

## Información Importante

La Universidad de La Sabana informa que el(los) autor(es) ha(n) autorizado a usuarios internos y externos de la institución a consultar el contenido de este documento a través del Catálogo en línea de la Biblioteca y el Repositorio Institucional en la página Web de la Biblioteca, así como en las redes de información del país y del exterior con las cuales tenga convenio la Universidad de La Sabana.

Se permite la consulta a los usuarios interesados en el contenido de este documento para todos los usos que tengan finalidad académica, nunca para usos comerciales, siempre y cuando mediante la correspondiente cita bibliográfica se le de crédito al documento y a su autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, La Universidad de La Sabana informa que los derechos sobre los documentos son propiedad de los autores y tienen sobre su obra, entre otros, los derechos morales a que hacen referencia los mencionados artículos.

**BIBLIOTECA OCTAVIO ARIZMENDI POSADA**  
UNIVERSIDAD DE LA SABANA  
Chía - Cundinamarca

# Portafolio de las Pensiones Voluntarias en Colombia. Una Revisión de sus Rendimientos.



Universidad de  
**La Sabana**

Vanessa Quintero Ospino  
Santiago Iregui Méndez  
Universidad de La Sabana

*Economía y Finanzas Internacionales*  
Chía 2016

# Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>4</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>3. Revisión de la Literatura</b>	<b>5</b>
<b>4. Marco Teórico</b>	<b>8</b>
<b>5. Datos</b>	<b>9</b>
<b>6. Metodología</b>	<b>9</b>
6.1. Relación de Sharpe . . . . .	10
6.2. Modelo de Markowitz . . . . .	10
<b>7. Resultados</b>	<b>11</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>20</b>
<b>9. Bibliografía</b>	<b>21</b>

## **Agradecimientos**

*En primer lugar le queremos dar las gracias a Dios, a la Universidad y sus profesores, especialmente al profesor Fredy Pulga por darnos las herramientas necesarias para llevar a cabo la investigación, de igual manera, al profesor Álvaro Pedraza por ayudarnos a encaminar algunos de los objetivos de la misma, finalmente, al profesor Diego Guevara por guiarnos en la construcción del documento, a ellos y todas las personas que no fueron mencionadas, Muchas Gracias.*

## 1. Resumen

En el sistema general de pensiones de Colombia existe el régimen de ahorro individual que consiste en un aporte de los afiliados por varios años a una cuenta de ahorro, para así crear un monto suficiente para poder utilizar a futuro. Dadas las claras ineficiencias que se han evidenciado durante varios estudios en los fondos de pensiones colombianos, se han buscado diferentes propuestas de optimización de portafolios. El objetivo del presente documento es evaluar el desempeño financiero a lo largo de los fondos de pensiones voluntarias a partir de un análisis de rentabilidad y riesgo, observando cuál de los fondos es más rentable y eficiente, así mismo, conocer cuál portafolio posee un alto desempeño a través de la metodología de Markowitz. En el estudio se vio que la mayoría de los fondos de pensiones voluntarias en Colombia asumen más riesgo del necesario, generando menores rentabilidades que la propuesta por el modelo de Markowitz, incluso teniendo rentabilidades negativas en algunos casos. Igualmente, con sus limitaciones y deficiencias operativas, se evidenciaron los resultados aclarando posibles diferencias de resultados en otros modelos.

### Palabras claves

Fondos de pensiones, Markowitz, Optimización de portafolios

### Abstract

In the Colombian pension funds exists individual savings regime consisting of a contribution of affiliates for several years to an individual savings account, in order to create a sufficient amount to use in the future. Given the clear inefficiencies that have been evidenced in several studies in pension funds they have sought different proposals for portfolio optimization. The purpose of this paper is to evaluate the financial performance over the voluntary pension funds from an analysis of profitability and risk, noting which fund is more profitable and efficient and know which of these has a high performance, by which was analyzed optimal portfolios through methodology Markowitz. It was found that mostly voluntary pension funds in Colombia assume more risk than necessary assuming lower returns than that proposed by the Markowitz, even as seen in some groups, with negative returns. Also with its limitations and operational deficiencies manifested itself this result clarifying possible differences in results in other models.

### Keywords

Pension funds, Markowitz, Portfolio optimization.

## 2. Introducción

Desde hace varios años se ha evidenciado una clara ineficiencia en el comportamiento de los fondos de pensiones en Colombia. Debido a ello, se ha ido perfeccionando las reformas pensionales, logrando avances importantes para las alternativas de inversión. La ineficiencia de los fondos de pensiones puede tener un efecto a largo plazo en cuanto a la reducción del ahorro pensional, lo que inmediatamente tiene una disminución en la pensión futura.

Los colombianos tienen la posibilidad de entrar en un plan de pensiones voluntarias que cuenta con una gran variedad de portafolios, en donde pueden obtener beneficios tributarios y aumentos en su ahorro pensional. Es necesario aclarar que existe un alto grado de similitud entre los portafolios que hay en el mercado, lo que hace que la dificultad de elegir un fondo sea mayor. Es natural que los afiliados a este sistema de pensiones voluntarios prefieran que sus ahorros sean invertidos de la mejor manera, sin embargo, se ha observado que los fondos tienen un comportamiento de riesgo-retorno ineficiente, lo que resulta cuestionar el origen de esta ya que las decisiones de inversión son determinadas directamente por los ahorradores.

Para poder demostrar el desempeño de los fondos de pensión se tomó como objetivo de la investigación evaluar el desempeño financiero de los fondos de pensiones voluntarias en Colombia a partir de un análisis de rentabilidad y riesgo, de igual manera, se quiere observar en aquellos fondos que sean pertinentes y comparables cual es más rentable y eficiente, a partir de un análisis de mínima varianza con el modelo de Markowitz el cual tiene como objetivo hallar la composición óptima de un portafolio de valores, tal que maximice la rentabilidad al mínimo nivel de riesgo posible.

El modelo produce una frontera eficiente en la que cada punto representa las características de riesgo y retorno de un fondo en particular. En este caso se impuso una restricción de no ventas en corto y el análisis se llevó a cabo en 7 portafolios.

De igual manera, se utilizó la razón de Sharpe para mirar el cociente entre retorno y riesgo para medir el desempeño financiero de los portafolios. dicha metodología da la posibilidad de analizar los fondos específicos sin depender de un modelo de valoración de activos ni estrictamente una identificación de portafolio del mercado.

El desarrollo del documento se divide en tres partes: en la primera se realiza una breve explicación de la metodología y la medida de desempeño utilizadas para el análisis del desempeño de los fondos de pensiones voluntarias, en la segunda parte se presentan los resultados y finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo.

## 3. Revisión de la Literatura

Los fondos de pensiones han sido centro de estudios alrededor del mundo, debido a la alta responsabilidad que tienen, pues “una reducción promedio de 1% en la rentabilidad anual de una cuenta de ahorro individual durante una vida laboral, disminuye la pensión en aproximadamente 30%” (Jara, 2006). En el caso colombiano, después de la constitución de 1991, se buscó corregir las distorsiones que existían en el sistema de pensiones, con la Ley 100 de 1993, en donde se creó un sistema general de pensiones que está constituido por un régimen de ahorro individual y un régimen de prima media. La Ley tiene como propósito garantizar las prestaciones económicas para los más vulnerables, así mismo, incrementar su cobertura, fortalecer el sistema financiero y mejorar la eficiencia de los recursos.

El nuevo sistema de pensiones en Colombia consiste en que el régimen de prima media es de carácter público, teniendo como fundamento el bienestar de la sociedad, donde los aportes de los cotizantes son incluidos en un fondo común y son administrados por Colpensiones. La estabilidad y sostenibilidad de dichos fondos, depende del número de afiliados, su edad,

sus beneficios, la rentabilidad de las inversiones realizadas en el instituto de seguros sociales y de sus costos de administración.

Por otra parte, el régimen de ahorro individual es gestionado por las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP), que consiste en un aporte de los afiliados por varios años a una cuenta de ahorro individual, para así crear un monto suficiente para poder utilizar en el futuro. Igualmente, la Ley 100 propone fechas a mujeres y a hombres para poder pensionarse, en el caso de las mujeres son los 57 años y 62 en los hombres. (Ley 100, 1993)

Debido a las notables deficiencias de la Ley 100 de 1993, se vio la necesidad de implementar nuevas medidas que ayudaran a beneficiar a los futuros pensionados del país, dando como resultado a la Ley 797 de 2003. En donde la base constitucional que se tenía en el momento no se modificó ya que no logró convertirse en un acto legislativo, por lo tanto, la Ley 797 de 2003 hizo varias modificaciones al sistema general de pensiones.

Dicha ley tuvo como objetivo principal racionalizar los recursos para cumplir con las mensualidades a los beneficiarios, para ello se hizo un aumento en la tasa de cotización, un incremento en el tiempo mínimo de cotización requerido para acceder a la pensión de vejez, una reducción de la vigencia del periodo de transición establecido, entre otros.

Posteriormente, se reformó en el 2005 para facilitar requisitos y beneficios pensionales con el objetivo de lograr una mayor equidad en el sistema. Este tenía como propósito la eliminación de los diferentes regímenes especiales de pensiones, unificar y homogeneizar los parámetros y el pago de pensiones para los ciudadanos colombianos. Después se buscó mejorar el sistema pensional de Colombia con las necesidades demográficas y económicas actuales y dar cumplimiento a las características propias de un Estado Social de Derecho.

En Colombia, los administradores de las AFP han enfrentado el problema de decidir la composición óptima de un portafolio de inversión, pues existen restricciones de tipo regulatorios que impiden maximizar sus utilidades tales como máximos en títulos de renta fija, renta variable, depósitos a la vista, entre otros, definidos por la Superintendencia Financiera y explicados por Jara (2006), todo ello con el propósito que cuenten con la seguridad, rentabilidad y liquidez requerida.

Para ello, los agentes tendrán que seleccionar las alternativas de inversión que les brinde un beneficio superior al que está estipulado en el mercado, teniendo en cuenta un mayor grado de certeza posible. Por consiguiente, se plantea que la Superintendencia Financiera de Colombia pueda modificar la metodología de cálculo de la rentabilidad mínima (Laserna, 2007) con el propósito de incentivar inversiones diversificadas, mejorar la eficiencia de los portafolios y diseñar un manejo de los recursos con la idea de implementar un horizonte de inversión de largo plazo, modificando la metodología de cálculo de la rentabilidad mínima alargando su periodo de cálculo y reglamentada en términos del exceso y retornos obtenidos frente a un portafolio de referencia definido por cada AFP. Así mismo se tendría que tener en cuenta el riesgo asumido a diferencia del régimen actual.

Sin embargo, en el área de la investigación se han dado algunos hallazgos del por qué el sistema pensional colombiano ha tenido una serie de fallos a través del tiempo y ha sido investigado por varios autores tales como Jara (2006), que da como conclusión que “si la regulación actual se le omitiera la restricción de la rentabilidad mínima, las AFP [aseguradoras de fondos de pensión] optimizarán su utilidad esperada invirtiendo en un portafolio eficiente” (Pag. 36) cuya investigación se centró en la relación de sharpe en un periodo y multiperiodos demostrando que los sistemas pensionales obligatorios están lejos de las sendas óptimas del modelo de Markowitz.

Los resultados fueron confirmados por Jara Pinzón, Gómez Restrepo, & Pardo Amezquita (2005), en su estudio que plantea cómo los fondos de pensiones están por debajo del

portafolio eficiente con un nivel de riesgo constante, así mismo, muestra cómo los límites de inversiones impuestos por la Superintendencia Bancaria causan pérdidas en utilidades potencialmente esperadas. Además, Berggrun Preciado & Jaramillo Recio (2010), plantearon un análisis en el cual no se encontró evidencia en relación a las mejoras del rendimiento cuando se utiliza una metodología de optimización de la cartera particular de Markowitz.

Debido a que se ha evidenciado una clara deficiencia en los portafolios de los fondos de pensiones, se han buscado diferentes propuestas de optimización de portafolios, como lo plantea Laserna (2007), en cuanto a un manejo eficiente de los recursos como ya se había mencionado, con la idea de implementar un horizonte de inversión de largo plazo, así, dando como resultado, una mejoría en el portafolio de inversión en cuanto a su diversificación y medidas de desempeño, como lo muestra Flórez García (2005), teniendo en cuenta los fondos de pensiones de Perú.

“En tal sentido, con relación a la rentabilidad mínima exigida a las inversiones del SPP y considerando su periodo de valoración, lo cual se estaría alentando las inversiones de corto plazo, de forma incongruente al objetivo del Sistema Privado de Pensiones, cuyo espíritu considera un horizonte de inversión de mediano y de largo plazo, buscando el adecuado calce de plazos frente al pago de pensiones de jubilación”. (Pag 107)

Uno de los modelos más modernos acerca de la optimización de portafolio corresponde al de Alexander & Grisales (2016), que trata de cómo conformar de manera óptima los portafolios de inversión mes a mes, por lo que, plantearon un modelo el cual se basa en un Benchmark para determinar el comportamiento de las inversiones que se realizan. Adicionalmente, los autores definen las variables relevantes del modelo que son; la varianza y covarianza del portafolio, el rendimiento mínimo requerido por el inversionista y el nivel de aversión al riesgo y llegaron a la conclusión de que a medida que se construyan modelos que reflejen la realidad de una manera más cercana, hará que las decisiones de inversión que se tomen sean más acertadas ya que todas las personas no tienen las mismas expectativas de inversión por lo que es de gran utilidad el nivel de aversión al riesgo, ya que con ésta es fundamental para la selección de la cartera óptima de inversión para cualquier tipo de inversionista.

En el caso de las medidas de desempeño comunes que se han utilizado durante muchos años, varios autores plantean propuestas dirigidas a analizar la eficiencia de los fondos de pensiones, como lo hace Cayón Fallón & Ricardo Santo Rojas (2010), que relacionaron dos objetivos de inversión distintas, el cual analizó los datos de 30 portafolios administrados por los fondos de pensiones en Colombia y tuvieron en cuenta 30 ETFs que tuvieran objetivos de inversión muy similares a los portafolios, medidos con el índice de Jensen y Treynor y llegaron a la conclusión de que sólo dos de los 30 fondos de inversión de Colombia en estudio fueron capaces de vencer a un punto de referencia comercial sobre una base ajustada al riesgo y bajo estas medidas de desempeño que se utilizaron. El inversionista colombiano tendría mejor rentabilidad invirtiendo con productos de gerencia pasiva, es decir, los ETFS que en los portafolios que ofrecen actualmente los fondos de pensiones.

Es necesario tener en cuenta que, la literatura sobre los portafolios de inversión de las pensiones voluntarias, es muy escasa. La investigación actual, se basa principalmente en la comparación con los fondos de pensiones obligatorias y de cómo estos tienden a un comportamiento de inversión distinta por su forma de constitución. Berggrun Preciado & Jaramillo Recio (2010), mostraron como el rendimiento de los fondos de pensiones voluntarias tuvieron una disminución en el rendimiento de fondos y un aumento en el riesgo en los últimos años. Mostrando como los fondos de pensiones obligatorias superaron a los fondos de pensiones voluntarias ofrecidas por Protección y Skandia, a un nivel mucho más bajo de riesgo. Del mismo modo, los fondos de pensiones voluntarias han tenido un comportamiento inferior al óptimo incluso si se compara con la tasa libre de riesgo. De igual forma Preciado & Roger



(2009), utilizan un modelo de construcción de portafolios de Markowitz con el objetivo de armar un portafolio óptimo a partir de varias alternativas de inversión que ofrece un fondo de pensiones voluntarios y llega a la conclusión de que debe ser la consecución de una mezcla de activos para el perfil de riesgo asignado que ofrezca una rentabilidad mejor con una volatilidad menor que una inversión en un solo activo.

Como explica Mechán (2015), anteriormente los recursos que estaban destinados a cubrir riesgos de invalidez, vejez y muerte se manejaban como un portafolio único y naturalmente era regulado por el estado, donde se daban inversiones principalmente en instrumentos financieros de renta fija, especialmente en TES, teniendo en cuenta que existían limitaciones al mercado de renta variable y de valores emitidos en el exterior, esto hace que las AFP fueran reguladas por el estado para así reconocer una rentabilidad mínima, establecida según como se esté comportando el mercado de capitales en el que se invierten los recursos.

Jara Pinzón et al. (2005), mediante su estudio compara los fondos obligatorios con el de los fondos voluntarios de pensiones, los cuales no están sujetos a los límites de inversión impuestos por la Superintendencia Bancaria y llegan a la conclusión que los fondos voluntarios se ubican considerablemente por debajo de la frontera eficiente, específicamente éstos se encuentran por debajo de la frontera de los fondos obligatorios y agrupan los fondos voluntarios en distintos niveles de riesgo, lo cual asemeja un sistema de multifondos dentro del sistema voluntario.

A partir de la evidencia empírica, se llegó a una reforma al sistema de pensiones a través del proyecto que presentó el Ministerio de Hacienda que planteó un sistema de multifondos. Que es un sistema en cual los individuos con alta aversión al riesgo pueden invertir sus ahorros en portafolios con una alta proporción de activos de renta fija y los individuos con baja aversión al riesgo pueden escoger portafolios con un nivel de riesgo mayor, esta forma permite a las AFP, ofrecer a sus afiliados más de un portafolio dependiendo de la edad y el perfil de riesgo, teniendo tres tipos de fondos con diferentes portafolios de inversión, conservador, moderado y agresivo donde cada usuario tiene la libertad de escoger el tipo de fondo al que quiere destinar sus aportes y de acuerdo con su perfil. García & Moreno, (2011), fueron unos de los autores que mostraron que teniendo en cuenta el sistema de multifondos, los fondos referentes se encuentran por debajo de la frontera de eficiencia lo que indica que dada la crisis internacional y la revaluación de ese momento el rendimiento de los multifondos no sería adecuado, a través del portafolio eficiente de Markowitz.

Finalmente se encuentran los modelos pensionales mixtos que, según el Banco Mundial, estarían involucrados los sistemas de ahorro individual y no los de prima media, que han surgido como una ventana a la solución de los problemas pensionales colombianos que han mostrado algunas virtudes como la diversificación del riesgo, aunque también tengan limitaciones que se vieron resaltada en la reforma del sistema pensional. Acosta & Ayala, (2001).

## 4. Marco Teórico

Dada la información anterior, se busca definir un portafolio eficiente dada la teoría, como aquel que pueda maximizar el retorno esperado teniendo en cuenta un nivel específico de varianza, observando la frontera eficiente como el conjunto de todos los portafolios eficientes, así mismo poder medirlo con un indicador el cual muestre una relación entre el riesgo del portafolio su rentabilidad. El objetivo de la investigación es observar esta frontera eficiente del universo de activos dados para así observar el rendimiento, considerando los siguientes parámetros de nuestra propuesta.

## 5. Datos

Para realizar el estudio, en primer lugar, se buscaron los fondos de pensiones voluntarias que operan en Colombia, siendo un total de 131 portafolios distribuidos en cuatro administradoras. Para reconocerlos, se buscó en las páginas web de las AFP y se hizo una base de datos que resumía la información de las fichas técnicas <sup>1</sup> de enero del 2016 de cada uno de los portafolios a estudiar.

Luego de ello, se encontró que existían portafolios que su administración era en base de una sola acción y, por ello, fueron sacados de la muestra. Adicionalmente, los portafolios que su mayor participación son las titularizaciones inmobiliarias, fueron omitidos debido a que no se tiene un Benchmark que ayude a ver el portafolio óptimo de estos. Así mismo, los portafolios que llevan en el mercado menos de un año también se excluyeron, ya que no se tenían las rentabilidades promedios mensuales de esos portafolios o los que estaban invertidos en liquidez pues estos no se tenían una comparación certera del mercado en el que participan. Finalmente, no fueron tomados en cuenta los portafolios cerrados de inversión, pues una de las propiedades de los fondos a estudiar es la libre entrada y salida de los usuarios, característica violada por este tipo de portafolios. Quedando un total de 68 portafolios a estudiar, como se puede ver en el cuadro 1.

AFP	A estudiar	Excluidos	Cerrados	Inmobiliario	TOTAL
Porvenir	22	24	3	2	51
Protección	11	26	9	0	46
Old Mutual	13	7	0	2	22
Colfondos	4	4	4	0	12
TOTAL	50	61	16	4	131

*Cuadro 1: Resumen de los fondos de pensiones voluntarias en Colombia.  
(Elaboración propia)*

Con la información encontrada en cada ficha técnica se ven los objetivos de los portafolios, los plazos y la distribución de inversiones, con esa información se añadió a la base de datos toda la información relevante de las fichas para saber en dónde debe estar los activos que se tomaron para la construcción de cada uno de los portafolios.

Además, en las páginas de cada una de las firmas aseguradoras de los fondos de pensiones, están los valores de la unidad que tuvieron los portafolios en el 2015, encontrando las rentabilidades, riesgos y las correlaciones existentes entre los fondos.

Finalmente, con el sistema de información Bloomberg y de Thomson Reuters, se encontraron las cotizaciones diarias de los activos de cada uno de los mercados en los que los portafolios pueden invertir según sus características, para después poder generar los portafolios eficientes. Encontrando en Bloomberg todos los activos de renta variable, divisas y parte de renta fija y en Thomson Reuters, los bonos gubernamentales. Cabe aclarar que, en el caso de renta variable internacional se utilizó los índices de las principales bolsas del mundo y para los bonos de los gobiernos diferente a Colombia, los bonos a diez años más cotizados. Para la tasa libre de riesgo se descargó la curva cero cupón a 1 año de la página del Banco de la República.

## 6. Metodología

Luego de construida la base de datos con las características de cada uno de los portafolios, se hace una clasificación detallada de los fondos de pensiones, distribuyéndose en

<sup>1</sup>Una ficha técnica es un informe acerca de un portafolio en específico en el que se muestra su objetivo, las principales inversiones, la fecha de constitución y demás características del portafolio.

nueve grupos representativos, tales como, inversiones de renta fija, variable y divisas, como también con inversiones mixtas con perfiles de riesgo conservador, moderado y agresivo.

Posteriormente, se toma las cotizaciones de los activos en los que los portafolios pueden invertir y se hace un portafolio de media-varianza de Markowitz encontrando las fronteras eficientes de los mercados y finalmente la medida de rentabilidad ajustada denominada el "Sharpe Ratio" para cada uno de los portafolio.. Para entender de una mejor manera lo que se hizo en la investigación, se explicará a continuación el modelo que se desarrolló.

## 6.1. Relación de Sharpe

Los inversionistas consideran de suma importancia la volatilidad total de sus inversiones, si tenemos en cuenta la evaluación de desempeño de un respectivo fondo este se puede considerar como la volatilidad total que asume este fondo, hablando de riesgo sistemático y no sistemático. Para poder medir este desempeño en una cartera el índice apropiado es el índice de sharpe.

Este, calcula el rendimiento obtenido por cada unidad de riesgo total asumido, es decir, el cociente de dividir la prima por riesgo del fondo respectivo y la rentabilidad de un activo libre de riesgo entre la volatilidad o desviación estándar de los rendimientos de la cartera. Esto indica que un factor importante para evaluar este índice de desempeño es la volatilidad de los rendimientos, de tal manera que, si hay una menor volatilidad el índice de sharpe tendera a ser más alto y viceversa, este índice nos muestra cómo se comportan las carteras con respecto a las del mercado y si están logran superarlas. De igual manera este índice no solo permite evaluar los resultados obtenido por los gestores de carteras, sino que a su vez se ve el desempeño profesional de estos gestores. El índice de Sharpe es formulado de la siguiente manera:

$$S = \frac{R_c - R_f}{\sigma_c} \quad (1)$$

VARIABLES:

- $R_c$ : Rentabilidad del fondo
- $R_f$ : Rentabilidad del activo libre de riesgo
- $\sigma_c$ : Desviación típica de la rentabilidad del fondo

## 6.2. Modelo de Markowitz

El modelo de Markowitz tiene como objetivo hallar la composición óptima de un portafolio de valores, tal que maximice la rentabilidad al mínimo nivel de riesgo posible, Markowitz desarrolla su modelo teniendo en cuenta que una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado, o de la misma manera, si este presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad. Para el modelo de Markowitz los datos necesarios para formar un portafolio óptimo son las posibles rentabilidades de cada activo teniendo en cuenta que estas estén medidas como el promedio histórico de su rentabilidad, las varianzas para cada uno de los activos y las covarianzas entre todos los activos del portafolio. La optimización del modelo puede ser formulada de la siguiente manera:

$$\max E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i * E(R_i) \quad (2)$$

Sujeto a:

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n w_i * w_j * \sigma_{ij} \leq \sigma_o^2 \quad (3)$$

Cumpliendo la condición que

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1; w_i \geq 0; \nabla i \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

Variables:

- N: Número de activos en el portafolio
- $E(r_p)$ : Rendimiento esperado del portafolio
- $W_i$ : Proporción del activo i en portafolio
- $E(r_i)$ : Rendimiento esperado del portafolio i
- $R_i$ : Variable aleatoria del activo i
- Varianza del rendimiento del portafolio
- Covarianza entre los rendimientos de los activos del portafolio
- Varianza máxima permitida

Para la realización del modelo para la investigación se hizo en Microsoft Excel cada una de las matrices mencionadas anteriormente, igualmente se optimizó con la función de Solver teniendo donde también se tuvo encuentra la restricción de los mercados en no tener operaciones en corto.

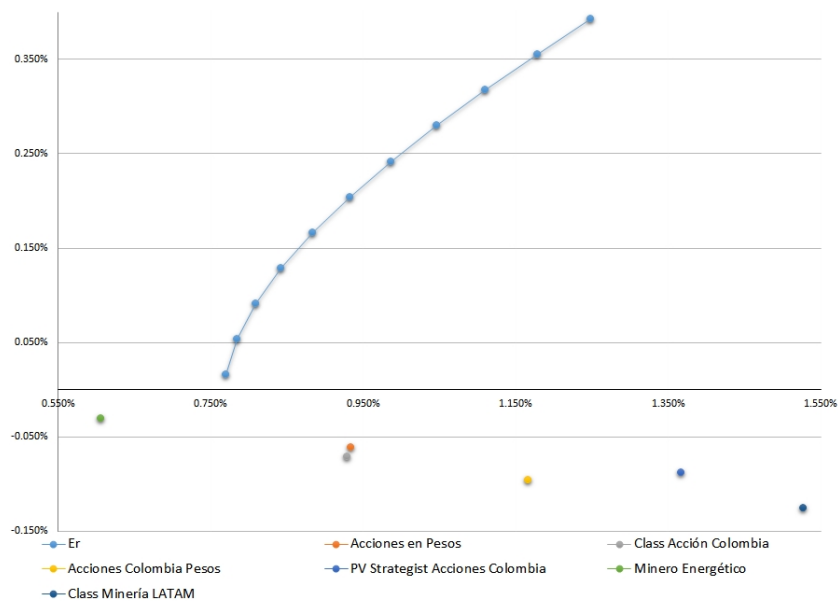
## 7. Resultados

Para cumplir con el objetivo propuesto de la investigación, utilizando el modelo de optimización de media varianza propuesto por Markowitz, en los fondos de pensiones voluntarios en Colombia, se analizó el primer grupo de fondos, cuyo portafolio coincidían en que su mayor participación era invertida en renta variable Colombia. En donde, a partir de los valores de unidad que tenían cada uno de ellos durante el 2015, se realizó la relación de sharpe, como se puede ver la cuadro 2, encontrando que la relación riesgo-retorno para todos los casos es negativa, es decir, que el grupo de portafolios de cada AFP no está garantizando una rentabilidad real y, adicionalmente, está es generando pérdida de la unidad.

		$\sigma$	$E[r_p]$	Sharpe Ratio
Old Mutual	PV Strategist Acciones Colombia	1.367 %	-0.088 %	-7.75 %
Protección	Minero Energético	0.605 %	-0.030 %	-8.06 %
Protección	Acciones en Pesos	0.934 %	-0.061 %	-8.52 %
Colfondos	Class Minería Latam	1.527 %	-0.126 %	-9.43 %
Colfondos	Class Acción Colombia	0.929 %	-0.071 %	-9.64 %
Porvenir	Acciones Colombia Pesos	1.167 %	-0.096 %	-9.80 %

Cuadro 2: Relación de Sharpe de cada portafolio del grupo 1  
(Elaboración propia)

Posteriormente, se realizó la frontera eficiente siendo esta la curva en que optimiza la relación riesgo-rentabilidad en el COLCAP, dejando en evidencia que los fondos de pensiones están asumiendo mayor riesgo del necesario sin obtener una rentabilidad a cambio, como se puede observar en el Gráfico 1.



Gráfica 1: Frontera eficiente de inversión y ubicación de los portafolios según su riesgo y rentabilidad. (Elaboración propia)

Se puede observar tres efectos puntuales con respecto a la gráfica, en primer lugar, está lo ocurrido con el fondo de protección denominado Minero Energético, que están asumiendo menor riesgo que el del portafolio de mínima varianza, por ende, se puede pensar que el perfil de riesgo que tiene el portafolio es tan bajo que llega al que su exposición tiende a tener una rentabilidad a cero.

En segundo lugar, se encuentran tres portafolios que son Acciones Colombia pesos de Porvenir, Class Acción Colombia de Colfondos y Acciones Colombia Pesos de Protección, el cual asumen un riesgo que se encuentran en la interacción entre el portafolio de mínima varianza y un portafolio de máximo retorno, sin embargo, los tres portafolios tienen un rendimiento negativo, el cual se puede explicar por los movimientos intradiarios del mercado colombiano.

En tercer lugar, están los dos portafolios que asumieron mayor riesgo que la frontera que son PV Strategist Acción Colombia de Old Mutual y Class Minería LATAM de Colfondos, cabe decir que por el riesgo tan alto que asumieron no fue recompensada con una rentabilidad alta, sino que fueron los dos portafolios que menor rendimiento tuvieron dentro del grupo.

Luego de observar el primer grupo de inversión, se analiza otros portafolios que también invierten en renta variable, aunque cambiando su geografía, es decir, observar los portafolios de renta variable internacional. Como se dijo en el capítulo de datos, para este caso, se tomaron los índices de las principales bolsas del mundo y no las acciones que la componen, pues estas toman el movimiento del mercado de forma general siendo a su vez un Benchmark de los activos transados.

Los portafolios que están en su mayoría invertidos en el renta fija internacional son once distribuidos en las cuatro AFP de la siguiente manera: cinco fondos de Protección llamados Acciones en Dólares, Acciones en Asia, Acciones en Mercados Emergentes, Acciones Internacionales y Portafolio Temático; tres de Porvenir que son Acciones Internacionales Dólar, Acciones USA y Acciones Internacionales Pesos; dos de Old Mutual denominados PV Acciones USA y PV Acciones Europa; y uno de Colfondos conocido como Class Internacional Renta Variable.

Luego de ser ubicados los portafolios, se vio su relación riesgo retorno de cada uno de ellos encontrando que, a diferencia de lo ocurrido en renta variable Colombia, ninguno tuvo una rentabilidad negativa y sólo en un caso la relación de Sharpe es menor de cero, como se puede observar en el cuadro 3.

		$\sigma$	$E[r_p]$	Sharpe Ratio
Porvenir	Acciones USA	1.14 %	0.10 %	7.39 %
Protección	Acciones en Dólares	1.01 %	0.09 %	7.16 %
Old Mutual	PV Acciones USA	0.76 %	0.07 %	6.42 %
Porvenir	Acciones Internacionales Dólar	1.17 %	0.09 %	6.22 %
Protección	Portafolio Temático	0.88 %	0.07 %	5.84 %
Protección	Acciones Internacionales	0.93 %	0.07 %	5.24 %
Colfondos	Class Internacional Renta Variable	0.82 %	0.06 %	5.17 %
Protección	Acciones en Asia	0.66 %	0.05 %	4.22 %
Protección	Acciones en Mercados Emergentes	0.75 %	0.04 %	2.59 %
Old Mutual	PV Acciones Europa	0.97 %	0.04 %	2.09 %
Porvenir	Acciones Internacionales Pesos	0.97 %	0.00 %	-1.61 %

*Cuadro 3: Relación de Sharpe de cada portafolio del grupo 2  
(Elaboración propia)*

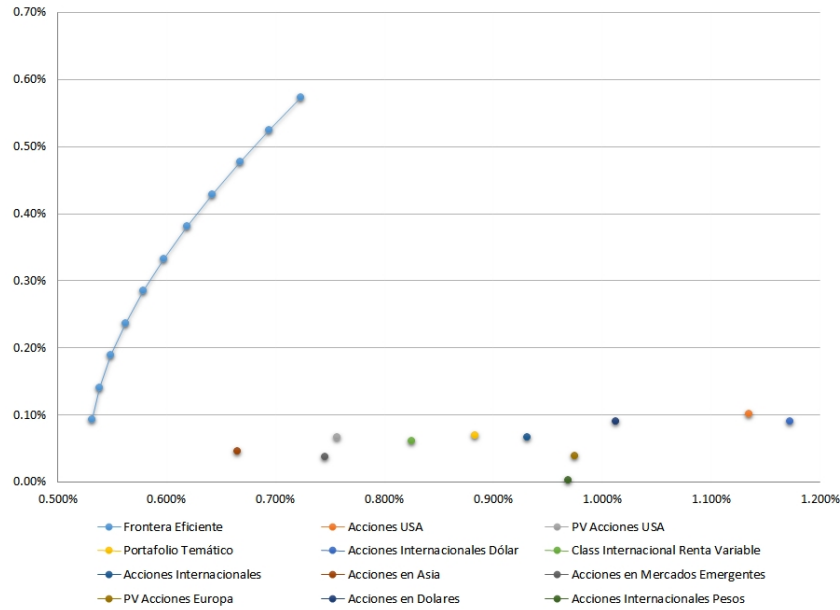
Es posible observar en el cuadro 3 que, los portafolios que invirtieron en Estados Unidos fueron quienes mayor retorno tuvieron, así mismo, se puede ver que el portafolio denominado Acciones Internacionales Pesos, tuvo una relación de riesgo retorno negativa debido a que existió un riesgo en el fondo, aunque no hubiese tenido una rentabilidad mayor al libre de riesgo, seguidamente, se puede observar en la gráfica 2 la comparación entre los 11 portafolios y la curva eficiente de inversión.

Como se puede observar en la gráfica, aunque los portafolios están siendo positivos, estos asumen mayor riesgo que la curva de eficiencia, por ejemplo, Acciones USA de Porvenir, quien es el que mejor riesgo retorno tiene del grupo, tiene la misma rentabilidad que la primera parte de la curva, aunque asume 2.5 veces más del riesgo. Así mismo, se puede observar que hay dos portafolios más que alcanzan a estar en el rango de la curva de eficiencia que son Acciones en Dólares de Protección y Acciones Internacional Dólar de Porvenir, que también, para conseguir una rentabilidad alta, asumen riesgos superiores de los que se deberían tomar.

Con respecto a los otros seis portafolios, se puede observar sólo un portafolio que entra en el dominio de la frontera eficiente y es Acciones Asia de protección siendo el octavo portafolio del grupo renta variable internacional con mayor relación de Sharpe, lo que se puede ver que para que este llegue a estar en el rango de la frontera debe duplicar su rentabilidad. Los demás muestran son portafolios que no están ni en el rango y tampoco en el dominio de la frontera eficiente, son portafolios que obtienen rentabilidades menores de 0.8 % diario asumiendo riesgos de hasta 0.3 % más de la frontera eficiente.

*Gráfica 2: Frontera eficiente de inversión y ubicación de los portafolios según su riesgo y rentabilidad del grupo 2. (Elaboración propia)*

Después de analizar los grupos de renta variable, se ven los portafolios que tienen inversiones asociadas a la renta fija y en el grupo 3 se encuentran 12 fondos que, cuyo portafolio, tienen mayor participación en renta fija Colombia, organizados de la siguiente forma: ocho que son de Porvenir denominados Renta Fija Colombia Pesos, Renta Fija 70 meses, Renta Fija 2022, Efectivo Colombia Pesos, FIMPRO, Inmoval I, Optimal Global II y Especial Premium Bajo Riesgo; existen otros tres de Old Mutual llamados PV Especial Renta Fija LP, PV Strategist Liquidez Colombia y PV Especial Abril 2022; Finalmente queda uno de Protección que es renta fija a largo plazo. Adicionalmente, es necesario decir que para poder comparar el grupo 3 se tuvo en cuenta los bonos colombianos a 12 meses, 4, 5, 10 y 15 años y los bonos del sector real y financiero de este mercado.



Como se puede apreciar en el cuadro 4, se puede ver que la mayoría de los fondos tienen una relación rentabilidad retorno negativa excepto en un caso en el que después se analizará, con respecto a los demás, se puede observar que la tasa libre de riesgo es muy superior a las rentabilidades obtenidas por los fondos siendo de 0.018% es por ello que, aunque el fondo tenga rentabilidades nominales positivas como Especial Premium Bajo Riesgo, PV Especial Renta Fija LP, PV Strategist Liquidez Colombia, FIMPRO y Efectivo Colombia Pesos, dichas rentabilidades reales son negativas.

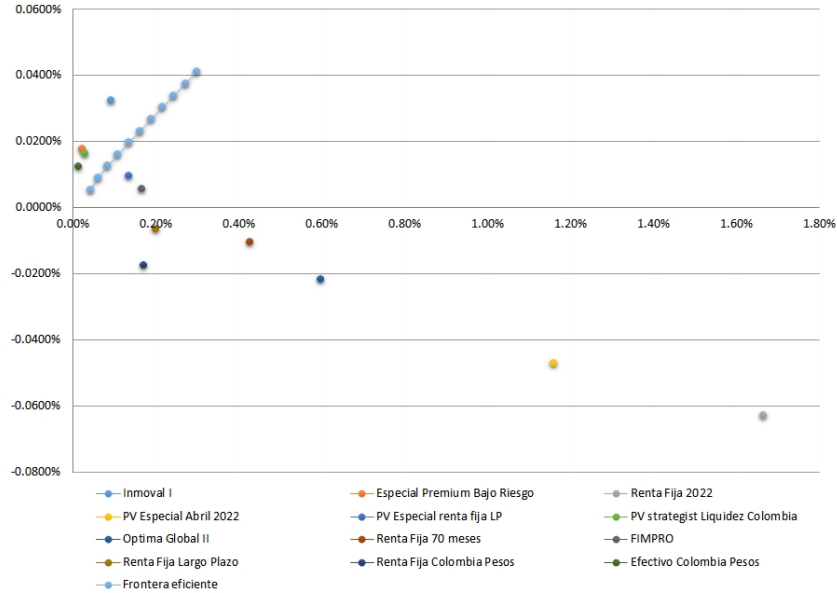
		$\sigma$	$E[r_p]$	Sharpe Ratio
Porvenir	Inmoval I	0.09 %	0.03 %	15.47 %
Porvenir	Especial Premium Bajo Riesgo	0.02 %	0.0178 %	-3.40 %
Porvenir	Renta Fija 2022	1.66 %	-0.06 %	-4.89 %
Old Mutual	PV Especial Abril 2022	1.16 %	-0.05 %	-5.66 %
Old Mutual	PV Especial Renta Fija LP	0.13 %	0.01 %	-6.59 %
Old Mutual	PV strategist Liquidez Colombia	0.03 %	0.02 %	-6.71 %
Porvenir	Optimal Global II	0.60 %	-0.02 %	-6.73 %
Porvenir	Renta Fija 70 meses	0.43 %	-0.01 %	-6.75 %
Porvenir	FIMPRO	0.17 %	0.01 %	-7.68 %
Protección	Renta Fija Largo Plazo	0.20 %	-0.01 %	-12.49 %
Porvenir	Renta Fija Colombia Pesos	0.17 %	-0.02 %	-21.03 %
Porvenir	Efectivo Colombia Pesos	0.01 %	0.01 %	-43.66 %

Cuadro 4: Relación de Sharpe de cada portafolio del grupo  
(Elaboración propia)

Luego de ver la relación de Sharpe, se puede observar en la gráfica 3 que, aunque las relaciones riesgo retorno son negativas, existe una eficiencia en algunos portafolios como PV Strategist Liquidez Colombia de Old Mutual, Especial Premium Bajo Riesgo de Porvenir y Efectivo Colombia pesos, en el cual tienen más rentabilidad respecto al riesgo que la combinación del portafolio de mínima varianza y el de varianza media, es decir, que la frontera eficiente también tiene parte en la cual la relación riesgo retorno es negativa. Adicionalmente, existen dos fondos que se acercan a la curva que es PV Especial Renta Fija LP de Old Mutual y FIMPRO de Porvenir y se ve que, aunque estén cerca de la frontera tienen una relación negativa explicado principalmente porque el retorno de la libre de riesgo es alto.

Cabe resaltar el portafolio Inmoval I de Porvenir pues fue el único activo que tuvo una relación riesgo retorno positivo, igualmente, el activo tiene un rendimiento mejor a menor

riesgo con respecto al portfolio óptimo de inversión, dicho efecto se puede generar por dos razones la primera es que posiblemente el fondo tenga información adicional que aumenta la rentabilidad con el mismo riesgo o porque han aprovechado los movimientos diarios del mercado.



Gráfica 3: Frontera eficiente de inversión y ubicación de los portafolios según su riesgo y rentabilidad. (Elaboración propia)

De igual manera, se puede ver que no todos los portafolios tienen buenos rendimientos y para poder analizar los fondos que tienen rentabilidades negativas, se pueden dividir en dos sub grupos, el primero, son quienes están dentro del dominio de la frontera eficiente, que son Renta Fija Colombia Pesos de Porvenir y Renta Fija Largo Plazo de Protección y el segundo subgrupo que es PV especial abril 2022 de Old Mutual y Renta Fija 2022 de Porvenir, es interesante analizar que el primer subgrupo tienen mejor rendimiento que el segundo debido a que su rentabilidad es mayor con menor riesgo como se ve en la gráfica, sin embargo, tienen un sharpe ratio más bajo que el segundo. Para entender el por qué la relación de Sharpe es menor, es pertinente centrarse en la ecuación y ver en un cambio del primer subgrupo al segundo, se inicia con un riesgo promedio de 0.19% y pasa a 1.41% y de una rentabilidad de -0.01% a -0.05% generando un aumento de la volatilidad en un 662.75% y una reducción de la volatilidad en un 361.2% y como se puede observar en la ecuación 5 la relación disminuye sin implicar una disminución de la deficiencia del portafolio.

$$\downarrow \Delta S = \frac{\downarrow \Delta R - R_f}{\uparrow \Delta \sigma_c} \quad (5)$$

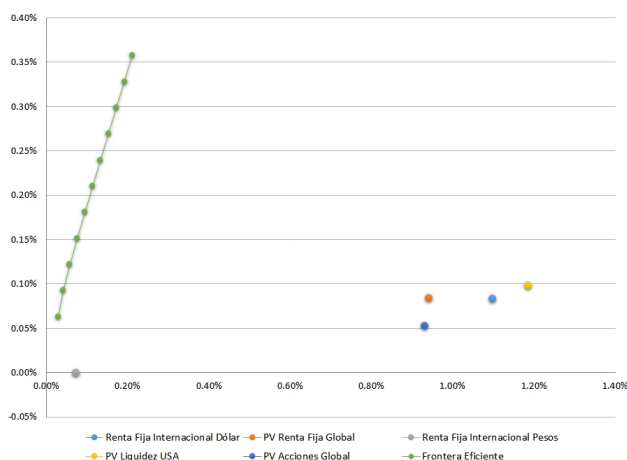
Luego de observar en el grupo 3 los portafolios nacionales de renta fija, se pasa a analizar los internacionales en el grupo 4, el cual tiene menor número de portafolios que el nacional pues sólo dos administradoras ofrecen portafolios con este mercado que son Old Mutual con PV Renta Fija Global, PV Liquidez USA y PV Acciones Global y Porvenir con Renta Fija Internacional Dólar y Renta Fija Internacional Pesos mostrando una relación riesgo retorno así.



		$\sigma$	$E[r_p]$	Sharpe Ratio
Old Mutual	PV Renta Fija Global	0.94 %	0.08 %	7.00 %
Old Mutual	PV Liquidez USA	1.19 %	0.10 %	6.76 %
Porvenir	Renta Fija Internacional Dólar	1.10 %	0.08 %	5.93 %
Old Mutual	PV Acciones Global	0.93 %	0.05 %	3.71 %
Porvenir	Renta Fija Internacional Pesos	0.07 %	0.00 %	-25.42 %

Cuadro 5: Relación de Sharpe de cada portafolio del grupo  
(Elaboración propia)

En los portafolios en los que se agrupan renta fija internacional se puede observar que la rentabilidad nominal dentro del portafolio del grupo es mayor o igual a cero, sin embargo, debido a que el fondo de porvenir llamado Renta Fija internacional Pesos no generó utilidad y si tuvo una exposición al riesgo generó que tuviese una relación de sharpe negativa.



Gráfica 4: Frontera eficiente de inversión y ubicación de los portafolios según su riesgo y rentabilidad. (Elaboración propia)

Ahora bien al compararse con un portafolio óptimo se ve que los portafolios tienen una exposición al riesgo más alta que la gráfica de media varianza, como se puede ver en la gráfica 4, se puede explicar el diferencial de las varianzas debido a que existe una reducción de todos los activos financieros de renta fija que hay en el mercado, por ejemplo, para los bonos gubernamentales se tomaron los de los principales países de las regiones y, adicionalmente, los bonos a 10 años, por ende, es posible que la reducción de los datos mencionados anteriormente, genere que los portafolios de renta fija tengan más riesgo que la curva de eficiencia.

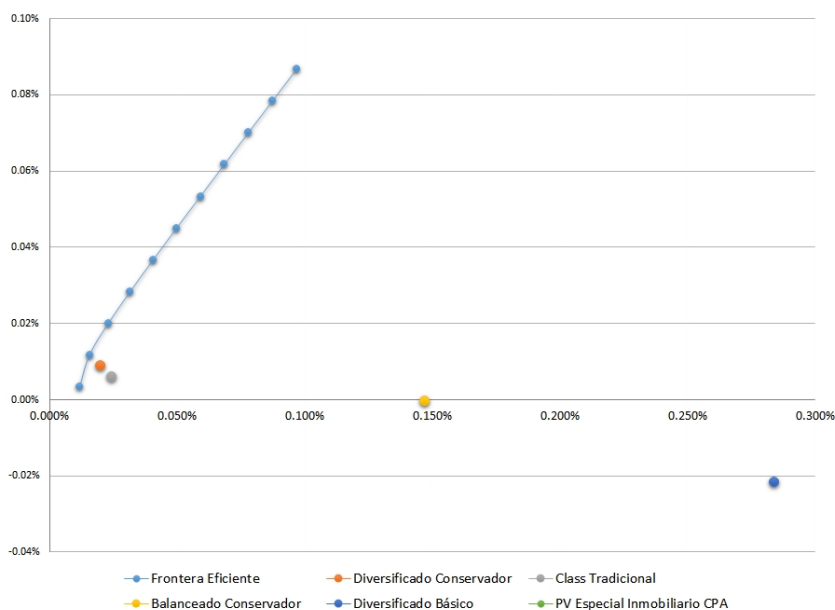
Luego de ver los portafolios que están invertidos en un solo tipo de mercado (renta fija o renta variable) es pertinente aclarar que existen varias interacciones entre los dos portafolios más flexibles y con mayor oportunidad de optimización, para ellos se pueden calificar a partir del perfil de riesgo, para empezar se analizará el perfil diversificado básico o conservador encontrando 4 portafolios los primeros dos son de porvenir llamados diversificado básico y diversificado conservador, el tercero es de protección denominado Balanceado Conservador y el cuarto es Class Tradicional de Colfondos.

Se puede observar en el cuadro 6 se encuentran la relación riesgo retorno de cada uno de los portafolios, en primer lugar, es necesario observar que al ser un portafolio de un perfil conservador unas volatilidades que no superan el 0.5 % y, así mismo, rentabilidades que están cerca a la rentabilidad libre de riesgo en dos casos e inferior a está en los otros dos.

		$\sigma$	$E[r_p]$	Sharpe Ratio
Porvenir	Diversificado Conservador	0.020 %	0.009 %	45.474 %
Colfondos	Class Tradicional	0.024 %	0.006 %	24.873 %
Protección	Balanceado Conservador	0.147 %	0.000 %	-0.100 %
Porvenir	Diversificado Básico	0.284 %	-0.022 %	-14.091 %

Cuadro 6: Relación de Sharpe de cada portafolio del grupo  
(Elaboración propia)

Como se mencionaba anteriormente, los fondos de pensiones que rinden a más de la tasa libre de riesgo, es decir Diversificado Conservador de Porvenir y Class Tradicional de Colfondos son los que tienen la relación de sharpe positiva cuya relación riesgo retorno es muy alta, mientras que los otros dos fondos que rentaron cero o menos, es decir, Balanceado Conservador y Diversificado Básico, tienen un sharpe negativo, sin embargo como se veía en Renta Fija Colombia, es necesario observar la interacción entre los fondos de pensiones y la frontera eficiente como se puede apreciar en el gráfico 5.



Gráfica 5: Frontera eficiente de inversión y ubicación de los portafolios según su riesgo y rentabilidad. (Elaboración propia)

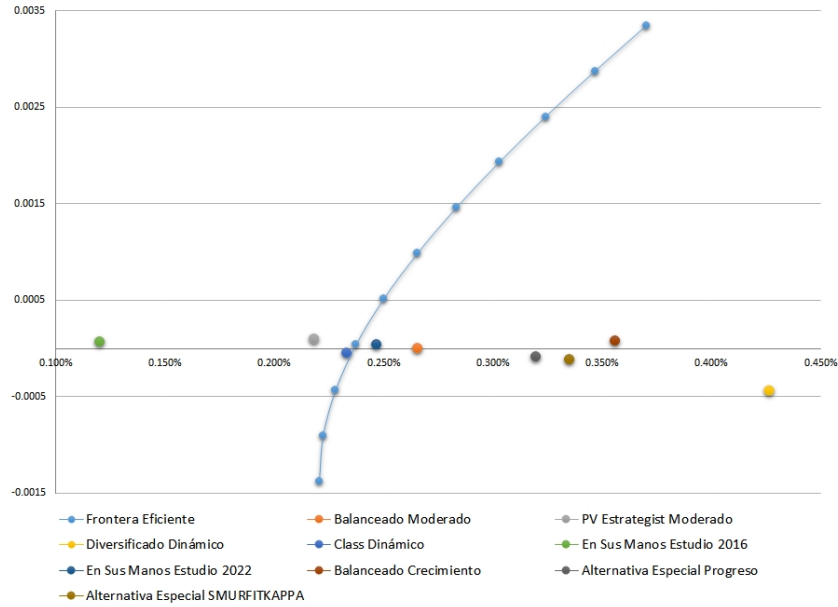
En el Caso del grupo 5 la relación de sharpe y la gráfica muestra que, Diversificado Conservador que es el que mayor relación de sharpe tiene es quien está más cerca de la frontera eficiente, igualmente pasa con class tradicional que está un poco más alejado y es por ello la disminución de la relación riesgo retorno, a diferencia de Balanceado Conservador y Diversificado Básico quienes asumen mayor riesgo que la curva eficiente y menor rentabilidad que el portafolio de mínima varianza.

El segundo portafolio diversificado a estudiar es el que tiene un perfil de riesgo mayor que el básico, es decir el moderado, a diferencia del perfil conservador existen más pues son nueve fondos distribuidos de la siguiente manera 5 de porvenir (Diversificado Dinámico, En sus manos estudio 2016, En sus manos estudio 2022, Alternativa especial progreso y diversificado SMURFITKAPPA), dos de protección (Balanceado Moderado y Balanceado Crecimiento), uno de Colfondos (Class Dinámico), resumidos en el cuadro 7.

		$\sigma$	$E[r_p]$	Sharpe Ratio
Protección	Balanceado Crecimiento	0.3556 %	0.0084 %	-2.8322 %
Old Mutual	PV strategist Moderado	0.2181 %	0.0100 %	-3.8774 %
Porvenir	En Sus Manos Estudio 2022	0.2467 %	0.0042 %	-5.7783 %
Protección	Balanceado Moderado	0.2655 %	0.0007 %	-6.6950 %
Porvenir	Alternativa Especial Progreso	0.3195 %	-0.0082 %	-8.3415 %
Porvenir	Alternativa Especial SMURFITKAPPA	0.3348 %	-0.0109 %	-8.7708 %
Porvenir	En Sus Manos Estudio 2016	0.1198 %	0.0071 %	-9.4572 %
Colfondos	Class Dinámico	0.2328 %	-0.0045 %	-9.8583 %
Porvenir	Diversificado Dinámico	0.4259 %	-0.0427 %	-14.3628 %

Cuadro 7: Relación de Sharpe de cada portafolio del grupo  
(Elaboración propia)

Lo que se puede apreciar es que toda la relación de riesgo retorno de los portafolios es negativa por dos razones principalmente porque no hay un rendimiento mayor a 0.02 % que es la tasa libre de riesgo utilizada en el trabajo, igualmente como se puede apreciar en la gráfica 6 se puede ver la interacción entre los activos y la frontera eficiente.



Gráfica 6: Frontera eficiente de inversión y ubicación de los portafolios según su riesgo y rentabilidad. (Elaboración propia)

Se puede ver que existen dos portafolios que son en sus manos estudio y PV strategist Moderado, que están asumiendo menor riesgo que portafolio libre de riesgo sin embargo tienen rentabilidades muy bajas, 0.007 % y 0.01 % respectivamente y por ser menores que la tasa RF entonces son negativas, adicionalmente cabe resaltar que el mejor sharpe lo tiene Balanceado crecimiento, que es el portafolio con rendimientos positivos más arriesgado del grupo y por ello tiene el sharpe más alto. Los portafolios de Class Dinámico y En sus Manos Estudio son quienes más cerca de la frontera eficiente están, finalmente es pertinente analizar la curva eficiente, pues está a diferencia de los demás grupos tiene parte de rentabilidad negativa, lo que muestra que parte de su relación riesgo retorno, como todos los portafolios del grupo, es menor de cero.

Finalmente se observa los fondos más riesgosos en la cual se encuentran cuatro portafolios dos de Old Mutual (PV strategist agresivo y PV Especial Agresivo) y uno de porvenir (Diversificado Extremo) cuya relación de sharpe se ve en el cuadro 8.

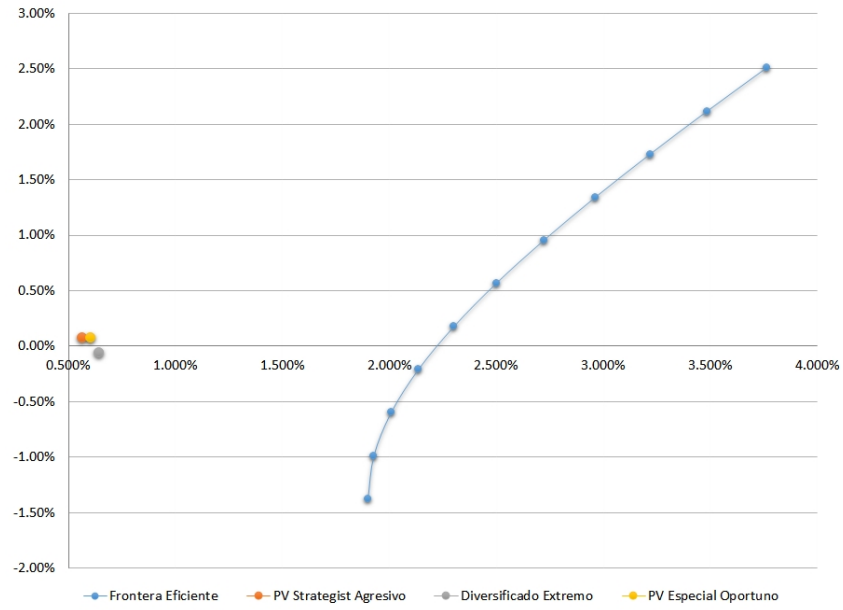
		$\sigma$	$E[r_p]$	Sharpe Ratio
Old Mutual	PV Strategist Agresivo	0.56 %	0.08 %	10.07 %
Porvenir	Diversificado Extremo	0.64 %	-0.05 %	-11.25 %
Old Mutual	PV Especial Oportuno	0.60 %	0.08 %	10.10 %

Cuadro 8: Relación de Sharpe de cada portafolio del grupo (Elaboración propia)

En la Relación se puede ver que se castiga al fondo que tiene las rentabilidades negativas pero los tres fondos asumen riesgos muy parecidos y en Old Mutual, sus dos portafolios, tienen una rentabilidad muy parecida y, por ende, una relación de riesgo retorno muy parecidos, adicionalmente, en la gráfica 7.

Gráfica 7: Frontera eficiente de inversión y ubicación de los portafolios según su riesgo y rentabilidad. (Elaboración propia)

Se puede observar que los fondos tienen un riesgo menor que el dado por el portafolio de mínima varianza, independientemente, todos los fondos que se estudiaron, incluso el de porvenir que tuvo



rentabilidades negativas, generaron mayor rendimiento que la frontera eficiente, dicho efecto se puede explicar principalmente porque no los activos que se tuvieron para generar la curva fueron diferentes a los que tuvieron en cuenta los portafolios al momento de invertir.

## 8. Conclusiones

En el estudio, en todos los grupos analizados, se construyó la frontera eficiente en cuanto a las decisiones de inversión, así mismo se buscó analizar el comportamiento de los fondos con respecto a sus pares teniendo en cuenta un análisis comparable y consistente, en donde se llegó a varias conclusiones que se mencionan a continuación.

El mayor hallazgo es que la mayoría de los fondos de pensiones voluntarias en Colombia asumen más riesgo del necesario asumiendo menores rentabilidades que la propuesta por el modelo de Markowitz, incluso, como se vio en algunos grupos, generando rentabilidades negativas.

Teniendo en cuenta el escenario base del estudio, se llegó a la conclusión que la mayoría de los fondos se encuentran debajo de la frontera eficiente, pero de igual manera, esta medida no ofrece conclusiones con respecto al proceso optimizador que realmente tengan los fondos ya que posiblemente las AFP realicen un proceso optimizador distinto al que planteamos en este análisis, pueden estar utilizando modelos como el single índice model o modelos que se ajusten a través de tiempo ya que el modelo que se planteó de Markowitz es un modelo estático. Por tal razón, es posible que este análisis dentro de otro modelo puede generar resultados óptimos.

Una de las mayores limitaciones a nivel operativo, es que al tener acceso a la información se encontraron varias debilidades, primero, que este acceso de información es publica pero restringida, es decir, en muchos casos, la información estaba incompleta o simplemente estaba muy generalizada lo que dificultó la aplicación de un análisis más profundo como en el caso de OLD MUTUAL donde la información estaba muy reducida y al tratar de mirar los objetivos de inversión no se lograba tener una información optima, así mismo que en algunos casos no daban los valores diarios por lo que se utilizó valores mensuales como lo observamos en el caso de COLFONDOS.

Otra de las limitaciones encontradas fue que se hace un supuesto en el que básicamente se coge una “canasta” de activos y suponemos que los fondos están invertidos ahí, pero en realidad no, por lo que estamos dando una frontera eficiente que asume diferentes riesgos ya sea mayor o menor, por ende en algunas ocasiones puede generar no comparabilidad entre la frontera y los portafolios.

Para finalizar, se propone que los fondos de pensiones voluntarias tengan como obligación educar constantemente a sus afiliados acerca de la naturaleza de su inversión en términos de rentabilidad, ya que se necesita informar a los afiliados acerca de los riesgos y beneficios que pueden tener de su inversión a largo plazo, pues al tomar una decisión de inversión este es un aspecto fundamental debido a que estas decisiones de inversión son tomadas por los mismos afiliados, por lo que estos deberían ser unos inversores racionales y los resultados apuntan a lo contrario ya que no existe una relación directa entre la rentabilidad y riesgo entre sus inversiones.

## 9. Bibliografía

Acosta, O. L., & Ayala, U. (2001). Reformas pensionales y costos fiscales en Colombia. Financiamiento Del Desarrollo (Vol. 116). Retrieved from <http://www.eclac.org/publicaciones/xml/8/9198/lcl1630e.pdf>

Alexander, E., & Grisales, D. (2016). Diseño de un portafolio de inversión a partir de un modelo de programación no lineal: caso Colombia 2013-2014, 9(2), 31–47.

Berggrun preciado, L., & Jaramillo Recio, F. (2010). PERFORMANCE EVALUATION, FUND SELECTION AND PORTFOLIO ALLOCATION APPLIED TO COLOMBIA'S PENSION FUNDS. ESTUDIOS GERENCIALES *Estud.gerenc*, 26(117), 13–40.

Bernal, C. (2015). Black-Litterman vs. Markowitz: un ejercicio de optimización de portafolios de inversión en Colombia Carlos. *Proposal*, 1. <http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004PhD>

Bloomberg

Cayón Fallón, E., & Ricardo Santo Rojas, T. DI. (2010). EVIDENCE OF ACTIVE MANAGEMENT OF PRIVATE VOLUNTARY PENSION FUNDS IN COLOMBIA: A PERFORMANCE ANALYSIS USING PROXY ETFs 1. ESTUDIOS GERENCIALES, 26(115), 13–38.

Colfondos. (Febrero de 2016). Colfondos. Obtenido de Fichas Técnicas Portafolios de Inversión: <https://www.colfondos.com.co/fichas-tecnicas>

Flórez Garcia, W. (2005). LA TEORÍA DE PORTAFOLIO Y LA GESTIÓN DE INVERSIONES DE LOS FONDOS DE PENSIONES DE PERÚ 1997 - 2002, 79–97.

Franco Arbeláez, L., Avendaño Rúa, C., & Barbutín Díaz, H. (2011). Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión. *Revista Tecno Lógicas* N.26, (26), 71–88.

García, C. M., & Moreno, J. A. (2011). Optimización de portafolios de pensiones en Colombia: el esquema de multifondos, 2003-2010. *Ecos de Economía*, 15(33), 139–183.

Jara Pinzón, D., Gómez Restrepo, C., & Pardo Amezquita, A. (2005). ANALISIS DE EFICIENCIA DE LOS PORTAFOLIOS PENSIONALES OBLIGATORIOS EN COLOMBIA, 1–32.

Jara, D. (2006). Modelo de la regulación de las AFP en Colombia y su impacto en el portafolio de los fondos de pensiones.

Laserna, J. M. (2007). UNA PROPUESTA PARA MEJORAR EL MANEJO DE RIESGO , LA DIVERSIFICACIÓN Y LA EFICIENCIA DE LOS PORTAFOLIOS DE, II(4), 7–23.

Mechán, F. de J. (2015). Evaluación de Factores de Riesgo en Portafolios de Inversión del Régimen de Pensión de Ahorro Individual en Colombia.

Old Mutual. (Febrero de 2016). Old Mutual. Obtenido de Fondos de pensiones Voluntarias : <https://www.oldmutual.com.co/quienes-somos/old-mutual-en-colombia/old-mutual-pensiones-y-cesantias-sa/fondo-de-pensiones-voluntarias/Paginas/fondo-de-pensiones-voluntarias.aspx>

Old Mutual. (Marzo de 2016). Old Mutual . Obtenido de Rentabilidades: <http://portal.oldmutual.com.co/om.rentabilidades.pl/oldmutual>

Porvenir. (Marzo de 2016). Porvenir. Obtenido de Desempeño: [https://www.porvenir.com.co/Personas/PensionesVoluntarias/AcercaProducto/Paginas/graficador\\_valorunidad\\_pv.aspx](https://www.porvenir.com.co/Personas/PensionesVoluntarias/AcercaProducto/Paginas/graficador_valorunidad_pv.aspx)

Porvenir. (Febrero de 2016). Porvenir. Obtenido de Ficha Técnica: <http://fichastecnicas.estrateg.com.co/#>

Preciado, L. B., & Roger, V. C. (2009). CÓMO CREAR UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN CON LAS OPCIONES QUE OFRECEN LOS FONDOS DE PENSIONES VOLUNTARIAS EN COLOMBIA: EL CASO DE SKANDIA’.

Protección. (febrero de 2016). Protección. Obtenido de Fichas Técnicas:  
<https://www.proteccion.com/wps/portal/proteccion/web/home/home-afiliados-pensionados/home-afiliados/ahorro-pensiones-voluntarias/fichas-tecnicas>

Protección. (marzo de 2016). Protección. Obtenido de Valor del Fondo:  
<https://www.proteccion.com/wps/portal/proteccion/web/home/home-afiliados-pensionados/home-afiliados/ahorro-pensiones-voluntarias/cifras-mercado/valor-fondo>

Thompson Reuters

Zubeldia, A. M., Zabalza, L. M. M., & Zubiaurre, M. Z. (2002). El modelo de Markowitz en la gestión de carteras 1. Cuadernos de Gestión Vol. 2., 2(Año), 33–46. <http://doi.org/10.1007/s12615-009-9018-0>