta h</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>g - 2h</math></td> <td>Se restan las ecuaciones para eliminar la variable x</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>)</td> <td>Ingresa) para obtener el resultado de la línea previa. Ahora, basta con teclear /7 para obtener <math>(7y = -3)/7</math></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>Sustituye[g, <math>y = -3/7</math>]</td> <td>Sustituye y por <math>-3/7</math> en la primera ecuación g.</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td><math>3x = 6</math> <math>x = 2</math></td> <td>Clic sobre la salida <math>\frac{14x - 3}{7} = 5</math> y de la fila previa para copiarla en la activa actual. Ahora, un clic en la herramienta <i>Resuelve</i> para obtener la solución de x también.</td> </tr> </tbody> </table> 	1	$g: 2x + y = 5$	... para crear la recta g	2	$h: x - 3y = 4$	... para crear la recta h	3	$g - 2h$	Se restan las ecuaciones para eliminar la variable x	4	)	Ingresa) para obtener el resultado de la línea previa. Ahora, basta con teclear /7 para obtener $(7y = -3)/7$	5	Sustituye[g, $y = -3/7$ ]	Sustituye y por $-3/7$ en la primera ecuación g.	6	$3x = 6$ $x = 2$	Clic sobre la salida $\frac{14x - 3}{7} = 5$ y de la fila previa para copiarla en la activa actual. Ahora, un clic en la herramienta <i>Resuelve</i> para obtener la solución de x también.
1	$g: 2x + y = 5$	... para crear la recta g																	
2	$h: x - 3y = 4$	... para crear la recta h																	
3	$g - 2h$	Se restan las ecuaciones para eliminar la variable x																	
4	)	Ingresa) para obtener el resultado de la línea previa. Ahora, basta con teclear /7 para obtener $(7y = -3)/7$																	
5	Sustituye[g, $y = -3/7$ ]	Sustituye y por $-3/7$ en la primera ecuación g.																	
6	$3x = 6$ $x = 2$	Clic sobre la salida $\frac{14x - 3}{7} = 5$ y de la fila previa para copiarla en la activa actual. Ahora, un clic en la herramienta <i>Resuelve</i> para obtener la solución de x también.																	

## Tarea



MATEMATICAS – GRADO NOVENO. CODEMA I.E.D  
CONSTRUYENDO UNA COMUNIDAD CRÍTICA, JUSTA Y TOLERANTE

---

### Guía de trabajo

Nombre \_\_\_\_\_ Cód. \_\_\_\_\_

**Objetivo general:** Fomentar el uso de los recursos tecnológicos (Geogebra), en especial, el uso de las TIC en la resolución de problemas.

#### Ejercicio 1.

Empleando el programa de Geogebra realiza en color AZUL la gráfica que representa el perímetro de una circunferencia de radio  $r$  de radio 1, 2, 10, 100, etc.

Guardar las gráficas realizadas en una carpeta identificada con el nombre y apellido.

Haciendo uso del tablero se recuerda:

El perímetro de un círculo es una circunferencia y su longitud es:  $P = \pi \cdot 2r$

Donde,

$P$  es la longitud del perímetro

$\pi$  es la constante matemática pi ( $\pi = 3.1415\dots$ )

$r$  es la longitud del radio



### Ejercicio 2.

Realizar en color rojo la gráfica que representa el perímetro de un rectángulo de largo 3 cm. Proponer diferentes valores para graficar.

Se puede hacer uso de papel y lápiz para plantear la fórmula y realizar la tabla de valores.

1. ¿Por dónde pasa la recta en cada caso? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

2. ¿Corta el eje X o el eje Y? \_\_\_\_\_

3. ¿Es creciente o decreciente? \_\_\_\_\_

4. ¿Qué sucede con el perímetro de la circunferencia cuando el radio  $r$  es cada vez más grande? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

5. ¿Y qué sucede si el radio  $r$  es muy pequeño? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

6. ¿Hacia qué eje se van inclinando cada una de las rectas? \_\_\_\_\_

7. ¿Cómo es el ángulo que forma cada recta con el eje  $x$  a medida que disminuye el valor por el cual se multiplica a  $x$ ? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

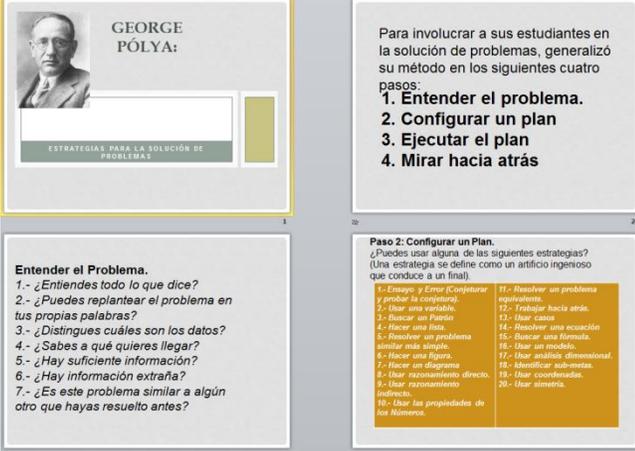
8. ¿Por qué cuadrantes pasan la rectas? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Conclusión:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Actividad 4. Método Pólya para solución de problemas

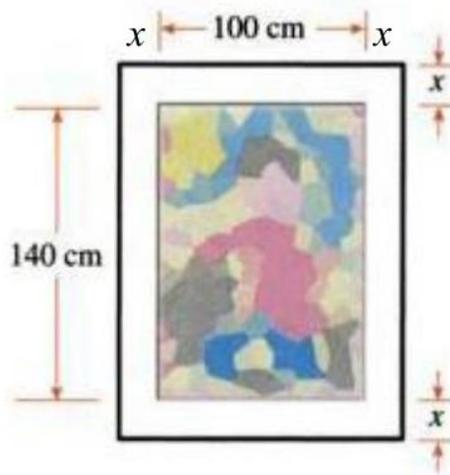
Desarrollo	Evidencia
<p>Teoría método Pólya</p> <p>Mediante el uso de diapositivas power point se explica el proceso para la solución de problemas</p> <p><b>Modelo de Pólya.</b> Consta de cuatro partes: comprender el problema, proyectar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Cada una de estas fases contiene unas preguntas de análisis de la situación que debe hacerse el estudiante para descubrir la solución del problema</p>	 <p>Para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas, generalizó su método en los siguientes cuatro pasos:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Entender el problema.</li> <li>2. Configurar un plan</li> <li>3. Ejecutar el plan</li> <li>4. Mirar hacia atrás</li> </ol> <p><b>Entender el Problema.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.- ¿Entiendes todo lo que dice?</li> <li>2.- ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?</li> <li>3.- ¿Distingues cuáles son los datos?</li> <li>4.- ¿Sabes a qué quieres llegar?</li> <li>5.- ¿Hay suficiente información?</li> <li>6.- ¿Hay información extraña?</li> <li>7.- ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?</li> </ol> <p><b>Paso 2: Configurar un Plan.</b> ¿Puedes usar alguna de las siguientes estrategias? (Una estrategia se define como un artificio ingenioso que conduce a un final):</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>11- Empezar y luego (conjeturar y probar la conjetura).</li> <li>12- Usar una variable.</li> <li>13- Buscar un patrón.</li> <li>14- Hacer una lista.</li> <li>15- Resolver un problema similar más simple.</li> <li>16- Hacer una figura.</li> <li>17- Hacer un diagrama.</li> <li>18- Usar razonamiento directo.</li> <li>19- Usar razonamiento indirecto.</li> <li>20- Usar las propiedades de los números.</li> <li>11- Resolver un problema equivalente.</li> <li>12- Trabajar hacia atrás.</li> <li>13- Usar casos.</li> <li>14- Resolver una ecuación.</li> <li>15- Buscar una fórmula.</li> <li>16- Usar un modelo.</li> <li>17- Usar análisis dimensional.</li> <li>18- Identificar sub-temas.</li> <li>19- Usar coordenadas.</li> <li>20- Usar simetría.</li> </ol>

Desarrollo	Evidencia
<p><b>Mediante un ejemplos se explica el proceso de Pólya</b></p> <p>Una compañía que renta automóviles cobra \$ 60000 al día más \$200 por kilómetro al rentar un automóvil. Laura renta un automóvil por dos días y su cuenta es de \$360000. ¿Cuántos kilómetros recorrió?</p>	<p><b>1. comprender el problema</b>            I automóvil tiene un costo fijo de \$60000 independientemente de la cantidad de los kilómetros recorridos y que Laura por rentar el automóvil dos días ya tiene un costo fijo de \$120000. Pero la pregunta a responder no es por el costo fijo, ni la cuenta que pagó Laura, es la cantidad de kilómetros que recorrió. Para una mayor facilidad vamos a llamar a <math>x</math> la cantidad de kilómetros recorridos</p> <p><b>2. Piense en un plan</b>            Cantidad de kilómetros recorridos = <math>x</math>            Costo de la cantidad de kilómetros recorridos (\$200 el kilómetro) = <math>200x</math>            Costo fijo diario (\$60000 por día) = <math>2(60000)</math>            Modelo            Costo de los kilómetros recorridos + costo fijo diario = costo total  <math>200x + 2(60000) = 360000</math></p> <p><b>3. Ejecución del plan</b></p> $200x = 360000 - 120000$ $x = \frac{240000}{200}$ $x = 1200$ <p><b>4. Mirar hacia atrás</b></p> $200(1200) + 2(60000)$ $= 240000 + 120000$ $= 360000$ $= \text{costo total.}$
<p>Ve hacia atrás</p>	<p>Verifique si la solución encontrada cumple con el plan pensado y ejecutado</p> $\text{costo del primer día} + \text{costo del segundo día} + 200(\text{número de kilómetros recorridos}) = \text{costo total}$ $= 60000 + 60000 + 200(1200) = 360000$

Un cartel tiene una superficie impresa de 100 por 140 cm y una franja de ancho uniforme alrededor de los cuatro lados. El perímetro del cartel es  $1\frac{1}{2}$  veces el perímetro del área impresa ¿Cuál es el ancho de la franja en blanco y cuáles son las dimensiones del cartel?

1. Comprender el problema

Para tener una mejor comprensión del problema vamos a realizar una representación del cartel donde se pueda observar la superficie impresa con sus respectivas medidas y la franja de ancho uniforme del cartel. Para una mayor facilidad el ancho de la franja lo vamos a denominar  $x$



**Piense en un plan**

Pasemos la información de la figura al lenguaje algebraico

En palabras	En lenguaje algebraico
Ancho de la franja en blanco	$x$
Perímetro de la superficie impresa	$2(100)+2(140)=480$
Ancho del cartel	$100 + 2x$
Largo del cartel	$140 + 2x$
Perímetro del cartel	$2(100 + 2x) + 2(140 + 2x)$

$$\text{Perímetro del cartel} = \frac{3}{2} \cdot (\text{perímetro del área impresa})$$

$$2(100 + 2x) + 2(140 + 2x) = \frac{3}{2}(480)$$

Ejecute el plan

	$200 + 4x + 280 + 4x = 720$ $8x = 720 - 200 - 280$ $x = \frac{240}{8}$ $x = 30$ <p>La franja en blanco mide 30 cm de ancho, de modo que las dimensiones del cartel son  <math>100 + 30 + 30 = 160</math> de ancho y <math>140 + 30 + 30 = 200</math> de largo</p>
Ver hacia atrás	$2(100 + 2(30)) + 2(140 + 2(30)) = 720$ $\frac{3}{2}(480) = 720$

Un jet voló de Nueva York a Los Ángeles, a una distancia de 4200 kilómetros. La rapidez del viaje de regreso excedió en 100 kilómetros por hora a la de ida. Si el total del viaje tomó 13 horas, ¿Cuál fue la rapidez de Nueva York a los Ángeles?													
<b>Comprender el problema</b>	Se pide la rapidez del avión de Nueva York a los Ángeles. Hagamos $S =$ la rapidez de Nueva York a los Ángeles Entonces $s + 100 =$ rapidez desde los Ángeles hasta Nueva York												
<b>Piense en un plan</b>	En seguida organizamos la información en una tabla. Primero llenamos la columna “distancia”, porque sabemos que entre las dos ciudades hay 4200 Km. Luego llenamos la columna “rapidez”, ya que la hemos expresado en términos de la variable $s$ . . Por último, calculamos las entradas para la columna “tiempo” mediante $\text{Tiempo} = \text{distancia} / \text{rapidez}$												
<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Distancia (Kilómetros)</th> <th>Rapidez (Kilómetros/hora)</th> <th>Tiempo (Horas)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nueva York a los Ángeles</td> <td>4200</td> <td><math>s</math></td> <td><math>4200/s</math></td> </tr> <tr> <td>Los Ángeles a Nueva York</td> <td>4200</td> <td><math>s+100</math></td> <td><math>4200/s+100</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>El viaje total duró 13 horas, de modo que tenemos: Tiempo desde Nueva York a los Ángeles + tiempo desde Los Ángeles a Nueva York = tiempo total</p> $\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s + 100} = 13$			Distancia (Kilómetros)	Rapidez (Kilómetros/hora)	Tiempo (Horas)	Nueva York a los Ángeles	4200	$s$	$4200/s$	Los Ángeles a Nueva York	4200	$s+100$	$4200/s+100$
	Distancia (Kilómetros)	Rapidez (Kilómetros/hora)	Tiempo (Horas)										
Nueva York a los Ángeles	4200	$s$	$4200/s$										
Los Ángeles a Nueva York	4200	$s+100$	$4200/s+100$										
<b>Ejecute El Plan</b> Al realizar la suma de fracciones obtenemos	$4200(s + 100) + 4200s = 13s(s + 100)$ $8400s + 420000 = 13s^2 + 1300s$ $0 = 13s^2 - 7100s - 420000$ $s = \frac{7100 \pm \sqrt{(7100)^2 - 4(13)(-420000)}}{2(13)}$ $s = \frac{7100 \pm 8500}{26}$ $s = 600 \quad \text{o} \quad s = -53,8$ <p>Como <math>s</math> representa la rapidez, descartamos la respuesta negativa y concluimos que la rapidez del jet de Nueva York a los Ángeles fue de 600 Kilómetros/hora.</p>												
Ver hacia atrás													

$$\begin{aligned} & \frac{4200}{s} + \frac{4200}{s+100} \\ &= \frac{4200}{600} + \frac{4200}{600+100} \\ &= 7 + 6 \\ &= 13 \end{aligned}$$



### Actividad de refuerzo

#### Problema 1

Si una empresa que transporta valijas establece sus tarifas de la siguiente manera: \$ 8 por km recorrido y \$ 12 por cada valija transportada, ¿cuánto costará trasladarse 100 km con una valija? Determina la ecuación que expresa el importe si la empresa transportara una valija a  $d$  kilómetros.

#### Problema 2

Una empresa de autobuses cobra una cantidad fija de \$230 y un plus de \$2 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuánto cobrará dicha empresa si se quiere alquilar un autobús de la misma para realizar una excursión con los alumnos de 9° 6° a un lugar situado a 90 kilómetros de la escuela?

Determina la fórmula que expresa el importe y que deberíamos pagar, si un autobús de esta empresa nos traslada a  $d$  kilómetros de la escuela.

Identifica a partir de la pendiente si la ecuación es creciente constante o decreciente.

## Actividad 5. Solución de problemas de función lineal

### Desarrollo

Observación recurso interactivo: el recibo de la energía

El docente presenta una situación problema, con la cual inicialmente pedirá a los estudiantes que realicen la gráfica que representan los datos dados, luego a partir de esa gráfica se harán preguntas y se aclararán los elementos de dicha gráfica.

#### La situación problema es la siguiente:

El docente presenta una animación en la cual aparecen cuatro vecinos de un conjunto residencial, lo cuales comentan acerca de su factura del servicio de luz, don Julio dice que aumentó su consumo y que por tanto debe cancelar este mes \$95.180, don Andrés indicó que en cambio en su casa decidieron ser más cuidadosos y ahorrar, que este mes su consumo disminuyó y la factura llegó por \$ 48.732,16, la señora Martha indica que su consumo en cambio se mantuvo y que por eso su factura llegó por \$ 39.594, 88 y don Luis comenta que a él se le perdió la factura y lo único que recuerda es que el consumo fue de 110 Kwh y que debe averiguar cuánto debe pagar.

Luego aparece una tabla con los datos obtenidos:

Vecino	Valor de la factura de la luz
<b>Julio</b>	<b>\$95.180</b>
<b>Andrés</b>	<b>\$ 48.732,16</b>
<b>Martha</b>	<b>\$ 39594, 88</b>
<b>Luis</b>	<b>?</b>

Y finalmente en la animación, aparecen los cuatro vecinos preguntando cómo con los valores que tienen le pueden ayudar a don Luis. En el material del estudiante aparece la información de la animación y además contestan la pregunta:

¿Cómo podrías averiguar el valor de la factura de don Luis?

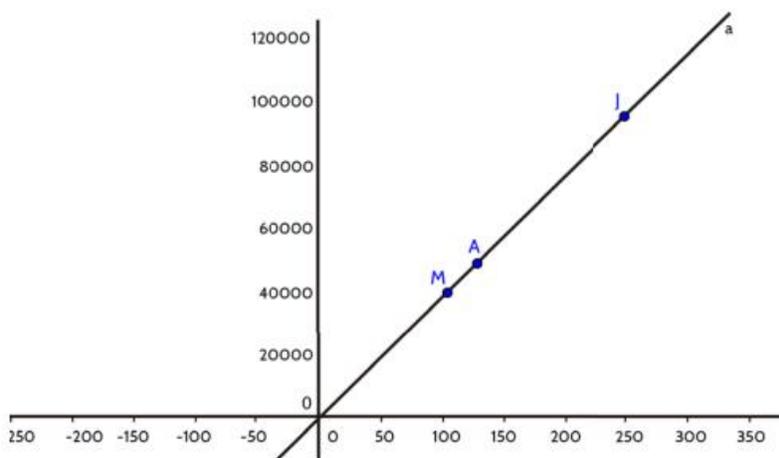
¿Con los datos que se tienen es suficiente?

Se pide a los estudiantes que usen en método Pólya para solucionar la situación problemática.

Luego el docente presenta un recurso interactivo, en el cual se va a graficar, la situación anterior, pero para ello se indica cuál fue el consumo en Kwh de cada vecino.

Vecino	Consumo en Kwh	Valor de la factura de la luz
<b>Julio</b>	<b>250</b>	<b>\$95.180</b>
<b>Andrés</b>	<b>128</b>	<b>\$ 48.732,16</b>
<b>Martha</b>	<b>107</b>	<b>\$ 39594, 88</b>
<b>Luis</b>	<b>110</b>	<b>?</b>

Luego pide a los estudiantes que observen la recta por la que pasan los puntos dados (el eje x representa el consumo el Kwh y en el eje y el valor de la factura), se pide a los estudiantes que ubiquen el punto en y correspondiente al valor de 110 para el consumo de don Luis, la intención es que el estudiante evidencie que ese punto queda sobre la recta que se formó.



Se realizan las siguientes preguntas:

¿Qué particularidades tiene esta gráfica?

¿Pasa por cero? ¿Por qué?

La intención es que respondan que si pasa por cero y que es una línea recta, es decir que la función, tiene una constante de proporcionalidad, la cual se obtiene al dividir el valor de la factura entre el consumo en Kwh. Para este caso se tiene 380.72

Es decir que la recta está dada por  $y = 380.72x$

El docente pide a los estudiantes que verifiquen los datos, tabulando, es decir dar los valores a x, que corresponden a la variable independiente, porque cada apartamento tiene un consumo diferente y y es la variable dependiente, porque depende de la cantidad de Kwh que consuma y el costo por cada uno.

El docente socializa con los estudiantes, que una variable es una magnitud que puede tener un valor cualquiera de los comprendidos en un conjunto, para este caso los valores son los expresados en la tabla de datos, por tanto x y y son variables.



**Universidad de la Sabana**

**Maestría en Proyectos Educativos Mediados por TIC**

**Actividad**

El recibo de energía

1. Observa la siguiente imagen y responde las preguntas:

Vecino	Valor de la factura de Energía
Julio	\$ 95.180
Andrés	\$ 48.732,16
Martha	\$ 39.594,88
Luis	\$ ?

Con estos valores ¿cómo podemos ayudar a don Luis a identificar el valor de su factura?



- a. ¿Cómo podrías averiguar el valor de la factura de Don Luis?

---



---

- b. ¿Con los datos que se tienen es suficiente?

---



---

2. Representa los datos a través de una gráfica

Vecino	Consumo en Kwh	Valor de la factura de Energía
Julio	250	\$ 95.180
Andrés	128	\$ 48.732,16
Martha	107	\$ 39.594,88
Luis	110	\$ ?



**Universidad de la Sabana**  
**Maestría en Proyectos Educativos Mediados por TIC**  
**Actividad de refuerzo**

Matías recibió la factura de su celular, donde pudo observar que el abono que paga a fin de mes está formado por un valor fijo y otra variable que depende de la cantidad de minutos que habló:

Costo Fijo= \$18

Costo Variable= \$0,20 cada minuto

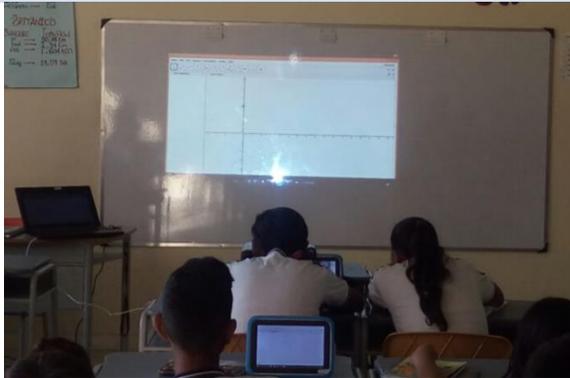
1. Si Matías habló 120 minutos.
  - a) ¿Cuánto deberá pagar la factura de su celular?
  - b) ¿Cuánto deberá pagar si habló 30 minutos?
  - c) ¿Cuánto deberá pagar si habló 200 minutos?
  - d) ¿Cuánto deberá pagar en  $t$  minutos?

### Anexo 7. Evidencias del trabajo realizado



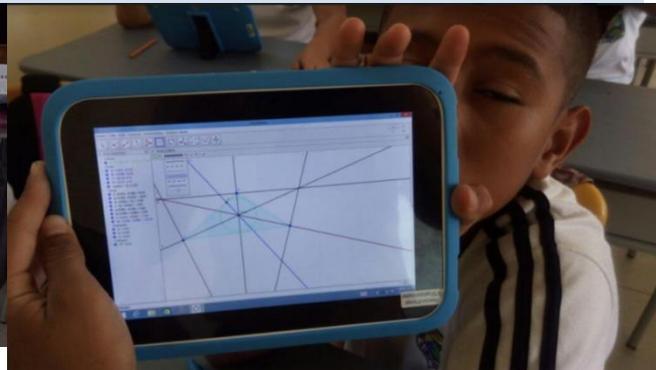
Proyección de actividades

Actividades en grupo



Actividades individuales

Proyección de actividades



Trabajo colaborativo

Realización de actividades



Actividades realizadas por los estudiantes



Explicaciones por parte del docente

## Anexo 8. Videos de apoyo

### 1. Geogebra

<http://www.geogebra.org/>.

### 2. Curso Geogebra - 01 Instalar Geogebra

[https://www.youtube.com/watch?v=a9Hw1VT-YxY&list=PLS6BAF1pM505iGW\\_uSR6nw\\_QeKAlg5Tg](https://www.youtube.com/watch?v=a9Hw1VT-YxY&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKAlg5Tg)

### 3. Curso Geogebra - 02 Vistazo rápido

[https://www.youtube.com/watch?v=FZfj6L7jNQo&index=2&list=PLS6BAF1pM505iGW\\_uSR6nw\\_QeKAlg5Tg](https://www.youtube.com/watch?v=FZfj6L7jNQo&index=2&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKAlg5Tg)

### 4. Curso Geogebra - 03 Construcción simple

[https://www.youtube.com/watch?v=5cAmWPZNs2Y&index=3&list=PLS6BAF1pM505iGW\\_uSR6nw\\_QeKAlg5Tg](https://www.youtube.com/watch?v=5cAmWPZNs2Y&index=3&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKAlg5Tg)

### 5. Curso Geogebra - 04 Construcción con la barra de entrada

[https://www.youtube.com/watch?v=wIxpzyTJGaA&index=4&list=PLS6BAF1pM505iGW\\_uSR6nw\\_QeKAlg5Tg](https://www.youtube.com/watch?v=wIxpzyTJGaA&index=4&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKAlg5Tg)

### 6. Curso Geogebra - 05 Deslizadores y rastros

[https://www.youtube.com/watch?v=ewj\\_bsWGcNI&index=5&list=PLS6BAF1pM505iGW\\_uSR6nw\\_QeKAlg5Tg](https://www.youtube.com/watch?v=ewj_bsWGcNI&index=5&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKAlg5Tg)

### 7. Curso Geogebra - 06 CAS (parte 1) Botones

[https://www.youtube.com/watch?v=dYgRdkTBKfQ&list=PLS6BAF1pM505iGW\\_uSR6nw\\_QeKAlg5Tg&index=6](https://www.youtube.com/watch?v=dYgRdkTBKfQ&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKAlg5Tg&index=6)

### 8. Curso Geogebra - 07 CAS (parte2) Polinomios y ecuaciones

[https://www.youtube.com/watch?v=G20x99dkvt4&index=7&list=PLS6BAF1pM505iGW\\_uSR6nw\\_QeKAlg5Tg](https://www.youtube.com/watch?v=G20x99dkvt4&index=7&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKAlg5Tg)

### 9. Curso Geogebra - 08 CAS (parte 3) Sistemas de ecuaciones

[https://www.youtube.com/watch?v=Xhmv3OC2NFE&index=8&list=PLS6BAF1pM505iGW\\_uSR6nw\\_QeKAlg5Tg](https://www.youtube.com/watch?v=Xhmv3OC2NFE&index=8&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKAlg5Tg)

### 9. Cómo guardar una imagen hecha con Geogebra

[https://www.youtube.com/watch?v=W4-ts-xBS5c&index=10&list=PLS6BAF1pM505iGW\\_uSR6nw\\_QeKAlg5Tg](https://www.youtube.com/watch?v=W4-ts-xBS5c&index=10&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKAlg5Tg)

<https://www.youtube.com/watch?v=pGUIbeIx6Ak&t=127s>

### 10. Graficación función

<https://www.youtube.com/watch?v=8NfT-R508nE>

<https://www.youtube.com/watch?v=3QnZx55bXRI>

[https://app.geogebra.org/help/geogebraquickstart\\_es.pdf](https://app.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf)

<https://wiki.geogebra.org/en/Tutorials>

<https://margaritaapplets.jimdo.com/u1-geogebra/>

<https://www.geogebra.org>

### Graficación de rectas

1. **Construcción de rectas:** visita el link <https://www.geogebra.org/m/2187563>

2. **Graficar una función lineal.** Ir al link <https://www.geogebra.org/m/J3HJPAWj>

## Anexo 9. Links Power Point

### La función lineal, puntos de corte y pendiente

<http://www.fdi.ucm.es/profesor/lgarmend/pie/actics/docs/PowerPoint%20Funciones%20y%20gr%C3%A1ficas.ppt>.

<http://www.fdi.ucm.es/profesor/lgarmend/pie/actics/docs/PowerPoint%20Funciones%20y%20gr%C3%A1ficas.ppt>

<http://www.locoporlasmatematicasyque.blogsek.es/files/2014/03/2-ESO-UNIDAD-6.pdf>.

[gradodecimofunciones.wikispaces.com/file/view/presentacion\\_funcions\(1\)\[1\]\[1\].ppt](http://gradodecimofunciones.wikispaces.com/file/view/presentacion_funcions(1)[1][1].ppt)

<https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:E7a-Rhyw5GcJ:https://es.slideshare.net/luiscardona55/funcion-lineal-presentacion+&cd=5&hl=es&ct=clnk&gl=co>

<https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:jUaEOZ7sfBYJ:https://es.slideshare.net/rodriavelp/funcin-lineal-46476366+&cd=6&hl=es&ct=clnk&gl=co>

<http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:4fZ60MYdbOoJ:www.calameo.com/books/001436064b7915721b781+&cd=9&hl=es&ct=clnk&gl=co>

html del  
 archivo [http://ccu.mx/virtual/claroline/work/user\\_work.php?cmd=exDownload&authId=997&assignId=2&workId=38&cidReset=true&cidReq=MATI](http://ccu.mx/virtual/claroline/work/user_work.php?cmd=exDownload&authId=997&assignId=2&workId=38&cidReset=true&cidReq=MATI).

## Anexo 10. Actividades desarrolladas por los estudiantes



MATEMÁTICAS - GRADO NOVENO. CODEMA I.E.D  
CONSTRUYENDO UNA COMUNIDAD CRÍTICA, JUSTA Y TOLERANTE

Universidad de la Sabana

Maestría en Proyectos Educativos Mediados por TIC

Actividad

El recibo de energía

1. Observa la siguiente imagen y responde las preguntas:

Vecino	Valor de la factura de Energía
Julio	\$ 95.180
Andrés	\$ 48.732,16
Martha	\$ 39.594,88
Luis	\$ ?

Con estos valores ¿cómo podemos ayudar a don Luis a identificar el valor de su factura?



- a. ¿Cómo podrías averiguar el valor de la factura de Don Luis?

para poder averiguar el valor de la factura  
necesitaria el valor de los kWh.

- b. ¿Con los datos que se tienen es suficiente?

no porque nos haria falta cuanto equivale el  
kwh.

2. Representa los datos a través de una gráfica

Vecino	Consumo en Kwh	Valor de la factura de Energía
Julio	250	\$ 95.180
Andrés	128	\$ 48.732,16
Martha	107	\$ 39.594,88
Luis	110	\$ 41.819,2

Universidad de la Sabana

Maestría en Proyectos Educativos Mediadados por TIC

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2,-4) y que tiene una pendiente de A (2,-4)

$$(2, -4) \quad (2, -4)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - -4}{2 - 2}$$

$$m = \frac{-8}{0} = -8$$

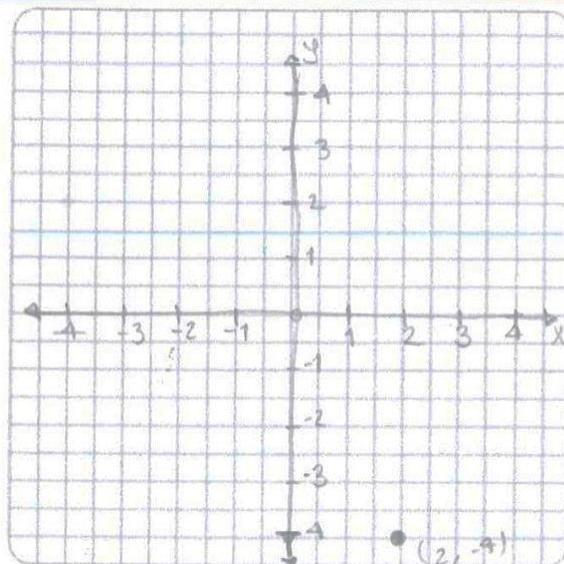
$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$y - (-4) = -8(x - 2)$$

$$y + 4 = -8x + 16$$

$$y + 4 + 8x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 8x + y - 12 = 0$$



2. Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos P (1, 2) y Q (3, 4)

$$\vec{PQ} = (-4, 2)$$

$$m = \frac{2}{-4}$$

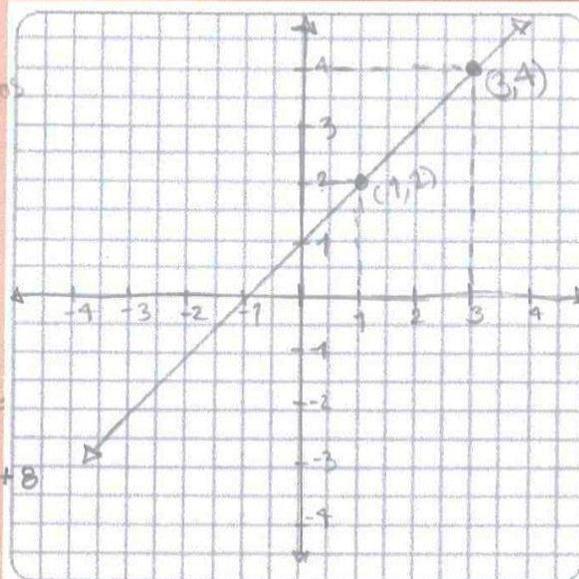
$$\textcircled{1} (x, y) = (1, 2) + t(-4, 2)$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x = 1 + (-4t) = 1 - 4t \\ \Rightarrow t = \frac{x-1}{-4} \end{cases}$$

$$y = 2 + 2 \cdot t \Rightarrow t = \frac{y-2}{2}$$

$$\textcircled{3} \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 2x-2 = -4y+8$$

$$\textcircled{6} 2x + 4y - 10 = 0$$





Universidad de la Sabana

Maestría en Proyectos Educativos Mediados por TIC

Actividad de refuerzo

**Problema 1**

Si una empresa que transporta valijas establece sus tarifas de la siguiente manera: \$ 8 por km recorrido y \$ 12 por cada valija transportada, ¿cuánto costará trasladarse 100 km con una valija? Determina la ecuación que expresa el importe si la empresa transportara una valija a  $d$  kilómetros.

$$\frac{\$ 8d}{\text{km}} + \$ 12 = C \text{ importe}$$

$$\frac{\$ (100 \text{ km})}{\text{km}} + \$ 12 = C$$

$$\$ 812 = C$$

**Problema 2**

Una empresa de autobuses cobra una cantidad fija de \$230 y un plus de \$2 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuánto cobrará dicha empresa si se quiere alquilar un autobús de la misma para realizar una excursión con los alumnos de 9° 6° a un lugar situado a 90 kilómetros de la escuela?

Determina la fórmula que expresa el importe y que deberíamos pagar, si un autobús de esta empresa nos traslada a  $d$  kilómetros de la escuela.

Identifica a partir de la pendiente si la ecuación es creciente constante o decreciente.

$$\$ 230 + \$ 2d = C$$

$$\$ 230 + \frac{\$ 2d}{\text{km}} = C$$

$$\$ 230 + \frac{\$ 2(90 \text{ km})}{\text{km}} = C$$

$$\$ 230 + \$ 180 = C$$

$$\$ 410 = C$$

$m = \text{pendiente}$

$y = mx + b$   
+ Pendiente + punto corte

El valor de la pendiente es \$ 2 o sea es creciente.

