

Información Importante

La Universidad de La Sabana informa que el(los) autor(es) ha(n) autorizado a usuarios internos y externos de la institución a consultar el contenido de este documento a través del Catálogo en línea de la Biblioteca y el Repositorio Institucional en la página Web de la Biblioteca, así como en las redes de información del país y del exterior con las cuales tenga convenio la Universidad de La Sabana.

Se permite la consulta a los usuarios interesados en el contenido de este documento para todos los usos que tengan finalidad académica, nunca para usos comerciales, siempre y cuando mediante la correspondiente cita bibliográfica se le de crédito al documento y a su autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, La Universidad de La Sabana informa que los derechos sobre los documentos son propiedad de los autores y tienen sobre su obra, entre otros, los derechos morales a que hacen referencia los mencionados artículos.

BIBLIOTECA OCTAVIO ARIZMENDI POSADA
UNIVERSIDAD DE LA SABANA
Chía - Cundinamarca

I



Universidad de
La Sabana

**UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE PARA RECONOCER LAS
ESTRATEGIAS
DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO CUARTO
EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS SIMPLES
DE TIPO RAZÓN**

Jeimy Lorena Pérez Ortiz

Bogotá D. C., 2016

**UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE PARA RECONOCER LAS
ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO CUARTO EN
LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS SIMPLES DE
TIPO RAZÓN**

JEIMY LORENA PÉREZ ORTIZ

**TESIS DE MAESTRÍA PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAGISTER
EN PEDAGOGÍA**

ASESOR: JULIÁN RICARDO GÓMEZ NIÑO

UNIVERSIDAD DE LA SABANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRIA EN PEDAGOGÍA

AGOSTO, 2016

BOGOTÁ D. C.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, mi madre, mis hermanas y mi esposo por el apoyo incondicional ante cada reto que asumo en la vida.

A mis maestros, por sus grandes enseñanzas, acompañamiento y dedicación durante el proceso.

A mis estudiantes, que con sus diversas maneras de aprender, impulsan mi labor y me muestran cada día el compromiso de educar.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	6
ABSTRACT	6
INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO 1.....	8
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	8
Contextualización del problema.....	8
Justificación	12
Pregunta de investigación	15
Objetivos.....	15
General	15
Específicos	15
MARCO TEÓRICO	16
1. Antecedentes de investigación.....	16
Referentes teóricos	22
Los problemas aritméticos	22
Problemas multiplicativos	22
Aspectos semánticos de los problemas multiplicativos de tipo razón	27
Aspectos sintácticos de los problemas multiplicativos de tipo razón.....	28
La representación en los problemas de tipo multiplicativo.....	29
Las estrategias de resolución de los problemas multiplicativos	31
Ambientes de aprendizaje.....	33
CAPÍTULO 3.....	38
DISEÑO METODOLÓGICO	38
Enfoque.....	38
Alcance.....	38
Diseño de investigación	39
Población	41
Categorías de análisis	42
Técnicas e instrumentos de recolección de información.....	44
Cuestionario de actitudes.....	44
Prueba diagnóstica	45
Prueba de salida	48
Plan de acción.....	48
Propuesta de intervención	48
CAPÍTULO 4.....	53
ANÁLISIS DE RESULTADOS	53
Percepciones de los estudiantes	53
Descripción de las estrategias	57
Análisis de la intervención.....	68
Estrategias en la prueba de salida	71

Análisis comparativo de estrategias.....	74
Categoría multiplicación – razón	74
Agrupamiento- razón.....	75
Partición –razón.....	77
CONCLUSIONES.....	81
RECOMENDACIONES	82
Reflexión pedagógica.....	82
REFERENCIAS	83
ANEXOS.....	85

Índice de Tablas

Tabla 1. Clasificación de los problemas de tipo razón	17
Tabla 2. Multiplicación.....	23
Tabla 3. División 1	23
Tabla 4. División 2	24
Tabla 5. Producto de medidas. Multiplicación	24
Tabla 6. Producto de medidas. División.....	25
Tabla 7. Ambientes de Aprendizaje	34
Tabla 8. Categorías de análisis	42
Tabla 9. Encuesta de actitudes.....	45
Tabla 10. Problemas para la prueba diagnóstica	47
Tabla 11. ¿Cómo me veo en clase?	54
Tabla 12. ¿Cómo me ven los demás en clase?	55
Tabla 13. ¿Cómo cuido el medio ambiente?	56
Tabla 14. Descripción de las estrategias en la prueba diagnóstica	58
Tabla 15. Consolidado de estrategias por problema en la prueba diagnóstica	67
Tabla 16. Elementos comparativos. Prueba diagnóstica – Prueba de salida	72
Tabla 17. Consolidado de estrategias por problema en la prueba de salida	73

RESUMEN

La siguiente investigación surge como una propuesta para reconocer las estrategias que tienen los estudiantes de grado cuarto, del I.E.D. Federico García Lorca en la solución de problemas multiplicativos simples de tipo razón. Esta propuesta se crea a partir de la necesidad que tiene todo docente de reflexionar acerca de sus prácticas pedagógicas, con el fin de superar las dificultades en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, y fortalecer la competencia de resolución de problemas con estructura multiplicativa. Se propone un ambiente de aprendizaje con actividades basadas en situaciones semirreales dentro de un contexto ambiental, que promueva la creación de diversas estrategias en la solución de problemas matemáticos, al mismo tiempo que motive y dé sentido a lo que se aprende cuando se asocian situaciones matemáticas con la realidad del estudiante.

Palabras claves: Problemas multiplicativos, estrategias, ambientes de aprendizaje

ABSTRACT

The following research project emerges as a proposal to recognize the strategies Federico García Lorca school's fourth graders use in solving simple multiplication problems with ratio tables. This proposal arises from the need all teachers have to reflect on their teaching practices to overcome difficulties in the process of student learning, and to strengthen problem-solving competences with multiplication. A learning environment is proposed with activities based on semi-real situations within an environmental context, which promotes the creation of various strategies in solving mathematical problems, while motivating and giving meaning to what students learn when students associate mathematical situations with reality.

Keywords: multiplication problems, strategies, learning environment

INTRODUCCIÓN

El trabajo que a continuación se presenta es el producto del estudio hecho durante el desarrollo de la Maestría en Pedagogía orientada por la Universidad de la Sabana. Allí se generan espacios de reflexión acerca de las prácticas pedagógicas y los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Para este caso en particular, la indagación gira en torno a las estrategias que desarrollan los estudiantes de grado cuarto cuando se enfrentan a la resolución de problemas matemáticos con estructura multiplicativa.

En el primer capítulo, se destaca la pertinencia del estudio, la contextualización del problema y el reconocimiento de algunas de las dificultades que los estudiantes presentan en el área de matemáticas. Se plantea el problema y los objetivos de la indagación, resaltando la importancia de las diferentes estrategias que los estudiantes usan en el desarrollo de las competencias involucradas en el pensamiento matemático multiplicativo.

En el segundo capítulo, se exponen los antecedentes de investigación con la mirada de diferentes autores respecto a las estrategias utilizadas por los estudiantes en la resolución de problemas con estructura multiplicativa. Se presentan los argumentos teóricos relacionados con los aspectos semánticos y sintácticos de los problemas multiplicativos, y la clasificación que hacen autores como Vergnaud y Maza sobre los problemas multiplicativos de tipo razón.

En el tercer capítulo se plantea la metodología utilizada y las características de la investigación; de igual manera, se describe el contexto en el que está hecho el estudio y el diseño e implementación de los instrumentos utilizados en cada una de las etapas.

Finalmente, en el cuarto capítulo, se presenta el análisis de resultados, donde se establece una relación entre lo planteado y lo hallado; se analiza la forma en la que fue llevado a cabo el proceso; y se proponen las conclusiones, recomendaciones y reflexiones pedagógicas del estudio con respecto a los objetivos inicialmente propuestos.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Contextualización del problema

Cuando se analizan las dificultades en las estrategias de los estudiantes para solucionar un problema matemático, es necesario mencionar los factores que intervienen en su resolución. Barroso (2007) señala que estos factores pueden estar relacionados con:

- El problema matemático,
- El estudiante que resuelve el problema y
- El contexto del estudiante.

Es decir, cuando se habla del tipo de problema matemático, intervienen elementos de corte semántico y sintáctico que se relacionan de manera directa con el problema, puede ser su estructura, significado o longitud, entre otros. Cuando los factores están relacionados con los estudiantes, intervienen los conocimientos previos, las estrategias, las creencias, las actitudes y las emociones, que tienen que ver con la manera como los estudiantes proceden para resolver el problema. Y cuando los factores tienen que ver con el contexto del estudiante, se involucran aspectos como los recursos, el medio que lo rodea, la familia, las oportunidades y la manera en que interactúan con su entorno físico y cultural.

Aunque los docentes suelen evadir algunos de los elementos mencionados anteriormente en una clase de matemáticas, todos se involucran en el aprendizaje ya sea de manera directa o indirecta. En este sentido, las dificultades en la comprensión de un problema matemático por parte de los estudiantes, no sólo están relacionadas con los aspectos cognitivos, sino también con los aspectos afectivos (Nieto, Carrasco, Barona, Piedehierro & Del Amo 2010).

Es por ello que al contemplarse los tres factores mencionados por Barroso (2007) que reúnen Nieto, Carrasco, Barona, Piedehierro y Del Amo (2010) en dos aspectos como lo cognitivo y lo afectivo, se logra una visión más amplia de las causas que generan el fracaso en el aprendizaje de las matemáticas. El que un estudiante no comprenda lo que se explica en clase, no depende solo de sus operaciones mentales, esta situación puede estar asociada a otros factores externos, relacionados con su contexto que determinan a su vez su bloqueo o desmotivación en el proceso. Es el caso de los estudiantes cuyas familias comentan permanentemente sus creencias con respecto a lo difícil que es aprender matemáticas, o aquellas que sostienen lo innecesario que es aprenderlas, e incluso que consideran que solo logran aprenderla los genios. Todas estas ideas influyen en el ambiente donde el estudiante se desarrolla y en la disposición que tiene para estar en una clase de matemáticas.

En esta medida, la situación se reitera cuando en la escuela los docentes también reflejan este tipo de creencias y sus prácticas pedagógicas no evidencian estrategias apropiadas que permitan contrarrestar o cambiar estas concepciones. El que aún se conciben las matemáticas como una asignatura exacta y rígida, limita la construcción de saberes y el desarrollo de competencias (Gómez, 2007). La manera en la que generalmente un docente procede para resolver un problema matemático da cuenta de su concepción y de la ausencia de estrategias con las que puede abordar el área, es el caso de algunos docentes que enseñan primero el algoritmo para luego dar uso del mismo, cuando se quiere dar solución a un problema.

Es tan importante cambiar esta concepción y concebir las matemáticas con un significado dentro de la realidad, que los Estándares Básicos de Competencias en el área de matemáticas (MEN, 2007) proponen el proceso de resolución de problemas como un eje principal en la preparación y el desarrollo de las actividades curriculares, y no como una actividad que suele ser aislada y esporádica dentro de una clase escolar. Una muestra de ello, son los propósitos que se plantean en los estándares matemáticos que a continuación se presentan, donde se establece que para el caso de la multiplicación, al terminar el grado tercero un estudiante (MEN, 2007):

- Resuelve y formula problemas en situaciones de variación proporcional.
- Usa diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Reconoce el uso de las magnitudes y sus unidades de medidas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifica, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables (p.80).

Es claro entonces, que la multiplicación pasa de ser un simple proceso operacional a ser un evento mucho más significativo, cuando se aborda desde situaciones que conducen a la solución de un problema matemático. Sin embargo, es inquietante y vale la pena cuestionarse acerca de ¿por qué en las escuelas algunos docentes siguen enseñando contenidos y la multiplicación sigue estando sujeta a la memorización de tablas de multiplicar, más que a un proceso de comprensión y significado? Una de las razones, puede ser la que manifiesta Gómez (2007) asociada a los condicionamientos institucionales presentes en el proceso de enseñanza, como por ejemplo; pretender que “el tiempo de aprendizaje es el mismo que el tiempo de enseñanza o que desarrollar pensamiento es lo mismo que desarrollar contenidos” (p.10). Lo que indica que el cambio de estrategias no está relacionado solamente con la autonomía del docente sino también con los acuerdos y la visión que la institución tenga del proceso de enseñar.

Otra de las razones está relacionada con la ausencia de herramientas por parte de algunos docentes, para interpretar las etapas secuenciales por las que pasan los estudiantes al resolver un problema. El no comprender lo que los estudiantes representan e indagar poco sobre la justificación que dan al usar sus estrategias, en algunas ocasiones sesga la creatividad del estudiante y crea la dependencia de escuchar siempre la instrucción para iniciar su proceso de resolución. Es importante permitir que los estudiantes propongan y utilicen estrategias propias y diferentes a las enseñadas, que promuevan la comprensión más que la memorización para la resolución de problemas multiplicativos (Gómez, 2007).

Por otra parte, la experiencia como docente del colegio Federico García Lorca ha generado una reflexión ante la ausencia de mecanismos oportunos para identificar las estrategias de los estudiantes. Al mismo tiempo, ha permitido detectar algunas de las dificultades que los estudiantes presentan cuando se enfrentan a la solución de un problema matemático. Lo que ha llevado a pensar en las posibles causas que generan tal situación; se ha llegado a conclusiones como las siguientes cada vez que una estudiante no acierta en su respuesta cuando soluciona un problema:

- Equivocación en la estructura y el lenguaje en el que está presentado el problema; en este sentido, el estudiante no comprende la redacción del enunciado o no es claro el lenguaje que es usado.
- Limitación en el uso de la estrategia para desarrollar el problema; atendiendo a la ausencia de estrategias por parte de los estudiantes, debido a que poco exploran otros caminos para llegar a la solución.
- Incomprensión del algoritmo matemático; es el caso en que el estudiante aún no ha construido un significado del algoritmo y recurre al menos acertado o relaciona los datos del problema de manera inadecuada.
- Descontextualización en la situación planteada en el problema; es decir, las palabras que son usadas en el problema no son familiares y la situación que allí se describe es totalmente ajena a su realidad.

Estas posibles causas, conducen a pensar en la importancia que tiene conocer y comprender la manera como los estudiantes proceden para resolver un problema, sus estrategias y sus formas de actuar en el aula; permiten al docente enriquecer su reflexión pedagógica, y tener herramientas para orientar su enseñanza, se evita así que en ocasiones se hagan afirmaciones apresuradas con respecto al proceso de aprendizaje del estudiante, sin haber considerado los diferentes elementos que le impiden resolver un problema.

Por lo tanto, no es suficiente entonces que los estudiantes lean correctamente un problema o que manejen claramente el algoritmo de la multiplicación, puesto que aspectos como la estructura semántica del problema y el contexto que hayan sido usados, pueden ser

determinantes para que la solución que propongan no sea la acertada. Además, la estricta forma en la que se ha mostrado una única estrategia para resolver el problema, como es la de escribir los *datos*, *continuar con la operación* y *finalizar con la respuesta*, han limitado la búsqueda de estrategias por parte de los estudiantes de grado cuarto, que conducen a la exploración de soluciones mucho más analíticas, creativas y al mismo tiempo acertadas.

Justificación

La experiencia docente requiere de una reflexión permanente en la que su práctica debe ser evaluada y replanteada, con el fin de hacerla más eficiente al momento de desarrollar cada uno de los procesos involucrados en el aprendizaje de los estudiantes. Los retos que a diario surgen al momento de hacer una clase conllevan a que los docentes se vean en la necesidad de cuestionar su quehacer en el aula, con el fin de obtener unos mejores resultados y colmar las expectativas tanto de los estudiantes como de la institución en general.

El plan de estudios propuesto por la institución Educativa Distrital Federico García Lorca para el grado cuarto inicia con un logro promocional que apunta al desarrollo de habilidades por parte de los estudiantes para comprender y formular problemas matemáticos. Establece dentro de los ejes temáticos para el primer período del año escolar el uso del algoritmo de la multiplicación y la división, sin mencionar el uso de diversas estrategias que los estudiantes deben desarrollar para la solución de los problemas matemáticos. Esto da lugar a la planeación y aplicación de actividades por parte de los docentes, diseñadas la mayoría de las veces bajo el paradigma del ejercicio con un referente puramente matemático, en las que se observan las dificultades que los estudiantes presentan cuando se enfrentan a problemas que requieren de la multiplicación o de la división para su solución.

Estas dificultades por parte de los estudiantes siguen siendo evidentes cuando en los resultados de las pruebas saber aplicadas para el año 2015 a los estudiantes de grado tercero, quienes actualmente son lo que cursan el grado cuarto, se demuestra que en lo concerniente a la competencia de *planteamiento y solución de problemas* se encuentran en un promedio similar al de las demás instituciones, es decir, en un bajo desempeño, con características

comunes tanto en las fortalezas como en las debilidades al aplicar, elegir y justificar procedimientos para la solución de un problema, al igual que para razonar frente a la pertinencia de las respuestas luego de darle la solución.

De igual manera, se manifiesta la ausencia de estrategias por parte de los estudiantes para resolver un problema, con las quejas que se escuchan por parte de los docentes de otras áreas cuando expresan que los estudiantes “no comprenden un problema”, “no saben multiplicar” o “no saben dividir” cada vez que les plantean situaciones propias de sus áreas en las que se requiere de un conocimiento matemático. Esta situación genera insatisfacción al pensar en la existencia de fallas en el proceso de enseñanza-aprendizaje que impiden obtener los resultados esperados cuando se habla de unas matemáticas que el estudiante pueda relacionar y aplicar en su propia realidad.

En este contexto, y de acuerdo con el proceso llevado en el área de matemáticas con los estudiantes de grado cuarto del colegio Federico García Lorca durante el año, surge la necesidad de buscar nuevas estrategias con que se logren superar las dificultades que obstaculizan el proceso y fortalezcan la competencia de resolución de problemas, en especial aquellos que se relacionan con la estructura multiplicativa como parte del propósito institucional en su plan de estudios para el primer período del año escolar.

Lograr que los estudiantes resuelvan un problema matemático implica comprender su forma de proceder, ya que esta puede verse afectada por sus ideas previas, su realidad, sus creencias y sus capacidades, entre otros. Es por ello que la búsqueda de estrategias pedagógicas debe conllevar a una serie de actividades pertinentes que promuevan ambientes de aprendizaje y faciliten el camino para dar solución a determinada situación, expuesta a través de un problema matemático.

Si bien es claro que los estudiantes enfrentan problemas en su vida cotidiana, donde no necesariamente utilizan algoritmos matemáticos para resolverlos, existen otro tipo de problemas en los que necesariamente requieren de unas bases matemáticas para resolverlos. Es allí donde radica el reto del docente, llevar a los estudiantes en este caso de grado cuarto, a aplicar estrategias matemáticas propias para dar solución a una situación problema

planteada en el aula, que al mismo tiempo logre dar significado a lo que se está aprendiendo en ese momento.

En este sentido, los problemas multiplicativos planteados serán situados en un contexto cultural, de tipo ambiental, que motive y destaque la importancia de reflexionar sobre situaciones relacionadas con su propia realidad. Es el caso de la contaminación que viven algunos sectores de la localidad de Usme al estar ubicados a pocos kilómetros del botadero de Doña Juana, de donde en ocasiones llegan olores desagradables que afectan la integridad física de las personas. La institución, interesada en generar este tipo de reflexiones, ha decidido incorporar en el Proyecto Ambiental Escolar PRAE, algunas actividades para separar las basuras, reciclar las bolsas de los refrigerios y reutilizar el material.

Sin embargo, gracias a la oportunidad que tengo como docente de pertenecer al PRAE de la institución, he podido identificar que muy pocos estudiantes, ya sea por el desconocimiento de la cantidad de basura que generan, o del impacto que puede tener esto en un futuro, no asumen una actitud responsable frente al cuidado de su entorno. Por lo tanto, se parte de esta otra necesidad observada en la institución educativa, la de promover en los estudiantes hábitos que permitan el cuidado del medio ambiente, a través de la clasificación de residuos sólidos y el uso moderado de recursos naturales como el agua, para diseñar un ambiente de aprendizaje que suscite el interés de los estudiantes y genere una reflexión acerca de su realidad al buscar una solución a los problemas matemáticos.

A partir de estas situaciones, se propone entonces la reflexión pedagógica para identificar y reconocer las estrategias propias de los estudiantes, que les permitan resolver problemas multiplicativos simples de tipo razón, dentro de un contexto ambiental que al mismo tiempo promuevan la creación de hábitos para el uso de recursos naturales y generen una conciencia ambiental.

Pregunta de investigación

¿Cuáles son las estrategias utilizadas por los estudiantes de grado cuarto en la solución de problemas multiplicativos simples de tipo razón dentro de un ambiente de aprendizaje?

Objetivos

General

Proponer un ambiente de aprendizaje que permita fortalecer e identificar las estrategias que utilizan los estudiantes de cuarto grado del Colegio Federico García Lorca para resolver problemas multiplicativos simples de tipo razón.

Específicos

1. Diseñar e implementar un ambiente de aprendizaje que permita a los estudiantes resolver problemas multiplicativos de tipo razón, en contextos ambientales.
2. Describir las estrategias de los estudiantes de grado cuarto para solucionar problemas multiplicativos de tipo razón.
3. Categorizar las estrategias que surgen en los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de problemas multiplicativos de tipo razón, dentro de un ambiente de aprendizaje.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

1. Antecedentes de investigación

En este capítulo se describen estudios hechos por diferentes autores que han abordado elementos relacionados con la investigación en curso. Se destacan los aportes que cada uno de ellos hace a la problemática antes planteada. Además, se exponen los referentes teóricos que fundamentan la investigación, puntualizando sobre los problemas aritméticos de tipo multiplicativo, las formas de representación, las estrategias de resolución y la influencia de un ambiente de aprendizaje en el abordaje de las matemáticas.

Gómez, J. R. (2007). Estrategias utilizadas por los niños de cuarto grado para resolver problemas multiplicativos simples de tipo razón. Tesis de pregrado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

El trabajo de investigación presentado por Gómez (2007) describe las estrategias utilizadas por los estudiantes de grado cuarto para resolver problemas multiplicativos de tipo razón. Destaca la importancia de analizar las acciones de los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de un problema matemático, ya que a pesar de que el estudiante cuenta con las técnicas de cálculo o los algoritmos necesarios para resolver un problema, no las aplica de manera adecuada.

La investigación aborda los problemas multiplicativos desde lo semántico y lo sintáctico, centrándose en los problemas multiplicativos simples de tipo razón que requieren de una sola operación para ser resueltos. En cuanto al aspecto semántico, el autor toma como referencia las clasificaciones que hacen autores tales como Vergnaud (2000), Schwartz (1988), Nesher (1988) y Maza (1991). Describe los elementos que cada uno de ellos involucra en la clasificación de los problemas y las relaciones que se presentan entre cada una de estas miradas.

Tabla 1. Clasificación de los problemas de tipo razón

Maza		Schwartz	Vergnaud		Enunciado
Problemas de razón	Multiplicación razón	$3 \times 250 / 1 = ?$	M ₁	M ₂	Juan ha comprado 3 manzanas, cada una cuesta 250 pesos. ¿Cuánto ha pagado en total?
			1	250	
			3	?	
	Partición razón	$3x = 750$	M ₁	M ₂	Juan ha comprado 3 manzanas, por las que ha pagado 750 pesos. ¿Cuánto vale cada manzana?
			1	?	
			3	750	
	Agrupamiento razón	$? \times 250 / 1 = 750$	M ₁	M ₂	Juan ha comprado varias manzanas. Si cada manzana cuesta 250 pesos y le han cobrado 750 pesos en total ¿Cuántas manzanas compró?
			1	250	
			?	750	

Fuente: Elaboración propia, basada en Gómez (2007).

Sin embargo, el estudio enmarca con mayor profundidad la clasificación hecha por Maza (1991). Esta clasificación describe tres tipos de problemas:

- Problemas de Multiplicación-razón.
- Problemas de Partición-razón.
- Problemas de Agrupamiento-razón.

De la misma manera, se muestra la influencia de los aspectos sintácticos en la elaboración de un problema. Se destacan algunas variables: el formato del problema, la longitud del enunciado, los datos numéricos y las proposiciones.

Al implementar este tipo de problemas con los estudiantes, se diseña un instrumento de juego denominado “Naípe Multiplincito” en el que se muestran los problemas con la clasificación anterior a través de representaciones icónicas, como se presentan a continuación.

Gráfica 1. El naipe de multiplincito



Fuente: Gómez (2007).

Uno de los mayores aportes que brinda el documento hecho por Gómez (2007) a la investigación en curso, es el estudio que se hace de las diferentes estrategias que utilizan los niños para dar solución a un problema, se identificaron estrategias para la multiplicación de tipo razón como: realista, esquemática, aditiva con agrupaciones, aditiva con duplicaciones, multiplicativa con descomposición y multiplicativa con algoritmo.

De igual manera, que se observan estrategias para la división de tipo repartición razón tales como: realista de reparto, esquemática de reparto, aditiva de reparto, aditiva de ensayo y error, multiplicativa de mitades, multiplicativa de ensayo y error y multiplicativa con división. También identifica las estrategias para la división de tipo agrupamiento razón, como por ejemplo: realista de agrupar, esquemática de agrupar, aditiva con ensayo y error, aditiva con agrupamiento, aditiva con resta reiterada, aditiva con duplicaciones, multiplicativa de ensayo y error, y multiplicativa con división.

El autor identifica estas estrategias dentro de unas categorías que están relacionadas con 4 representaciones que permiten evidenciar el proceso jerárquico de las estrategias y una

posible ruta de construcción por la que los estudiantes pasan para poder resolver un problema multiplicativo de tipo razón. Las categorías son las siguientes:

- Realista
- Esquemática
- Aditiva
- Multiplicativa

Obando, G. (2015). Sistemas de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica. Tesis de doctorado. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

La investigación hecha por el doctor Obando (2015), se enmarca en el campo del razonamiento proporcional o razonamiento multiplicativo, comprendiendo el conjunto de problemáticas asociadas al aprendizaje o la enseñanza de los objetos de conocimiento *razón, proporción y proporcionalidad* (RPP). Su propósito es indagar sobre las prácticas matemáticas institucionalizadas en estudiantes de grado 3° y 4°, el estatus epistemológico de los objetos de conocimiento y el sistema de prácticas que permiten su constitución como objetos de conocimiento.

El desarrollo metodológico del estudio, estuvo organizado en dos etapas: la primera consistió en involucrarse de manera directa en las clases de los estudiantes de grado tercero y cuarto de una institución educativa de Cali, donde se observaba y caracterizaba la acción conjunta entre los maestros y los estudiantes. La segunda etapa estuvo enfocada en el estudio histórico- epistemológico de prácticas matemáticas a través del tiempo.

En este sentido, esta investigación se relaciona con el proyecto que actualmente se adelanta, en la medida en que permite conocer las diferentes miradas que los estudiantes tienen del objeto de conocimiento anteriormente nombrado y los procesos de pensamiento

que se dan cuando se parte de una relación de variables para definir términos como la razón y la proporción.

Así mismo, el estudio ofrece una mirada mucho más detallada de la forma en que se procede para enseñar la multiplicación en una institución. Se reconocen las fallas que tiene la institución al implementar este tema y se propone una construcción un poco más amplia desde la perspectiva del isomorfismo de medidas, que logre superar las dificultades destacadas a lo largo de las observaciones.

Parra, G. H. & Rojas, J. C. (2011). Matemáticas y loncheras saludables: Un ambiente de aprendizaje de exploración e indagación relativo a situaciones multiplicativas con estudiantes de cuarto grado de primaria. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional.

La investigación que enmarca este trabajo nace de las dificultades que presentan los estudiantes del grado cuarto al resolver un problema multiplicativo. Dificultades relacionadas con el procedimiento que utilizan los estudiantes y la interpretación que dan a los resultados luego de haber aplicado los algoritmos.

Los referentes teóricos que fundamentan el estudio, parten de concebir la matemática en un sentido crítico, (Frankenstein, 2009, citado en Parra y Rojas, 2011), se afirma que “el objetivo principal de la educación matemática crítica no es entender mejor los conceptos matemáticos, más bien, es entender cómo usar ideas matemáticas para hacer un mundo mejor” (p. 24). Esto implica replantear las prácticas pedagógicas de tal manera que las matemáticas involucren situaciones de la vida real, permitan una toma de decisiones y generen una mirada más justa y política en los ciudadanos.

En esta medida, la investigación retoma la importancia de los escenarios de investigación planteados por Skovsmose (2000), donde se distinguen dos formas de organizar

las actividades en las prácticas educativas y tres tipos de referencia, los cuales al ser combinados generan seis ambientes de aprendizaje que dinamizan una clase de matemáticas. Sin embargo, se presta mayor atención al ambiente dado por el escenario de la investigación bajo un referente asociado a situaciones reales, ya que permite la participación activa de los estudiantes y se concibe una exploración y explicación de situaciones que surgen a medida que se plantea la situación real a solucionar.

Ahora bien, en lo concerniente a la multiplicación, el estudio se basa en la clasificación que hace Vergnaud (2000) de los tipos de problemas multiplicativos, presenta cuatro clases en situaciones de multiplicación y división:

- Multiplicación
- División – Partición
- División – Cuotición
- Cuarta Proporcional

Como estrategia dentro del trabajo se propuso generar *un ambiente de aprendizaje con referencia en la nutrición saludable*; basado en situaciones reales como las loncheras saludables y los problemas de nutrición como obesidad y falta de apetito.

Esta estrategia requirió de todo un proceso en el que a través de charlas informativas, lectura de tablas de calorías, cuentos, guías y actividades planteadas en historietas con dibujos animados, los estudiantes se apropiaran de la situación resolviendo los problemas allí planteados y reflexionaran acerca de la importancia de comer saludablemente.

Referentes teóricos

Los problemas aritméticos

La definición de problema matemático va más allá de un ejercicio matemático, supone de un cierto nivel de complejidad que requiere todo un plan para resolverlo, más que la aplicación de un algoritmo ya conocido. Martínez & Olmo (2002) consideran como un problema matemático “toda situación que entrañe una meta a lograr y en donde casi siempre existe un obstáculo para alcanzar dicha meta.” (p. 91). Esto implica que resolver un problema matemático exige tanto la comprensión de un enunciado, como el uso de una operación matemática; es decir, se da una relación de variables de corte sintáctico y semántico, además del reconocimiento del tipo de operación que debe ser usada para resolverlo.

Existen varias operaciones que permiten resolver un problema y se diferencian según su estructura; está el problema con estructura aditiva que encierra las operaciones de adición o sustracción y el problema con estructura multiplicativa que incluye las operaciones de multiplicación o división para ser resuelto. A su vez, cada problema puede ser considerado simple o compuesto; esto depende de las operaciones que se requieran por cada estructura para resolverlo.

Ya sea en la estructura aditiva o en la estructura multiplicativa, un problema simple es aquel que exige una sola operación para resolverlo y, por el contrario, un problema compuesto de estructura aditiva o multiplicativa requiere de dos o más operaciones para que pueda ser solucionado.

Problemas multiplicativos

Autores como Vergnaud (1983), Schwartz (1988), Nesher (1988) y Maza (1991) han clasificado en sus investigaciones los problemas simples con estructura multiplicativa a partir

de los aspectos semánticos relacionados con el significado de los conceptos en el problema. A continuación serán abordados de manera general dos de los autores mencionados anteriormente, Vergnaud (1983) y Maza (1991).

Vergnaud (1983) en sus aportes identifica dos categorías de la estructura multiplicativa: el isomorfismo de medidas y el producto de medidas.

En el *isomorfismo de medidas* se encuentra una proporción simple y una directa entre dos espacios de medida M_1 y M_2 . Se da una relación entre cuatro cantidades, en las cuales una de ellas es igual a uno y de acuerdo a la cantidad que se desconozca de las tres restantes, surgen los tres tipos de problemas que se ilustran con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. En una tienda cada botella de agua cuesta 600 pesos. Si se compran 4 botellas de agua ¿Cuánto se paga en total?

Tabla 2. Multiplicación

M_1	M_2
1 botella	$a=600$
$b= 4 \text{ botellas}$	$c=x$

M_1	M_2
1	A
B	X

En este ejemplo surge el primer tipo de problema llamado *multiplicación*, dado que la cantidad que se desconoce es la cantidad c , y se requiere esta operación para resolverlo.

Ejemplo 2. Se compran 4 botellas de agua en una tienda. Si se pagan 2.400 pesos en total ¿Cuánto cuesta cada una?

Tabla 3. División 1

M_1	M_2

M_1	M_2

1 botella	$a=x$	1	X
$b=4$ botellas	$c=2.400$	B	C

En este segundo ejemplo, se evidencia un tipo de problema que hace parte de la *división*, el cual requiere de encontrar el valor de a , es decir el valor de la unidad.

Ejemplo 3. Se compraron varias botellas de agua a 2.400 pesos. Si cada una cuesta 600 pesos ¿Cuántas botellas se compraron?

Tabla 4. División 2

M₁	M₂	M₁	M₂
1 botella	$a=600$	1	A
$b=x$	$c=2.400$	X	C

En este tercer ejemplo, el autor describe un segundo tipo de problema de la *división*, el cual consiste en encontrar el valor de b que se desconoce, relacionado con la cantidad de unidades.

En el *producto de medidas* intervienen tres espacios, de los cuales al combinar M_1 y M_2 se obtiene el tercer espacio M_3 . Al igual que en la categoría anterior, esta estructura presenta dos clases de problemas como se evidencia con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4: un joven quiere combinar cada saco con cada pantalón y viceversa. Si tiene 3 sacos y 4 pantalones. ¿Cuántos trajes distintos puede formar?

Tabla 5. Producto de medidas. Multiplicación

M₁	M₂	M₃
Sacos =3	Pantalones =4	Trajes =?

En este problema se tienen las medidas elementales y se debe encontrar la medida-producto atendiendo a la *multiplicación*.

Ejemplo 5: un joven quiere combinar cada saco con cada pantalón y viceversa. Si tiene 3 sacos y se forman 12 trajes. ¿Cuántos pantalones diferentes tiene?

Tabla 6. Producto de medidas. División

M₁	M₂	M₃
Sacos =3	Pantalones =?	Trajes =12

En este problema se debe encontrar una de las medidas elementales puesto que se conoce la medida-producto atendiendo a la *división*.

Maza (1991) sostiene que los problemas multiplicativos se clasifican a partir de los factores involucrados en la operación, como el multiplicando y el multiplicador, y establece cuatro tipos de problemas multiplicativos que se mencionan a continuación:

Problemas de razón: este tipo de problemas concibe el multiplicador como una cantidad extensiva¹ y el multiplicando como una cantidad intensiva² en donde no es posible un intercambio, es decir, no se concibe la multiplicación como una operación conmutativa. Aquí se consideran tres clases de problemas:

- Multiplicación-razón
- Partición-razón
- Agrupamiento-razón

¹ Una cantidad extensiva (E) es aquella que Schwartz denomina entidad o dimensión; así por ejemplo “4 botellas”, la palabra botella representa solo una cantidad que puede ser sumada y su referente, es decir la botella no se altera.

² Una cantidad intensiva (I) se refiere a la razón que se establece entre dos cantidades, su expresión numérica surge de la relación multiplicativa entre dos constantes.

Problemas de comparación: este tipo de problemas considera la cantidad intensiva como un cuantificador que actúa como multiplicador, indicando el número de veces que se repite la cantidad extensiva. De la misma manera que los anteriores, concibe tres tipos de problemas:

- Multiplicación-comparación
- Partición-comparación
- Agrupamiento-comparación

Problemas de combinación: a diferencia de los tipos de problemas anteriores, donde la multiplicación se concibe como una operación unitaria, en este caso la multiplicación es una operación binaria en donde las dos cantidades iniciales se combina al mismo tiempo para resolver el problema. Para este caso existen dos clases de problemas:

- Multiplicación-combinación
- División-combinación

Problemas de conversión: este tipo de problemas concibe la cantidad intensiva como razón y como cuantificador, se parte de dos cantidades intensivas para dar como resultado otra cantidad intensiva. En este caso, de acuerdo con el papel que tomen las dos cantidades intensivas se pueden obtener las clases de problemas:

- Multiplicación-conversión
- División-conversión

Aspectos semánticos de los problemas multiplicativos de tipo razón

Partiendo de la clasificación hecha por Maza (1991) en cuanto a los problemas simples de estructura multiplicativa, en este estudio se pretende analizar de manera más detallada lo que corresponde a los problemas multiplicativos de tipo razón.

Multiplicación – razón: Este tipo de problemas se relaciona con uno de los que Vergnaud (1983) clasifica dentro de su estructura de isomorfismo de medidas, consiste en hacer uso de la multiplicación para resolverlo. Según Schwartz (1998) se multiplica una cantidad intensiva conocida, por una cantidad extensiva también conocida, para hallar una cantidad extensiva desconocida:

$$I \times E = ?$$

Retomando el ejemplo 1, la relación entre las cantidades es:

$$600 \frac{\text{pesos}}{1 \text{ botella}} \times 4 \text{ botellas} = ?$$

Partición – razón: Este tipo de problema requiere de la división para ser resuelto; se asocia de manera directa con la idea de reparto, en la medida en que una cantidad dada debe ser distribuida en cierto número de grupos, de tal manera que cada grupo quede con cantidades iguales. La estructura en términos de Schwartz (1988) es la siguiente:

$$? \times E = E'$$

Retomando el ejemplo 2, la relación entre las cantidades es:

$$? \times 4 \text{ botellas} = 2.400 \text{ pesos}$$

Agrupamiento – razón: Los problemas de agrupamiento se relacionan también con la división. Sin embargo, a diferencia del anterior se conoce el número de grupos en los que está dividida la cantidad inicial dada, mas no se conoce la cantidad de elementos que componen cada grupo. La estructura en términos de Schwartz (1988) es la siguiente:

$$I \times ? = E'$$

Retomando el ejemplo 3, la relación entre las cantidades es:

$$\frac{600 \text{ pesos}}{1 \text{ botella}} x? = 2.400 \text{ pesos}$$

Aspectos sintácticos de los problemas multiplicativos de tipo razón

Dentro de los factores que están asociados a los aspectos sintácticos de los problemas multiplicativos se encuentra el lenguaje con el que es expresado el enunciado, presenta consigo una serie de características que pueden vislumbrar u oscurecer la comprensión del problema.

En primer lugar, existen diversas expresiones que se usan para enunciar un problema multiplicativo, como por ejemplo la expresión *cada uno* para indicar los problemas de reiteración de cantidades, o la expresión *por* para indicar los problemas de razón (tasa).

En segundo lugar, el orden y la forma en que son expuestos los datos en el problema pueden conllevar posiblemente a complejizar la comprensión del enunciado. En este sentido, se propone una de las múltiples formas de expresar un problema de tipo multiplicativo como enunciar tres proposiciones de las cuales dos son enunciativas P_1, P_2 y una es interrogativa P_3 ; estas se pueden presentar en diferente orden dentro del problema. Por ejemplo: Enunciativa P_1 , interrogativa P_3 y enunciativa P_2 ; o también, interrogativa P_3 , enunciativa P_1 y enunciativa P_2 .

En tercer lugar, la presencia de las variables y el empleo de las magnitudes en la solución de un problema influyen significativamente en la medida en que ayudan a contextualizarlo. De tal manera que las cantidades a emplear en este tipo de problemas se relacionan con aquellas que son de tipo discreta y continua discretizada, se define esta última como una cantidad que se caracteriza por ser continua, como el dinero, que permite establecer relaciones de correspondencia de una denominación a otra, pero a su vez es discretizada porque toma valores enteros positivos (Gómez, 2007).

La representación en los problemas de tipo multiplicativo

La resolución de problemas matemáticos relaciona procesos cognitivos como la comprensión y la representación. Lograr que realmente se comprenda, consiste precisamente en que se dé un reconocimiento de esos significados mediante la relación entre la información actual y el conocimiento previo adquirido (Fuenmayor & Villamil, 2008). Es decir, que asumiendo una mirada un poco más constructivista, como lo menciona Ausubel, comprender es sinónimo de aprender. Una actividad se convierte en significativa cuando el conocimiento nuevo está relacionado con el que ya posee el alumno (Carretero, 1997). Es allí donde la representación cobra sentido, puesto que construir conocimiento implica pensar en el tipo de representaciones que los estudiantes se hacen al momento de comprender una situación.

Gómez (2007) identifica variadas formas de representar un problema de tipo multiplicativo:

Representación realista: es la representación a partir del dibujo, en la que los estudiantes detallan y cuentan cada uno de los elementos para resolver la situación.

Representación esquemática: es la representación en la que los niños a través de esquemas, como la agrupación de cantidades, secuencias numéricas o cualquier otro símbolo numérico, resuelven el problema.

Representación aditiva: es la representación en la que los estudiantes introducen la adición a medida que van abreviando los procedimientos.

Representación multiplicativa: es la representación en la que finalmente usan algoritmos de la multiplicación o la división para solucionar los problemas.

Es posible entonces, relacionar la comprensión y la representación en la solución de un problema. De cierta manera, la dificultad de comprensión radica en la construcción de una representación de los elementos y de la relación que tienen entre sí (Martínez, 2008). Por lo tanto, solucionar un problema involucra factores que se relacionan no solo con el problema a resolver, sino también con el estudiante que lo resuelve y el contexto en el que se encuentra inmerso (Barroso, 2007), no es posible dar cuenta de las tácticas cognitivas usadas por el estudiante para resolver un problema, remitiéndose simplemente a los elementos relacionados con la estructura del enunciado o con el sistema simbólico involucrado, es importante incluir la contribución que hacen otros factores no necesariamente cognitivos que influyen en el comportamiento del individuo (Rimoldi, 1997).

Una forma de enunciar un problema puede ser a través de las imágenes. Esto podría permitir visualizar la situación planteada, identificar los datos del problema y hacer inferencias con mayor claridad sobre la solución. En este sentido, las representaciones exigen de una elaboración para que logren los procesos esperados, en tanto que la representación inicial puede convertirse en el camino para llegar de lo que se considera fácil a lo difícil, o por el contrario de lo difícil a lo fácil (Bruer, 1995).

Descubrir cómo piensan los estudiantes no es un proceso fácil y más aún, cuando sus palabras no logran describir con claridad lo que se pretende expresar, es entonces cuando la necesidad de hacer observable el pensamiento lleva a la búsqueda de situaciones que permitan tal manifestación, se llega a la representación como una de las claves que permite relacionar este proceso de pensamiento con una acción externa que deja ver lo que se encuentra en la mente de los niños (Saldaña 2012).

Existen modelos intuitivos asociados a las operaciones multiplicativas construidos por los niños a temprana edad. Algunos autores asocian este modelo intuitivo a una adición repetida para el caso de la multiplicación y así mismo conciben dos modelos asociados a la división; estos son: el modelo partitivo que inicialmente tienen todos los niños y el modelo cuotitivo que se va dando en la medida en que se trabaja el modelo partitivo. Existe el interrogante de si estos modelos intuitivos son innatos en los niños o se van adquiriendo con el paso del tiempo dentro de las experiencias en la escuela (Fischbeim, Deri, Nello y Marino, 1985, citado por Saldaña, 2012).

Ahora bien, cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de un problema multiplicativo, emergen otras estrategias que ayudan a dar solución al problema, Mulligan y Mitchelmore, (citados por Saldaña, 2012), conciben para este caso, tres modelos intuitivos que surgen cuando la solución del problema matemático requiere de la multiplicación: el modelo del conteo directo, el modelo de la adición repetida y el modelo del algoritmo multiplicativo. Para el caso en que el problema requiere de la división, los modelos a usar, según estos autores, son los mismos, con la diferencia de que se agrega la sustracción repetida.

Las estrategias de resolución de los problemas multiplicativos

La forma en que procede el estudiante para resolver un problema, demuestra la manera en que lo está comprendiendo, la estrategia que usa para llegar a su solución permite ver el proceso de abstracción y el nivel de desarrollo en el que se encuentra. Según Maza (1991), se pueden contar cinco niveles de desarrollo progresivo de las estrategias que dejan ver en el estudiante el paso de la estructura aditiva a la estructura multiplicativa; estos son:

Recuento unitario: Consiste en contar uno a uno los elementos que se indican en el problema, para ello el estudiante necesita representar con materiales concretos o con dibujos la situación planteada.

Doble recuento: Se realiza un recuento unitario reiniciándolo desde los elementos que se tienen en cada grupo, es decir, cuenta los grupos al igual que los elementos existentes en cada uno, haciendo pausa entre cada grupo para ir completando la secuencia.

Recuento transaccional: A diferencia de la estrategia anterior, no se recurre a una representación concreta de la situación y se cuenta el número de grupos haciendo énfasis en el último elemento de cada grupo.

Estrategia aditiva: Se domina completamente el recuento por grupos, se realizan adiciones para calcular el resultado total de los elementos que hay en los grupos.

Recuperación de hechos multiplicativos: Se acude directamente a las bases multiplicativas para establecer la relación entre los dos números correspondientes con el de los elementos y el de los grupos.

Estas estrategias son aplicadas a la resolución de problemas que impliquen una multiplicación, es decir, a los problemas de tipo *multiplicación-razón*. En tanto, para los problemas de división, es decir, los de tipo *partición-razón* y *agrupamiento-razón* se plantean las siguientes estrategias:

Estrategia de resta reiterada: Consiste en descubrir la cantidad que se debe ir restando de acuerdo con los grupos dados en el problema.

Estrategia de reparto: Se inicia repartiendo a cada grupo cierta cantidad de elementos y se van restando hasta que se logra repartir todos sin que queden cantidades diferentes en cada grupo.

Estrategia de ensayo y error: Se acude a la multiplicación buscando y ensayando cuál es la cantidad que al ser operada con la cantidad conocida permite obtener el total de elementos dados en el problema.

Estrategia aditiva: Es la estrategia en la que se suman la cantidad de elementos que se agrupan para hallar la cantidad de veces que se puede hacer.

Estrategia aditiva con múltiplos: En esta estrategia se combina la suma con la multiplicación, es decir, usando un múltiplo de la cantidad que se desea repartir, se opera acercándose un poco a la cantidad total de elementos dados y se adicionan los faltantes hasta completar el total.

Estrategia multiplicativa: Hay un manejo claro de la multiplicación que permite al estudiante que la aplique para dar la solución al problema indicado.

Ambientes de aprendizaje

La distante relación que suele presentarse entre la clase de matemáticas y la realidad de los estudiantes ha conducido al desinterés y el fracaso de muchos de ellos (Sánchez, B. J., & Torres, J, 2009). Asumir un tema alejado de la realidad, presentado sólo como un ejercicio matemático propuesto por el docente en el salón de clase, es lo que ha llevado a muchos autores a pensar en las matemáticas con una perspectiva crítica, es decir, generar espacios en donde el docente y el estudiante tengan igual oportunidad de participación, proponer situaciones en donde los estudiantes sean agentes activos en el desarrollo de las clases y promover la toma de decisiones desde una mirada distinta.

Permitir que el estudiante se pregunte y busque explicaciones genera escenarios de investigación donde no hay límites en el aprendizaje, concebir las múltiples variables en un ejercicio y suscitar cambios en una situación inicial dada involucran el interés tanto de los estudiantes como del docente para ir más allá de lo propuesto. Para lograr estas situaciones, Skovsmose (2000) presenta seis ambientes de aprendizaje y propone dos tipos de organización de actividades con los estudiantes:

Los escenarios de investigación, donde se invita al estudiante a involucrarse en un proceso de exploración y explicación con una participación más activa, se sale de la norma en donde se da la explicación del algoritmo por parte del docente para luego ser replicada por el estudiante.

El paradigma del ejercicio, donde se brinda mayor importancia a la aplicación de algoritmos matemáticos, siguiendo los pasos expuestos por el docente, prescindiendo de preguntas que motiven el interés del estudiante por investigar.

Estas actividades, a su vez, tienen tres tipos de referencia: las matemáticas puras, la semirrealidad y las situaciones de la vida real, las cuales, al combinarse, originan los seis tipos de ambientes de aprendizaje que se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 7. Ambientes de Aprendizaje

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Fuente: Skovsmose (2000)

Cada ambiente de aprendizaje presenta unas características en las que predominan diferentes procesos. Sánchez y Torres (2009) amplían un poco la explicación de cada ambiente: El primer ambiente de aprendizaje se concibe bajo el paradigma del ejercicio con un referente puramente matemático. Su enfoque se centra en la solución de algoritmos matemáticos que no requieren una profundización en el porqué de su solución o la importancia del proceso para llegar a ella. Ejemplo:

$$2. (4 + 3) = (2.4) + (2.3)$$

$$8 + 6 = 8 + 6$$

$$14 = 14$$

El segundo ambiente de aprendizaje surge de la combinación entre las matemáticas puras y los escenarios de aprendizaje. En este ambiente se admiten cuestionamientos frente a los ejercicios matemáticos dados, con preguntas secuenciales que conduzcan a la respuesta y permita explorar diferentes soluciones. Ejemplo:

Observe la siguiente secuencia de números 2 11 38 119...

¿Qué número sigue? Y luego de ese ¿cuál sigue? Encuentre una regularidad y escriba una expresión que permita hallar el valor de cualquier posición de la secuencia.

¿Qué pasa si el primer número cambia a 3? ¿Se puede encontrar de manera similar una expresión? En caso afirmativo, ¿cuál? En caso contrario ¿Por qué? ¿Qué conclusión le sugiere este ejercicio? (Sánchez y Torres, 2009).

El tercer ambiente de aprendizaje se forma con un referente en la semirrealidad y los ejercicios matemáticos. Allí se presentan situaciones cotidianas con datos que no son reales y requieren de la aplicación del algoritmo matemático para su solución. En este caso las respuestas a las que se llegan son ajenas a la realidad, por lo tanto, su resultado es poco creíble, convirtiéndose en un ejercicio lejano a sus intereses. Ejemplo:

A las 8:00 am. la temperatura es de -3°C . A las 9:00 am. ha subido 6 grados, a las 4:00 pm. ha subido 7°C más y a las 11:00 pm. ha bajado 13°C . ¿Cuál es la temperatura a las 11:00 pm? (Sánchez y Torres, 2009).

El cuarto ambiente de aprendizaje se crea dentro de un escenario de investigación, con un referente semirreal. Este ambiente de aprendizaje enmarca el desarrollo de la investigación, la cual pretende que los estudiantes a partir de situaciones ambientales semirreales, como el reciclaje de algunos residuos sólidos y el uso moderado de los recursos naturales, se interesen por el cuidado de su entorno. En este ambiente no se define al estudiante el algoritmo que debe usar, por el contrario, se propone una búsqueda de estrategias que permitan encontrar la respuesta acertada, con preguntas que generen un proceso de exploración e indagación sobre situaciones, que aunque no son tan cercanas a su cotidianidad, puede ser similares a sus experiencias en algún momento. Ejemplo:

Lee la siguiente situación y usa la estrategia que desees para encontrar la respuesta.

Una familia paga por su factura de agua 30.000 pesos al mes, si cada uno consume 3 metros cúbicos de agua durante el mes. ¿Cuántos cuesta 1 metro cubico de agua? Si el gasto se reduce a 2 metro cúbicos por persona. ¿Cuánto ahorraría la familia?

El quinto ambiente de aprendizaje se enmarca dentro del paradigma del ejercicio con un referente de situaciones de la vida real. Allí los problemas planteados en una clase de matemáticas deben estar basados en datos reales, los cuales brindan sentido en tanto que se pueden generar espacios de reflexión respecto a la solución lograda con la aplicación del algoritmo que se requiera. Ejemplo:

Basado en estadísticas de desempleo de los últimos 7 años, se puede preguntar sobre el aumento o disminución del desempleo, se pueden hacer comparaciones entre diversos períodos de tiempo, diferentes países, etc. (Sánchez y Torres, 2009).

El sexto ambiente de aprendizaje surge de la combinación entre los escenarios de investigación y las situaciones de la vida real. Es un ambiente que logra un aprendizaje significativo en los estudiantes, en tanto que se parte, al igual que en el escenario anterior, de situaciones reales, que permiten en los estudiantes un proceso de investigación y las actividades propuestas no solo generan motivación por aprender sino que también brindan la posibilidad de conocer mucho más de lo que se había propuesto inicialmente. Ejemplo:

El proyecto energía es un proyecto se concentró en modelos de entrada y salida-salida de energía. Como introducción, los estudiantes calcularon la cantidad de energía (medida en kilo julios, kj) de algunos tipos de desayuno. Luego, empleando fórmulas provenientes de investigaciones deportivas, se calculó cuanta energía se emplea en un cierto paseo en bicicleta. Estas fórmulas expresaron el uso de energía como una función de distintos parámetros, como la velocidad, la longitud del viaje, el tipo de bicicleta y el “área frontal” del ciclista.” (Skovsmore, 2000).

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se sustenta la metodología de investigación implementada, se describen cada una de las fases, las categorías de análisis y los instrumentos usados a lo largo del estudio.

Enfoque

El enfoque cualitativo presenta características que se ajustan al problema a investigar dado que su proceso es flexible en cada una de las etapas, va de lo particular a lo general, las hipótesis se van generando a medida que se da el proceso, se recolectan datos a partir de técnicas basadas en la observación, entrevistas, preguntas abiertas, experiencias personales, entre otros, que no requieren de un análisis estadístico; es un proceso de indagación flexible y se fundamenta en una perspectiva interpretativa que permite el estudio de un contexto natural a partir de la observación y la intervención. Finalmente, este enfoque presenta una realidad por construir y no por conocer (Sampieri, H. Fernández y Baptista, 2010).

Alcance

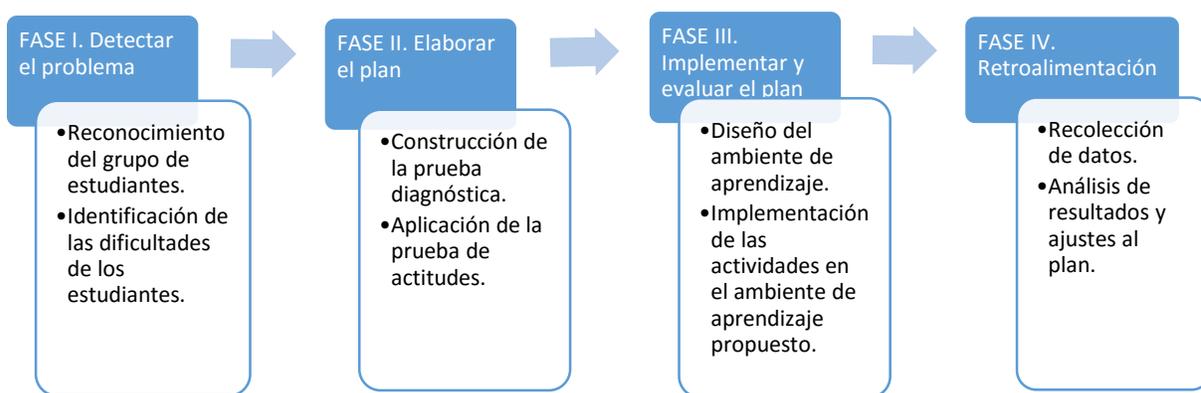
Debido al propósito de la investigación en cuanto a reconocer las diversas estrategias que los estudiantes implementan en la solución de problemas multiplicativos de tipo razón, se propone un análisis de resultados de tipo interpretativo que permita evidenciar los niveles de representación por los que pasan los estudiantes para resolver un problema en la medida en que exteriorizan sus estrategias. El estudio genera una mejor reflexión en la práctica docente en tanto que se propone un ambiente de aprendizaje que permita comprender la forma en que los estudiantes proceden para resolver un problema multiplicativo de tipo razón.

Diseño de investigación

El estudio se basa en el diseño de tipo investigación-acción, el cual pretende analizar un problema cotidiano manifestado en un salón de clase. Para este caso, el observador hace parte de la investigación, como un actor determinante en el diseño de prácticas pedagógicas a implementar, con el fin mejorar la situación determinada por la dificultad que los estudiantes presentan al encontrar una estrategia con la que pueda solucionar un problema matemático simple de estructura multiplicativa. Además, las fases a seguir durante el proceso se ajustan a las planteadas por la investigación-acción, dado que se parte de una observación en que se detecta el problema a investigar, se hace una interpretación de la situación y se formula un plan para resolverlo, seguidamente se actúa e implementan estrategias que conduzcan a mejorarlo y finalmente se hace una retroalimentación con los resultados que se obtienen (Sandín, 2003, citado por Sampieri, 2010).

Atendiendo a lo anterior, se proponen cuatro fases en la investigación, planteadas en el siguiente esquema:

Gráfica 2. Fases de la investigación



Fase I. Detectar el problema. Durante el proceso de investigación se hizo un reconocimiento del grupo de estudiantes a través de una observación minuciosa en las clases de matemáticas,

así como en los diferentes espacios de la institución, esto con el fin de registrar algunas de las actitudes que presentaban los estudiantes cuando recibían sus clases y las actitudes que manifestaban frente al cuidado del medio ambiente y el uso de algunos recursos naturales como el agua.

Fase II: Elaborar el Plan. En esta segunda fase se elaboraron y aplicaron los dos instrumentos que permitieron conocer parte de lo que pensaban los estudiantes respecto al área de matemáticas y la forma como procedían al resolver problemas multiplicativos de tipo razón. El segundo instrumento aplicado fue la prueba diagnóstica, esta contiene seis problemas enunciados de manera verbal escrita, los cuales se encuentran descritos con más detalle en el anexo 2. Con esta prueba, se identificaron las estrategias y las dificultades que surgieron de los estudiantes cuando se enfrentaban a la resolución de un problema multiplicativo de tipo razón.

Fase III: Implementar y evaluar el plan. Como propuesta de intervención se diseñó e implementó un ambiente de aprendizaje con una actividad llamada “La ruleta multi-ambiental” basada en la solución de problemas matemáticos simples de tipo razón, clasificados de acuerdo con la estructura que expone Vergnaud (2000) en el isomorfismo de medidas. La actividad consistía en leer los problemas planteados en los cartones, los cuales se presentaban a través de imágenes con un contenido ambiental, para luego proponer con los compañeros del grupo, de acuerdo a la organización establecida inicialmente en la actividad, una estrategia que permitiera solucionar el problema, escogiendo la que mejor prefirieran.

Fase IV: Retroalimentación. En esta fase se aplicó la prueba de salida, un instrumento similar al de la prueba diagnóstica en el que se plantearon nuevamente 6 problemas multiplicativos de tipo razón. Esta vez, los problemas no estaban propuestos de manera verbal escrita, en este caso se utilizaron imágenes como las usadas en la actividad de “La ruleta multi-ambiental” para el planteamiento de los problemas, donde el estudiante debía hacer la lectura

del problema, escribirlo tal como lo interpretara y resolverlo, usando la estrategia que libremente quisiera. Luego de esta prueba se inició la recolección y el análisis de resultados con el fin de determinar los avances y las limitaciones de la investigación.

Población

La institución educativa está ubicada en la localidad quinta de Usme, al suroriente de la ciudad. Cuenta con gran riqueza hídrica lo que influye en su baja temperatura. Las personas que allí residen son estrato socioeconómico 1 y 2, abunda el comercio y el trabajo informal en las calles. Se encuentra cerca al botadero de Doña Juana lo que genera algunos riesgos ambientales debido a sus fuertes olores por la acumulación de basura.

El grupo seleccionado consta de 34 estudiantes, que cursan el grado cuarto (403) en la Institución Educativa Distrital Federico García Lorca, jornada tarde. Las edades de los estudiantes oscilan entre los 8 y los 11 años. De los 34 estudiantes, 2 de ellos son repitentes y 5 estudiantes llegan nuevos a la institución para el año 2016. Sin embargo, debido a que la población en este sector es fluctuante, 2 de los estudiantes que iniciaron en el proceso fueron retirados antes de la aplicación de la prueba de salida, factor que no permitió culminar el proceso con ellos. Este curso presenta la particularidad de tener la mayor cantidad de estudiantes que pasaron del grado tercero al grado cuarto con un desempeño bajo en las áreas de español y matemáticas. Esto lleva a pensar en que uno de los factores que afectan la resolución de un problema matemático está relacionado con la comprensión lectora. En este sentido, al no comprenderse la estructura semántica del problema, la estrategia escogida para solucionarlo será la menos adecuada.

Como directora del curso seleccionado, se da la posibilidad de compartir más tiempo con ellos. Se viven situaciones como por ejemplo observar que la mayoría de estudiantes esperan a que la docente indique cómo proceder para iniciar la solución de un problema, acuden a él con inquietudes acerca de la operación que deben usar, preguntan específicamente si es una suma, una resta, una multiplicación o una división, dejan ver la

ausencia de estrategias para la resolución de un problema y la manera mecánica en que aplican las operaciones.

Categorías de análisis

Teniendo en cuenta los tipos de problemas multiplicativos expuestos por Maza (1991), se han propuesto como categorías de análisis los tres tipos de problemas: multiplicación-razón, participación-razón y agrupamiento razón, al igual que las estrategias encontradas por Gómez (2007) en los estudiantes cuando resuelven este tipo de problemas, estas estrategias se han presentado como subcategorías.

Tabla 8. Categorías de análisis

CATEGORÍAS (Problemas multiplicativos de tipo razón)	SUBCATEGORÍAS (Estrategias)	DEFINICIÓN
Multiplicación-razón	Estrategia realista	Es aquella en la que los estudiantes usan material concreto o dibujos para representar de manera real la situación
	Estrategia esquemática	Es aquella en la que los estudiantes hacen uso de los números para hacer el conteo sucesivo de los elementos
	Estrategia aditiva-con agrupaciones	Es aquella en la que además de hacer uso de los números para representar la cantidad de elementos, incorpora signos aditivos para adicionar el grupo de objetos
	Estrategia aditiva con duplicaciones	Es aquella que el estudiante usa cuando las cantidades permiten duplicar el tamaño de la unidad y en vez de sumar una por una realizan las adiciones de las duplicaciones
	Estrategia multiplicativa con descomposición	Es aquella en la que se acude a la descomposición de los números para luego realizar las multiplicaciones y finalmente adicionar los resultados finales
	Estrategia multiplicativa con algoritmo	Es aquella en la que se usa el algoritmo de la multiplicación para dar solución al problema

Partición-razón	Estrategia realista de reparto con recuento unitario	Es aquella en la que se requiere de una representación concreta o icónica de los elementos, para ir repartiendo los elementos en la medida en que se realiza el conteo
	Estrategia esquemática de reparto	Es aquella en la que a diferencia de la situación anterior se usan números para establecer la correspondencia de los elementos en cada grupo
	Estrategia aditiva-de reparto	Es aquella en donde los estudiantes realizan una descomposición de los números que conforman cada grupo y lo van sumando al grupo anterior hasta completar la cantidad total
	Estrategia aditiva con ensayo y error	Es aquella en la que los estudiantes prueban con diferentes cantidades y las adicionan hasta lograr encontrar la cantidad que les permite llegar al resultado total
	Estrategia multiplicativa de ensayo y error	En esta estrategia los estudiantes usan el algoritmo de la multiplicación, haciendo una búsqueda del número que representa la cantidad elementos que al ser multiplicada con el número de grupos, permita obtener la cantidad total de elementos
	Estrategia multiplicativa con mitades	Es aquella en la que los estudiantes sacan mitades cuando reparten la cantidad total y descubren al final cuantos repartos fueron posibles. En algunos problemas no es posible aplicar esta estrategia
	Estrategia multiplicativa con división	Es aquella en la que se hace uso del algoritmo de la división para hallar la cantidad de elementos que son repartidos a cada grupo
Agrupamiento- Razón	Estrategia realista de agrupar	Es aquella en la que los estudiantes forman los grupos de elementos a través de objetos o dibujos que representen la situación
	Estrategia de agrupar con doble recuento	Es aquella en la que se enumera cada elemento de uno en uno y luego se realiza nuevamente un recuento en la medida en que se van formando los grupos con la cantidad de elementos dados
	Estrategia aditiva con ensayo y error	Es aquella en la que los estudiantes generan hipótesis de los posibles grupos que se pueden formar ensayando con diferentes cantidades

	Estrategia aditiva con agrupamiento	Es aquella en donde los estudiantes comienzan a utilizar las adiciones, agregando un sumando cada vez al resultado anterior hasta llegar al número de grupos que se pueden formar
	Estrategia aditiva con resta reiterada	Es aquella en donde se hace uso de la sustracción, restando reiteradamente la cantidad de elementos de un grupo a la cantidad total dada
	Estrategia multiplicativa de ensayo y error	Es aquella en donde los estudiantes prueban con diferentes números la cantidad de grupos que se podrían formar con ciertos elementos para obtener un número total de unidades
	Estrategia multiplicativa con división	Es aquella en la que los estudiantes hacen uso del algoritmo de la división para encontrar la cantidad grupos que se forman con el total de elementos

Técnicas e instrumentos de recolección de información

Cuestionario de actitudes

El primer instrumento propuesto para reconocer las actitudes de los estudiantes frente al área de matemáticas y al cuidado del medio ambiente, fue aplicado a los 34 estudiantes del grado 403 del I.E.D. Federico García Lorca. Este instrumento es un cuestionario que se adaptó del estudio hecho en la Universidad de Granada (Arrebola, 2010) con 236 estudiantes de secundaria entre 13 y 17 años, cuyo propósito era el de diseñar y validar un instrumento que permitiera medir las actitudes que los estudiantes presentaban hacia las matemáticas. La estructura del instrumento contenía un apartado en el cual se planteaba un cuestionario de actitudes dividido en tres componentes; el cognitivo, el afectivo y el comportamental, planteando a su vez entre 19 y 22 ítems cada uno.

De acuerdo con esto, las adaptaciones hechas para el estudio se realizaron al componente afectivo, del cual se tomaron 9 ítems como base, modificando en algunos casos

la redacción, con el fin de ajustarlo a estudiantes de cuarto grado de primaria. La prueba quedó dividida en tres secciones, la primera reconocía la mirada de los estudiantes a sí mismos frente al área de matemáticas, la segunda reflejaba la mirada que hacen los estudiantes de cómo los perciben los demás frente al área, y la última sección permitía ver algunas de las actitudes que los estudiantes tenían respecto al cuidado del medio ambiente. Finalmente, se adicionaron 4 casillas en las que los estudiantes podrían escoger entre las opciones *siempre*, *algunas veces* o *nunca* y a continuación justificar su respuesta (ver anexo 1).

Tabla 9. Encuesta de actitudes

		Siempre	Algunas veces	Nunca	¿POR QUE?
¿Cómo me veo en clase?	1. Las matemáticas son divertidas y entretenidas para mí.				
	2. Me gusta participar en clase de matemáticas.				
	3. Me gusta resolver problemas de matemáticas en grupo.				
¿Cómo me ven los demás?	4. Para mis profesores soy un buen estudiante de matemáticas.				
	5. Para mis compañeros soy un buen estudiante en clase de matemáticas				
	6. Para mis papás soy un buen estudiante en clase de matemáticas				
¿Cómo cuido el medio ambiente?	7. Cuando me encuentro una bolsa de refrigerio en el piso, la recojo y la llevo al reciclaje.				
	8. Cuando me baño la boca, cierro la llave mientras me cepillo.				
	9. Reutilizo las hojas de los cuadernos que me sobraron del año anterior.				

Prueba diagnóstica

El segundo instrumento aplicado fue la prueba diagnóstica. En esta prueba se presentaron 6 problemas seleccionados de acuerdo con los aspectos semánticos mencionados para los problemas multiplicativos de tipo razón. Estos fueron redactados de acuerdo con cada uno de los aspectos sintácticos mencionados anteriormente, referidos a las expresiones

usadas para la enunciación del problema, las proposiciones que lo componen, las variables y las magnitudes empleadas para cada problema. Se dejó la prueba con las siguientes características (ver anexo 2):

Dos problemas de tipo Multiplicación-Razón: $P_1M_RV_D$ y $P_4M_RV_{CD}$. Dos problemas de tipo Agrupamiento-Razón: $P_2A_RV_D$ y $P_5A_RV_{CD}$ y dos problemas de tipo Partición-Razón: $P_3P_RV_D$ y $P_6P_RV_{CD}$. Construidos a partir de las estructuras mencionadas en el Marco teórico.

Por cada tipo de problema se plantearon dos, de tal manera que fueran usadas las variables propuestas, es decir, las variables discretas y las variables continuas discretizadas. En este sentido, se delimita el estudio con el fin de determinar cuáles son los elementos que afectan a un estudiante cuando no elige la estrategia adecuada al resolver un problema. Según Maza (1991), dos de los factores que pueden afectar la solución de un problema están relacionados con su estructura semántica y los tipos de números implicados, considerados para este caso como variable discreta y variable continua discretizada. Los problemas quedaron de la siguiente manera:

$P_1M_RV_D$: Problema-1, Multiplicación- Razón con Variable-Discreta.

$P_2A_RV_D$: Problema-2, Agrupamiento- Razón con Variable-Discreta.

$P_3P_RV_D$: Problema-3, Partición- Razón con Variable-Discreta.

$P_4M_RV_{CD}$: Problema-4, Multiplicación- Razón con Variable-Continua Discretizada.

$P_5A_RV_{CD}$: Problema-5, Agrupamiento- Razón con Variable-Continua Discretizada.

$P_6P_RV_{CD}$: Problema-6, Partición- Razón con Variable-Continua Discretizada.

El enunciado verbal de cada problema contenía tres proposiciones distribuidas de la siguiente manera: las dos primeras eran proposiciones enunciativas y la última proposición era interrogativa, separadas por los signos de puntuación correspondientes.

La expresión usada en los seis problemas para indicar la reiteración de cantidades fue *cada uno* y los términos como *repartir* o *agrupar* no se usaron para no limitar la estrategia a la que se remitirían los estudiantes para dar solución al problema.

Cada problema se enmarcó dentro de una situación semirreal de tipo ambiental, referida al reciclaje de papel y plástico o al uso moderado de recursos naturales como el agua. Las cantidades manejadas en cada problema no superaron cifras mayores a cuatro. La siguiente tabla presenta los tipos de problemas escritos en el instrumento de la prueba diagnóstica.

Tabla 10. Problemas para la prueba diagnóstica

P ₁ M _R V _D	La profesora entregó a sus estudiantes 12 refrigerios, si cada uno de los refrigerios traía 3 bolsas para reciclar ¿Cuántas bolsas pudo reciclar?	P ₄ M _R V _{CD}	La profesora compró en la cafetería del colegio 4 refrigerios para sus estudiantes, si cada uno de los refrigerios costó 1.750 pesos ¿Cuánto pagó en total?
P ₂ A _R V _D	La profesora colocó en el salón varias cajas para reciclar los cuadernos utilizados, si en cada una de las cajas caben 12 cuadernos. ¿Cuántas cajas se necesitan para reciclar 60 cuadernos?	P ₅ A _R V _{CD}	La profesora tenía en el bolsillo 2.100 pesos para comprar varias botellas de agua, si cada una costó 700 pesos ¿Cuántas botellas pudo comprar?
P ₃ P _R V _D	La profesora les entregó a 12 estudiantes 36 vasos de agua para cepillarse la boca, si cada uno de los estudiantes debe utilizar la misma cantidad de vasos de agua ¿Cuántos vasos le corresponde a cada uno?	P ₆ P _R V _{CD}	La profesora compró 3 cuadernos iguales para sus estudiantes, si le cobraron 4.500 pesos en total ¿Cuánto costó cada uno?

Prueba de salida

El último instrumento aplicado fue la prueba de salida, instrumento similar al de la prueba diagnóstica, es decir, contenía 6 problemas multiplicativos de tipo razón enmarcados en las tres categorías mencionadas anteriormente, con la diferencia de que esta vez los problemas no eran enunciados de manera verbal escrita, sino a través de imágenes con la estructura del isomorfismo de medidas, como se plantearon en el programa de intervención a través de la ruleta multi-ambiental. El instrumento se puede observar más detalladamente en el anexo 4.

Plan de acción

Luego de los resultados presentados por los estudiantes en la resolución de los problemas propuestos en la prueba diagnóstica, se pasa al diseño de un plan de acción a través del cual se logre reconocer las diversas estrategias y superar las dificultades presentes en los estudiantes en la solución de cada problema multiplicativo de tipo razón. Se pensó entonces en la creación de un ambiente de aprendizaje en el que se recrearan contextos de tipo ambiental, combinando un referente de situaciones semirreales, con actividades que permitieran explorar y compartir diferentes estrategias, analizar la coherencia de las repuestas halladas y motivar a la creación de hábitos que promovieran el cuidado del medio ambiente.

Propuesta de intervención

Se propone entonces una actividad llamada *ruleta multi-ambiental* creada con el fin generar espacios de clase en donde los estudiantes tuvieran una distribución distinta en el salón, hacer del momento de clase una experiencia diferente, y para que compartieran con sus compañeros las diversas formas en las que procedían cuando solucionaban un problema

de tipo multiplicativo, exploraran numerosas formas de proceder y se motivaran en la búsqueda de soluciones en la medida en que podían asociar situaciones con su propia realidad.

Para esta actividad, las instrucciones dadas por la docente se dirigieron únicamente a las que se relacionaban con las reglas del juego. Es decir, que a partir del momento en el que los estudiantes conocían las condiciones, descritas con mayor detalle en el anexo 3, iniciaban una experiencia en la que eran ellos quienes moderaban su propio proceso de aprendizaje, para ello, controlaban el turno de cada compañero, usaban los elementos asignados, elaboraban su estrategia de solución y comprobaban que tan acertada estuvo su respuesta.

La actividad se proyectó para siete sesiones de aplicación, en donde los estudiantes formaban grupos de 6 integrantes, y por parejas hacían girar la ruleta, seleccionaban el problema de acuerdo al número que se marcaba e iniciaban su solución. Los problemas multiplicativos asignados para cada nivel se formaron de acuerdo con las 3 categorías planteadas para los problemas multiplicativos de tipo razón, dando lugar a la formación de tres niveles con seis problemas distintos, tres de ellos con magnitudes de tipo discreta y los otros tres con magnitudes de tipo continua discretizada.

Las situaciones ambientales expuestas para cada nivel relacionaban situaciones semejantes a la vida cotidiana de los estudiantes. Las magnitudes discretas estuvieron presentes en los problemas que asociaban acciones por parte de los estudiantes, es decir, el reciclaje del plástico se abordó desde el consumo de los refrigerios dado que diariamente lo hacen en el colegio y siempre llegan empacados en este material. La recolección de botellas plásticas y el reciclaje del papel con hojas arrugadas y cuadernos viejos, se expuso igualmente con elementos que hacen parte del estudiante en su espacio escolar, que al ser reciclados de manera correcta, pueden contribuir al cuidado del medio ambiente. En cuanto al uso de algunos recursos como el agua, se representaron situaciones asociadas con sus hábitos de aseo como lavarse las manos, cepillarse los dientes y bañarse. Por otro lado, las magnitudes continuas discretizadas (el dinero para este caso), se expusieron en situaciones relacionadas

con el valor de los cuadernos, los refrigerios y el agua, esto con el fin de resaltar los costos que genera el uso inadecuado de estos materiales.

Para enunciar los problemas a los estudiantes se tuvieron en cuenta los resultados de la prueba diagnóstica, allí las estrategias usadas por ellos mostraban un gran número de representaciones realistas y esquemáticas en las que los estudiantes acudían al dibujo como una forma de visualizar la situación planteada para iniciar la búsqueda de las cantidades que les permitiera encontrar la respuesta acertada. En este sentido, no solo se brindaba la posibilidad al estudiante de observar de manera icónica los datos del problema sino que también se daba la tarea de que lo enunciara de manera verbal, haciendo una relación entre las cantidades conocidas y las que debían hallar.

A continuación se exponen los problemas que fueron diseñados para cada nivel, atendiendo a las categorías de análisis presentadas anteriormente:

Nivel I. Los problemas correspondientes a este nivel fueron de tipo multiplicación-razón. Allí las situaciones ambientales planteadas estaban relacionadas con el costo de los refrigerios, el recurso natural del agua, el reciclaje de papel y el plástico, y la venta de cuadernos usados.

Gráfica 3. Problemas nivel I



Nivel II. Los problemas correspondientes a este nivel fueron de tipo partición-razón. Allí las situaciones planteadas estaban relacionadas con la siembra de árboles, la compra de refrigerios y el uso moderado de recursos como el agua en algunos hábitos de aseo y el gasto de energía ocasionado por los bombillos.

Gráfica 4. Problemas nivel II



Nivel III: Los problemas correspondientes a este nivel eran de tipo agrupamiento-razón. Allí las situaciones ambientales estaban relacionadas con el reciclaje del papel y los cuadernos, la siembra de árboles, la recolección de llantas y el uso moderado del agua.

Gráfica 5. Problemas nivel III



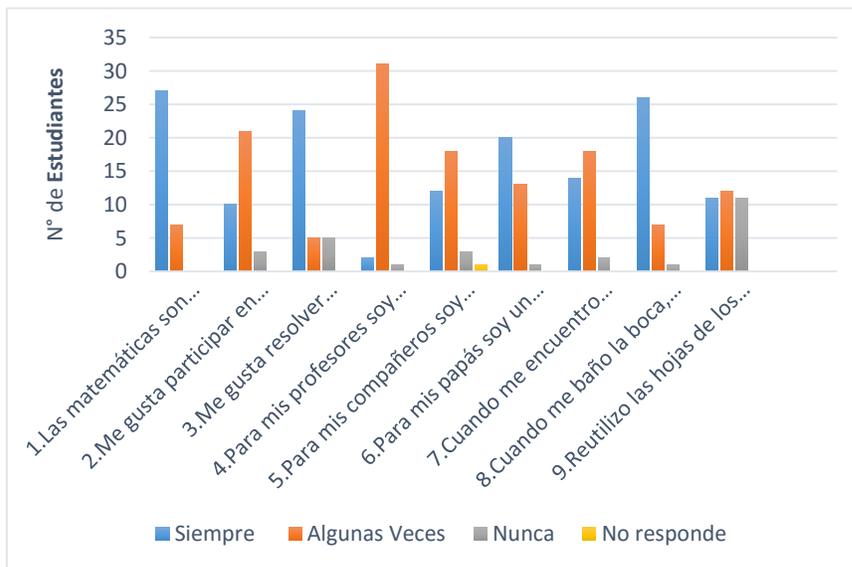
CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados hallados dentro de la investigación se fueron dando en la medida en que se llevaban a cabo cada una de las fases propuestas. Se tuvo como fuentes la observación de estrategias de los estudiantes durante todo el proceso y la aplicación de cada uno de los instrumentos descritos anteriormente. Para llegar a las conclusiones, se establecieron comparaciones entre las pruebas aplicadas y la influencia del ambiente de aprendizaje propuesto para la creación de estrategias propias por parte de los estudiantes.

Percepciones de los estudiantes

Gráfica 6. Respuestas al cuestionario de actitudes



¿Cómo me veo en clase?	1. Las matemáticas son divertidas y entretenidas para mí.
	2. Me gusta participar en clase de matemáticas.
	3. Me gusta resolver problemas de matemáticas en grupo.
¿Cómo me ven los demás?	4. Para mis profesores soy un buen estudiante de matemáticas.
	5. Para mis compañeros soy un buen estudiante en clase de matemáticas
	6. Para mis papás soy un buen estudiante en clase de matemáticas
¿Cómo cuido el medio ambiente?	7. Cuando me encuentro una bolsa de refrigerio en el piso, la recojo y la llevo al reciclaje.
	8. Cuando me baño la boca, cierro la llave mientras me cepillo.
	9. Reutilizo las hojas de los cuadernos que me sobraron del año anterior.

El gráfico anterior presenta el número de estudiantes que respondieron *siempre*, *algunas veces* o *nunca*, a los nueve enunciados propuestos en la encuesta de reconocimiento

de actitudes. Los seis primeros ítems reflejan las respuestas de los estudiantes, frente a cómo ellos se perciben dentro de una clase de matemáticas y cómo creen que los perciben los demás; lo que permite reconocer algunos de los elementos que influyen en la predisposición favorable o desfavorable respecto a su comportamiento en el área de matemáticas (Nieto et al., 2010).

A través de estos resultados, se puede evidenciar cómo la mayoría de los estudiantes conciben las matemáticas de manera divertida y además cómo les gusta resolver problemas con sus compañeros, lo que conduce a pensar que las dificultades presentes en el proceso de aprendizaje no necesariamente están ligadas a la desmotivación y falta de interés por parte de ellos, así lo demuestran algunos de los comentarios hechos por los estudiantes frente a las preguntas dadas en la siguiente tabla.

Tabla 11. ¿Cómo me veo en clase?

	Ítems	Siempre. ¿Por qué?	Algunas veces. ¿Por qué?	Nunca ¿Por qué?
¿Cómo me veo en clase?	¿Las matemáticas son divertidas y entretenidas para mí?	Me gustan Son muy divertidas Reímos y hacemos actividades La profesora explica bien Me entretienen Me enseñan a dividir y multiplicar Son creativas	Nos enredan mucho Son difíciles A veces no puedo resolver las cosas A veces la profe es aburrida	
	¿Me gusta participar en clase de matemáticas?	Me gusta pasar al frente	Algunas veces entiendo Me da miedo No sé qué preguntar Casi no me preguntan	Me da pena

¿Me gusta resolver problemas de matemáticas en grupo?	Nos ayudamos	Me siento avergonzada	Gritan mucho
	Me gusta resolver problemas con mis compañeros para todos entender		A veces no salen las cosas

Sin embargo, respuestas como “me queda mal”, “me siento avergonzada”, “me da miedo” o “nunca me preguntan” cambia un poco la percepción de los estudiantes respecto a qué tan buenos en el área los conciben los docentes, se refleja de algún modo la manera como el docente le brinda seguridad con relación a su desempeño en la clase. Por lo tanto, es posible que la percepción que tiene un estudiante como aprendiz en matemáticas y como buen generador de estrategias para resolver problemas esté ligada a su parte afectiva, es decir, a la identificación de sí mismo, a partir de las diferentes interacciones que ha realizado con sus docentes, padres y compañeros (Nieto, 2010). De igual manera, lo afectivo puede trascender en lo cognitivo y actitudinal. Reiterando entonces, la necesidad de implementar nuevas estrategias pedagógicas que permitan comprender las actitudes de los estudiantes y conduzcan a mejorar sus capacidades cognitivas. En la siguiente tabla se rescatan algunos de los comentarios realizados por los estudiantes:

Tabla 12. ¿Cómo me ven los demás en clase?

	Ítems	Siempre. ¿Por qué?	Algunas veces. ¿Por qué?	Nunca ¿Por qué?
¿Cómo me ven los demás?	¿Para mis profesores soy un buen estudiante de matemáticas?	Cumplo con las actividades propuestas	Me queda mal Me equivoco No traigo las tareas No entiendo bien el tema Charlo mucho Me mandan a corregir	
	¿Para mis compañeros soy un buen estudiante en clase de matemáticas?	Les presto el cuaderno para que se adelanten Termino a tiempo	Se me dificulta A veces falto a clase	Nunca me han dicho

	¿Para mis papás soy un buen estudiante en clase de matemáticas?	Me revisan y me felicitan	No me ponen cuidado	
			No me revisan	
			No hago tareas	

Ahora bien, cuando se cuestiona a los estudiantes respecto a sus actitudes frente al cuidado del medio ambiente, las respuestas halladas conducen a pensar que se va por buen camino, sin embargo, a pesar de que la mayoría de los estudiantes reflejan que cierran la llave al cepillarse los dientes, la situación en el colegio refleja lo contrario, dado que cuando se lavan sus manos en el baño, no cierran la llave. Entonces, podría pensarse que no hay hábitos propios para el cuidado del medio ambiente y el uso moderado de recursos, en la medida en que solo ejecutan estas acciones cuando están en presencia de sus padres y docentes, como sucede con la reutilización de cuadernos usados o la recolección de las bolsas plásticas del refrigerio. La siguiente tabla permite observar las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas relacionadas con el cuidado del medio ambiente.

Tabla 13. ¿Cómo cuido el medio ambiente?

	Ítems	Siempre. ¿Por qué?	Algunas veces. ¿Por qué?	Nunca ¿Por qué?
¿Cómo cuido el medio ambiente?	¿Cuándo me encuentro una bolsa de refrigerio en el piso, la recojo y la llevo al reciclaje?	Me gusta ver todo limpio	No soy consiente Hago bombas con ellas Me da pereza	
	¿Cuándo me baño la boca, cierro la llave mientras me cepillo?	Porque o si no se acaba el agua No me gusta gastar agua Mi mamá me regaña La tomo con una coca	Se me olvida cerrarla	

	<p>¿Reutilizo las hojas de los cuadernos que me sobraron del año anterior?</p>		<p>Me botan los cuadernos viejos</p>	<p>Los vendí</p> <p>Me los botan en mi casa</p> <p>No los utilizo</p> <p>Mi mamá los vende para comprar los nuevos cuadernos</p> <p>Cojo las hojas para hacer aviones</p> <p>Dibujó en las hojas que quedan</p>
--	---	--	--------------------------------------	---

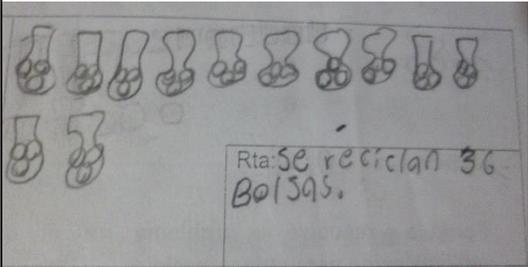
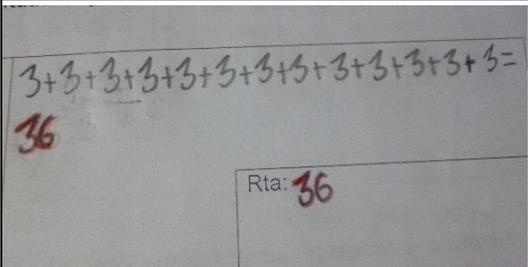
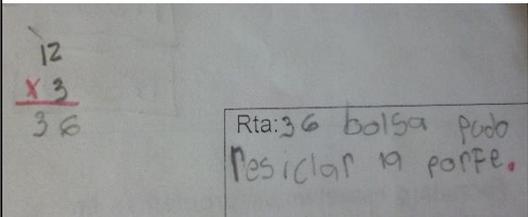
Estos resultados aportaron de manera directa al diseño del programa de intervención, en la medida en que se tuvieron en cuenta las percepciones de los estudiantes respecto a la clase de matemáticas, se centró la atención específicamente en aquellas justificaciones donde los estudiantes respondieron algunas veces o nunca a los ítems planteados. Las manifestaciones de temor y la pena a participar en una clase, condujeron a pensar en la importancia de brindar espacios en los que se generara confianza a los estudiantes y se permitiera una libre participación, se propuso la formación de pequeños grupos de trabajo durante la actividad de la ruleta multi-ambiental, para promover la participación, reconociendo las inquietudes y las habilidades de cada uno, rescatando, además, que la mayoría de los estudiantes se sienten a gusto trabajando en grupo porque se ayudan y entienden mejor cuando interactúan con sus compañeros sobre el problema a solucionar.

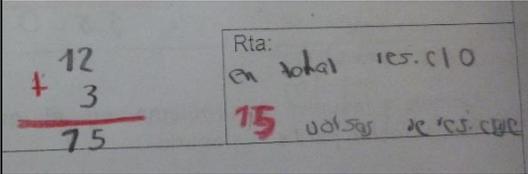
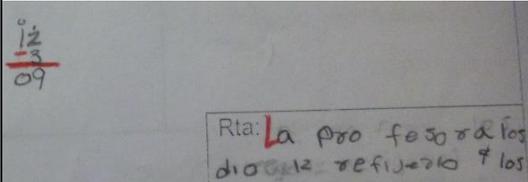
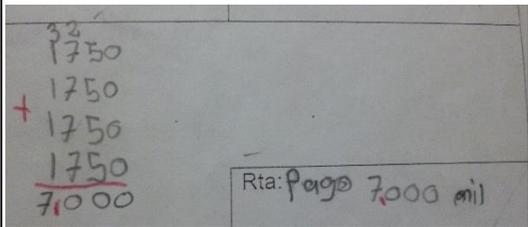
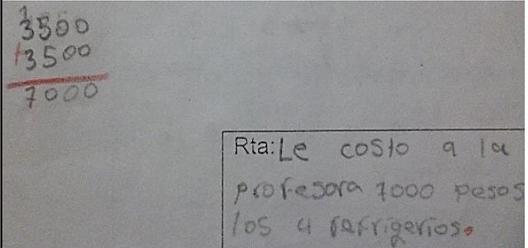
Descripción de las estrategias

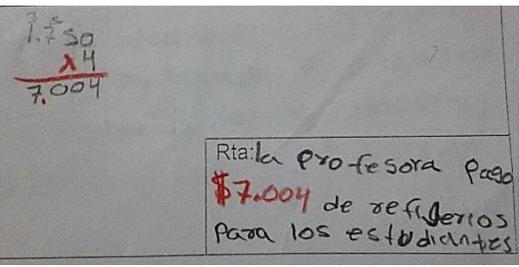
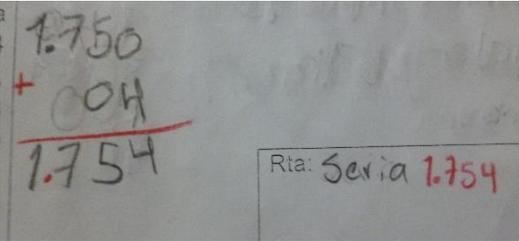
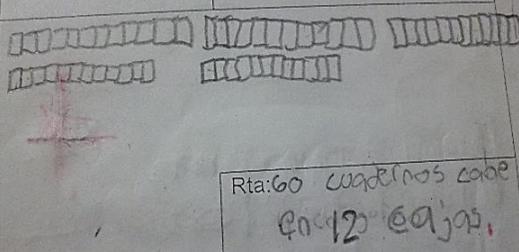
La siguiente tabla contiene las estrategias usadas por los estudiantes en la prueba diagnóstica para la solución de los seis problemas multiplicativos de tipo razón, clasificados en las tres categorías propuestas; multiplicación-razón, agrupamiento-razón y partición-

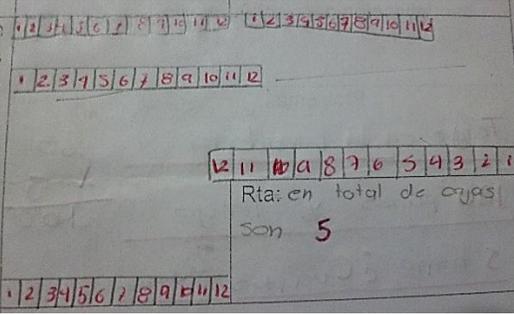
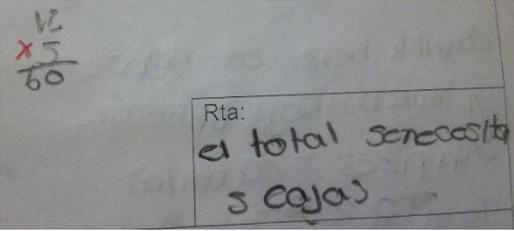
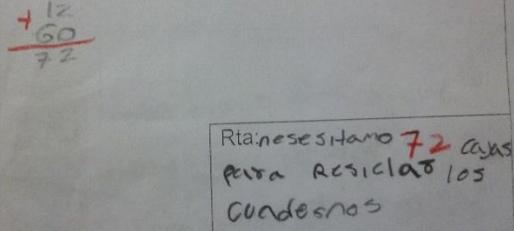
razón. Para cada problema, los estudiantes libremente representaban la estrategia que más se ajustara o con la que más se familiarizaran, para darle una solución acertada al problema.

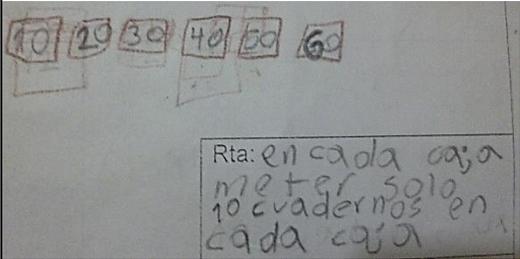
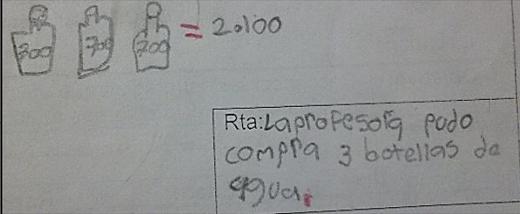
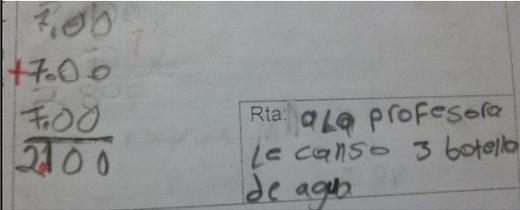
Tabla 14. Descripción de las estrategias en la prueba diagnóstica

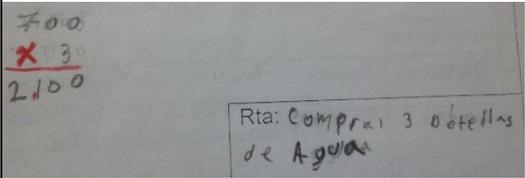
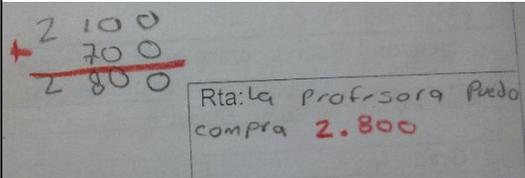
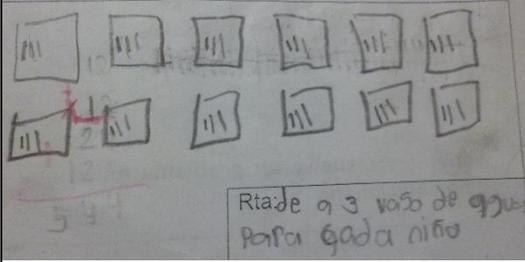
(CATEGORÍAS) TIPOS DE PROBLEMAS		(SUBCATEGORÍAS) ESTRATEGIAS		DESCRIPCIÓN	N° de estudian tes
MULTIPLICACION - RAZON	<p>P₁M_RV_D.</p> <p>La profesora entregó a sus estudiantes 12 refrigerios, si cada uno de los refrigerios traía 3 bolsas para reciclar ¿Cuántas bolsas pudo reciclar?</p>	Realista		Esta estrategia permite observar en el estudiante la transición de lo concreto a lo pictórico (Gómez, 2007), comprendiendo la situación a través del dibujo, en la medida en que representa los 12 refrigerios con las tres bolsas adentro, para realizar el conteo y hallar finalmente la cantidad total de bolsas.	3
		Aditiva con agrupaciones		La estrategia muestra cómo el estudiante en este caso utiliza la adición para hallar la cantidad total de bolsas, escribiendo repetidas veces el grupo de bolsas que hay en cada refrigerio.	1
		Multiplicativa con algoritmo		Con esta estrategia se permite ver cómo el estudiante utiliza el algoritmo de la multiplicación para dar solución al problema, evidenciando un nivel de construcción que pasa por la etapa en la que se da una representación multiplicativa.	18

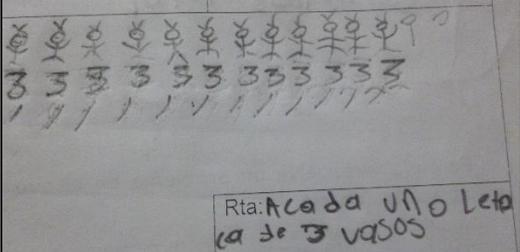
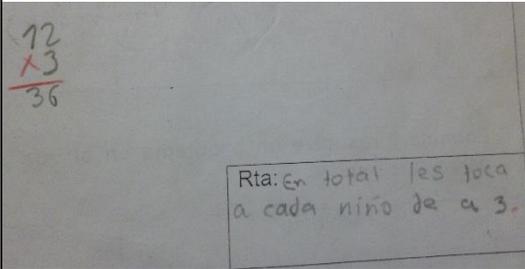
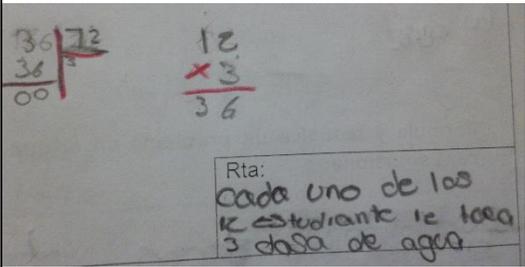
		No acertada	 	<p>Unas de las estrategias no acertadas que los estudiantes utilizan para resolver este tipo de problemas, tiene que ver con sumar o restar los datos presentados en la situación planteada. Esto conduce a pensar que no se dimensiona la magnitud de la respuesta dado que como sucede con las bolsas de refrigerio, se aspira obtener un resultado mucho mayor a 12 y no uno menor o cercano a él como se evidencia con las operaciones anteriores.</p>	12
<p>P4MRVCD. La profesora compró en la cafetería del colegio 4 refrigerios para sus estudiantes, si cada uno de los refrigerios costó 1.750 pesos ¿Cuánto pagó en total?</p>		Aditiva con agrupaciones		<p>En esta estrategia el estudiante acude a la adición para resolver el problema (Gómez, 2007), representando los 4 grupos con el valor de cada refrigerio tal como se indica en el problema.</p>	6
		Aditiva con duplicaciones		<p>En esta estrategia el estudiante realiza la adición con los dos primeros grupos, luego duplica estos resultados y los adiciona nuevamente hasta obtener el valor total de los refrigerios comprados. Esta estrategia funciona solo en algunos casos, de acuerdo con los datos dados en el problema.</p>	1

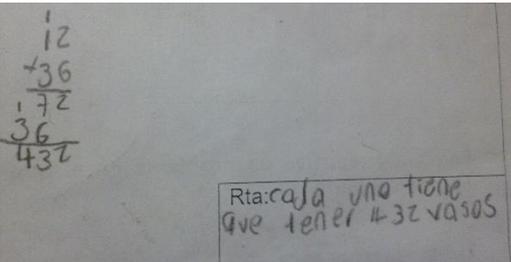
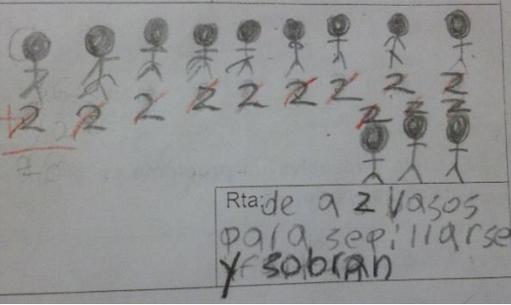
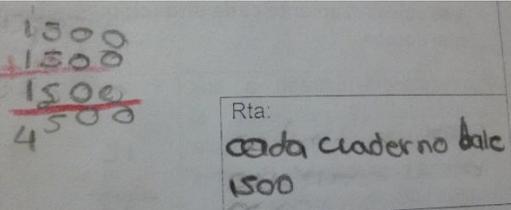
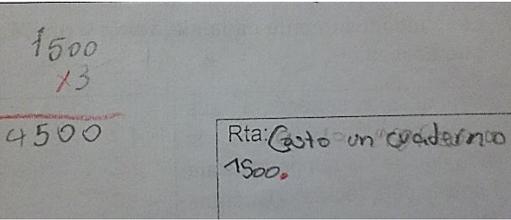
		Multiplicativa con algoritmo		La estrategia muestra cómo el estudiante usa el algoritmo de la multiplicación para dar solución a la pregunta del problema. Allí relaciona la cantidad de refrigerios con el valor que tiene de cada uno.	4
		No acertada		La estrategia presentada en este caso, permite ver como el estudiante relaciona los datos presentados en el problema a través de la adición. Sin embargo, al obtener el resultado no se brinda la posibilidad de analizarlo, ya que al pensar en el valor total que se paga por la cantidad de refrigerios se tendría un aumento mayor al de las cuatro unidades, diferente al que se evidencia con el resultado de la suma.	6
AGRUPAMIENTO- RAZON	<p>P2ArVd. La profesora colocó en el salón varias cajas para reciclar los cuadernos utilizados, si en cada una de las cajas caben 12 cuadernos. ¿Cuántas cajas se necesitan para reciclar 60 cuadernos?</p>	Realista de agrupar		En este caso el estudiante forma grupos de 12 cuadernos las veces que sea necesario hasta completar los 60, de esta manera logra responder el número de cajas que se necesitan para guardarlos. Se recurre a una estrategia en la que los dibujos se asemejan a la situación concreta, la cual permite visualizar los elementos agrupados y contarlos uno a uno.	2

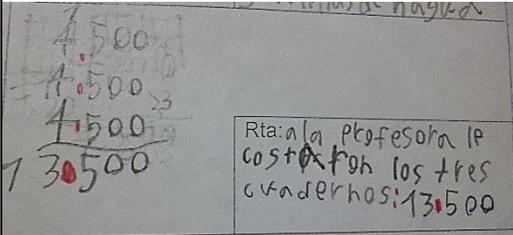
		Esquemática de agrupar		Al igual que en la estrategia anterior el estudiante forma grupos de 12 cuadernos, con la diferencia de que a cada uno le asigna un número para indicar la cantidad que queda en cada grupo. Así mismo, realiza un recuento en el que tiene clara la cantidad de cuadernos que va completando, hasta llegar a la cantidad inicialmente dada en el problema.	1									
		Multiplicativa de ensayo y error		<p>Esta estrategia consiste en probar cuál es el número que al ser multiplicado por la cantidad de cuadernos dados en un solo grupo, da como resultado la cantidad total. Es decir, se da una búsqueda del factor escalar (Vergnaud, 2000).</p> <table border="1" data-bbox="1156 1108 1295 1276"> <thead> <tr> <th></th> <th>M₁</th> <th>M₂</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td></td> <td>?</td> <td>60</td> </tr> </tbody> </table> <p>En este caso, los estudiantes realizan varios ensayos en los que prueban con diferentes números, con el fin de encontrar la cantidad de cajas que les permita agrupar sus cuadernos en cantidades iguales.</p>		M ₁	M ₂		1	12		?	60	4
	M ₁	M ₂												
	1	12												
	?	60												
		No acertada		En esta estrategia el estudiante acude a la suma de los datos propuestos para dar respuesta a la pregunta, sin embargo el resultado que se obtiene indica un mayor número	27									

				<p>de cajas que de cuadernos, donde no se forman los grupos que sugiere el problema.</p> <p>Seguidamente, la estrategia que se presenta abajo, permite observar la agrupación de los cuadernos sin tener en cuenta una de las condiciones dadas en el problema, como lo fue guardar 12 cuadernos en cada caja, en este caso el estudiante forma grupos de 10 cuadernos.</p>
<p>PsArVcd. La profesora tenía en el bolsillo 2.100 pesos para comprar varias botellas de agua, si cada una costó 700 pesos</p> <p>¿Cuántas botellas pudo comprar?</p>	Esquemática de agrupar		<p>El esquema representado en esta estrategia, permite ver cómo el estudiante dibuja las botellas de agua que fueron compradas, y les escribe a cada una su valor, en la misma medida adicional en su mente el valor de la siguiente botella a la anterior, hasta descubrir cuántas fueron compradas para llegar al valor total que fue pagado por todas las botellas de agua.</p>	
	Aditiva con ensayo y error		<p>En esta estrategia se busca el número de total de veces que se debe sumar el valor de cada botella para obtener la cantidad total, a diferencia de la estrategia anterior, se prescinde de un esquema y se acude a la adición de manera directa.</p>	

PARTICION - RAZON	P₃P_RV_D La profesora les entregó a 12	Multiplicativa de ensayo y error		La estrategia muestra cómo el estudiante relaciona el valor escalar para llegar al valor total de las botellas compradas. Sin embargo, este procedimiento requiere de varias pruebas con diferentes valores, de tal forma que al multiplicar esta cantidad por el valor de cada botella pueda lograr el resultado total pagado.	3
		No acertada		En esta estrategia se evidencia nuevamente una relación de los datos del problema, a través de la suma entre ellos. Lo que indica que a pesar de que el estudiante sabe que la cantidad que paga por las tres botellas es mayor a la que pagaría por una, no es clara la representación que tiene de las veces que adiciona el valor de la botella para hallar el número de grupos requeridos.	20
		Realista de reparto con recuento unitario		En esta estrategia cada recuadro está representando un estudiante que se cepilla los dientes, y las líneas internas representan los vasos que cada uno de ellos utiliza para cepillarse. El estudiante se acerca a una representación concreta en la medida en que va asignando a cada estudiante un vaso de agua hasta completar los 36 vasos, es decir, realiza	10

<p>estudiantes 36 vasos de agua para cepillarse la boca, si cada uno de los estudiantes debe utilizar la misma cantidad de vasos de agua ¿Cuántos vasos le corresponde a cada uno?</p>			<p>un recuento unitario para repartir en cantidades iguales los 36 vasos a los 12 estudiantes.</p>	
	Esquemática de reparto		<p>Esta estrategia permite observar un esquema, donde el estudiante asigna cierta cantidad de vasos a cada niño y hace un conteo en la medida en que los va repartiendo, los vasos son reemplazados por números y se realiza un conteo aditivo hasta repartir la cantidad total de vasos entre los 12 estudiantes.</p>	3
	Multiplicativa de ensayo y error		<p>A partir de la prueba del ensayo y error, el estudiante con esta estrategia busca la cantidad que le permite llegar al resultado total de los vasos, en este sentido, se observa cómo aplica la multiplicación dentro de un contexto, partiendo del ensayo y el error para lograr el resultado final de la multiplicación.</p>	2
	Multiplicativa con División		<p>En esta estrategia el estudiante logra una representación multiplicativa en la que su nivel de abstracción le permite acudir al algoritmo de la división para solucionar el problema, además comprueba su resultado como se observa al lado derecho, usando la multiplicación para verificar su resultado.</p>	1

		No acertada	 	De acuerdo al algoritmo usado para este caso el estudiante invierte la relación entre los elementos, obteniendo un resultado en el que afirma en su respuesta que a cada estudiante le corresponde 432 vasos. Seguidamente, la estrategia esquemática que se presenta abajo indica un reparto equitativo, en el que no se completa la cantidad total que fue dada, afirmando en su respuesta que corresponden dos vasos a cada niño y sobran una determinada cantidad.	18
<p>P6PrVCD. La profesora compró 3 cuadernos iguales para sus estudiantes, si le cobraron 4.500 pesos en total ¿Cuánto costó cada uno?</p>	Aditiva de ensayo y error			Esta estrategia demuestra cómo los estudiantes realizan conjeturas sobre el valor que puede tener cada cuaderno, para empezar a probar con cuál de ellos obtendrían el valor total pagado. Ensayan varias veces con diferentes números hasta que logran el valor acertado.	4
	Multiplicativa de ensayo y error			Con esta estrategia se logra observar el nivel de representación en el que el estudiante está, con la cual, de manera inversa se puede llegar a la división. El estudiante busca el valor, que al ser multiplicado por el número de veces que se indica, permita obtener la cantidad total que fue pagada por los cuadernos.	2

		No acertada		Al usar esta estrategia para la solución del problema, se logra evidenciar la forma en la que el estudiante lo comprendió, dado que no asigna el valor presentado al total de los cuadernos comprados, sino por el contrario lo asigna a cada cuaderno, reiterando a través de la suma la cantidad de veces que fue comprado para llegar al valor total que se debe pagar.	28
--	--	-------------	--	--	----

Como se puede observar las estrategias más utilizadas por los estudiantes en la prueba diagnóstica para cada una de las categorías fueron:

1. Para los problemas de multiplicación razón (**PM**), la estrategia más usada fue multiplicativa con algoritmo.
2. Para los problemas de agrupamiento razón (**PA**), la estrategia más usada fue la esquemática de agrupar.
3. Para los problemas de partición razón (**PP**) la estrategia más usada fue la realista.

Sin embargo, los problemas correspondientes a las categorías de agrupamiento y partición razón, presentaron un mayor número de desaciertos por parte de los estudiantes. Dado que como se puede identificar en la siguiente tabla, de los 34 estudiantes 27 no acertaron en los problemas correspondientes a **P₂ARVD**, 20 no acertaron en los problemas de **P₅ARVCD**, 18 no acertaron a los **P₅PRVD**, 28 no acertaron en **P₅PRVCD**.

Tabla 15. Consolidado de estrategias por problema en la prueba diagnóstica

Categorías	Tipos de problemas	Estrategias en la prueba diagnóstica (subcategorías)	N° de estudiantes
Multiplicación-razón	P ₁ M _R V _D	Realista	3
	P ₁ M _R V _D	Aditiva con agrupaciones	1
	P ₁ M _R V _D	Multiplicativa con algoritmo	18
	P ₁ M _R V _D	No acertada	12
	P ₄ M _R V _{CD}	Aditiva con agrupaciones	6
	P ₄ M _R V _{CD}	Aditiva con duplicaciones	1
	P ₄ M _R V _{CD}	Multiplicativa con algoritmo	21
	P ₄ M _R V _{CD}	No acertada	6
Agrupamiento-razón	P ₂ A _R V _D	Realista de agrupar	2
	P ₂ A _R V _D	Esquemática de agrupar	1
	P ₂ A _R V _D	Multiplicativa de ensayo y error	4
	P ₂ A _R V _D	No acertada	27
	P ₅ A _R V _{CD}	Esquemática de agrupar	8
	P ₅ A _R V _{CD}	Aditiva con ensayo y error	3
	P ₅ A _R V _{CD}	Multiplicativa de ensayo y error	3
	P ₅ A _R V _{CD}	No acertada	20
Partición-razón	P ₃ P _R V _D	Realista de reparto con recuento unitario	10
	P ₃ P _R V _D	Esquemática de reparto	3
	P ₃ P _R V _D	Multiplicativa de ensayo y error	2
	P ₃ P _R V _D	Multiplicativa con División	1
	P ₃ P _R V _D	No acertada	18
	P ₆ P _R V _{CD}	Aditiva de ensayo y error	4
	P ₆ P _R V _{CD}	Multiplicativa de ensayo y error	2
	P ₆ P _R V _{CD}	No acertada	28

Brindar la posibilidad al estudiante de que explore y proponga sus propias estrategias no solo permite al docente visualizar la manera en la que comprende y resuelve un problema, también permite detectar los niveles de representación (Gómez, 2007) por los que pasa en su proceso de abstracción o los diferentes modelos intuitivos que asocia en la aplicación de las operaciones multiplicativas (Saldaña, 2012), además de reconocer las dificultades que se presentan en su aprendizaje.

Análisis de la intervención

Después de haber presentado la prueba diagnóstica, se aplicó una actividad donde los estudiantes libremente generaban estrategias y las compartían con sus compañeros. Se permitió así reconocer e identificar más estrategias, aumentar el número de aciertos en los problemas y brindar sentido en cuanto a los contextos ambientales que estaba presentes en la institución. Esta actividad, llamada *la ruleta multi-ambiental*, presentaba tres niveles correspondientes a cada una de las categorías y estas fueron organizadas teniendo en cuenta el nivel de dificultad o desaciertos que se evidenciaron en cada una de ellos en la prueba diagnóstica. Estos niveles fueron:

Nivel I: Los problemas correspondientes a este nivel fueron los de multiplicación-razón, estos problemas, de acuerdo con los resultados arrojados en la prueba diagnóstica, registraron un menor grado de dificultad en su solución. Por esta razón fueron escogidos para el primer nivel del juego, con la intención de promover el interés por parte de los estudiantes hacia su desarrollo, al suponer un mayor número de estrategias que brindarían la posibilidad de coincidir con la respuesta acertada para cada problema.

La implementación del nivel estaba programada para dos sesiones de clase con una duración de 60 minutos cada una, sin embargo, la explicación y organización para el inicio de la actividad provocaron que se requiriera de una sesión más. A continuación, se puede observar dos de las estrategias utilizadas por los estudiantes para la resolución de los problemas multiplicativos de tipo razón-multiplicación.

Gráfica 1. Estrategias de los estudiantes en el nivel I



Para el problema correspondiente al reciclaje de las bolsas plásticas que se presenta en la imagen izquierda, el estudiante acude a la estrategia esquemática, agregando sucesivamente la cantidad de bolsas que se pueden reciclar por cada refrigerio. Por otro lado, en el problema correspondiente al valor de las bolsas de agua al lado derecho, la estudiante usa la estrategia aditiva con agrupaciones, incorporando los signos aditivos a medida que agrega cada grupo.

Nivel II: Los problemas correspondientes a este nivel fueron los de partición-razón, en los cuales, de acuerdo con los resultados hallados en la prueba diagnóstica, la estrategia usada por un gran número de estudiantes no fue la más acertada, especialmente en el problema con variable continua discretizada. En este nivel, los estudiantes ya tenían claras las reglas del juego y la organización era igual que en el nivel I, lo que facilitó su aplicación en cuanto al tiempo, se llevó a cabo en dos sesiones con una duración de 60 minutos cada una. A diferencia del nivel anterior, los estudiantes acudían con una mayor frecuencia a la docente para realizar preguntas en cuanto al planteamiento del problema o la revisión de la estrategia usada antes de verificarla con la respuesta acertada que aparecía detrás de cada cartón. Para este nivel los estudiantes usaron estrategias como las que se presentan en la siguiente imagen:

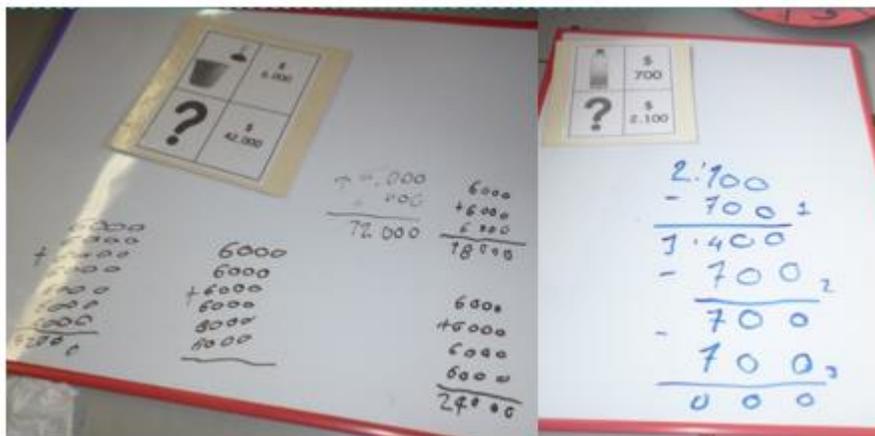
Gráfica 2. Estrategias de los estudiantes en el nivel II



La estrategia usada por el estudiante que resuelve la situación relacionada con la cantidad de vasos de agua que gasta un niño para cepillarse los dientes al lado izquierdo, corresponde a un reparto con recuento unitario, donde asigna un elemento a cada niño para repartir los elementos, en este caso el estudiante acude al algoritmo de la multiplicación para comprobar su respuesta. La estrategia usada por el estudiante que resuelve el problema relacionado con el valor de los cuadernos nuevos, permite ver el nivel de abstracción en que se encuentra, al usar el algoritmo de la división para resolverlo.

Nivel III: Los problemas correspondientes al nivel III fueron los de tipo agrupamiento-razón, en los que el estudiante debía hallar la cantidad de grupos que se formaban con el total de elementos dados en el problema. Para este nivel los estudiantes presentaron el menor número de respuestas acertadas en la prueba diagnóstica, lo que condujo a pensar que podría ser el nivel más complejo, por ello se dejó de últimas en la actividad propuesta. Este nivel, al igual que el anterior, fue aplicado en dos sesiones con una duración de 60 minutos cada una y algunas de las estrategias que allí surgieron se presentan en la siguiente imagen:

Gráfica 3. Estrategias de los estudiantes en el nivel III



Al lado izquierdo se observa la estrategia aditiva con ensayo y error, donde el estudiante comienza la adición con dos grupos y continúa ensayando hasta llegar a la cantidad de plantas que se comprarían con ese valor, para llegar al valor total como se muestra en el problema. Seguidamente, al lado derecho de la imagen otro estudiante propone la estrategia con resta reiterada, donde procede a restarle el valor de cada botella de agua al valor total presentado en el problema, contando las veces que lo resta, para hallar la cantidad de botellas que costarían esa cantidad.

Estrategias en la prueba de salida

Luego de la intervención, se diseña la prueba de salida y se establecen comparaciones con los resultados en la prueba diagnóstica, esto con el fin de determinar la incidencia del ambiente de aprendizaje en la construcción y el fortalecimiento de estrategias para la solución de problemas matemáticas de tipo razón.

La prueba de salida se construye a partir de elementos tenidos en cuenta tanto para la prueba diagnóstica como para el programa de intervención, es decir, se plantean 6 problemas

con las mismas características de la prueba diagnóstica, enunciados a través de dibujos con la misma estructura que los planteados en la actividad de la ruleta multi-ambiental, esto con el fin de observar la incidencia del ambiente de aprendizaje en la solución de los problemas multiplicativos de tipo razón delimitando las variables que puedan afectar el análisis de resultados.

Para mayor claridad se presenta la siguiente tabla en la que se comparan los factores de tipo semántico y sintáctico usados en las dos pruebas aplicadas:

Tabla 16. Elementos comparativos. Prueba diagnóstica – Prueba de salida

Categorías	Magnitud	Prueba diagnóstica			Prueba de salida		
		Situación	Cantidad-Valor		Situación	Cantidad-Valor	
Multiplicación-razón	Discreta	Reciclaje de bolsas	1	3	Reciclaje de papel	1	3
			12	?		12	?
Agrupamiento-razón	Discreta	Reciclaje de cuadernos	1	12	Ahorro de energía	1	12
			?	60		?	60
Partición-razón	Discreta	Uso del agua	1	?	Reciclaje de botellas plásticas	1	?
			12	36		12	36
Multiplicación-razón	Continua-Discretizada	Compra de refrigerios	1	1.750	Compra de cuadernos	1	1.750
			4	?		4	?
Agrupamiento-razón	Continua-Discretizada	Compra de botellas de agua	1	700	Compra de plantas	1	700
			?	2.100		?	2.100
Partición-razón	Continua-Discretizada	Compra de cuadernos	1	?	Compra de bolsas de agua	1	?
			3	4.500		3	4.500

En la siguiente tabla se puede observar el número de estudiantes que utilizaron una determinada estrategia en la prueba de salida. Seguidamente, se analizan la estrategia más usada en cada una de las categorías:

Para los problemas de multiplicación razón (**PM**), la estrategia más usada fue la multiplicativa con algoritmo.

Para los problemas de agrupamiento razón (**PA**) La estrategia más usada fue la aditiva con ensayo y error.

Para los problemas de partición razón (PP) La estrategia más usada fue la multiplicativa con división.

Tabla 17. Consolidado de estrategias por problema en la prueba de salida

Categorías	Tipos de Problemas	Estrategias en la prueba de salida	N° de estudiantes
Multiplicación razón	P₁MRVD	Realista	0
	P₁MRVD	Aditiva con agrupaciones	7
	P₁MRVD	Multiplicativa con algoritmo	22
	P₁MRVD	No acertada	3
	P₄MRVCD	Aditiva con agrupaciones	11
	P₄MRVCD	Aditiva con duplicaciones	0
	P₄MRVCD	Multiplicativa con algoritmo	17
	P₄MRVCD	No acertada	4
Agrupamiento razón	P₂ARVD	Realista de agrupar	0
	P₂ARVD	Esquemática de agrupar	7
	P₂ARVD	Aditiva con resta reiterada	1
	P₂ARVD	Multiplicativa de ensayo y error	2
	P₂ARVD	Multiplicativa con división	3
	P₂ARVD	No acertada	19
	P₅ARVCD	Esquemática de agrupar	3
	P₅ARVCD	Aditiva con ensayo y error	12
	P₅ARVCD	Multiplicativa de ensayo y error	3
	P₅ARVCD	Multiplicativa con División	5
	P₅ARVCD	No acertada	9
	Partición razón	P₃PRVD	Aditiva de reparto
P₃PRVD		Multiplicativa de ensayo y error	4
P₃PRVD		Multiplicativa con División	7
P₃PRVD		No acertada	16
P₆PRVCD		Aditiva de ensayo y error	5
P₆PRVCD		Multiplicativa de ensayo y error	1
P₆PRVCD		Multiplicativa con división	6
P₆PRVCD		No acertada	20

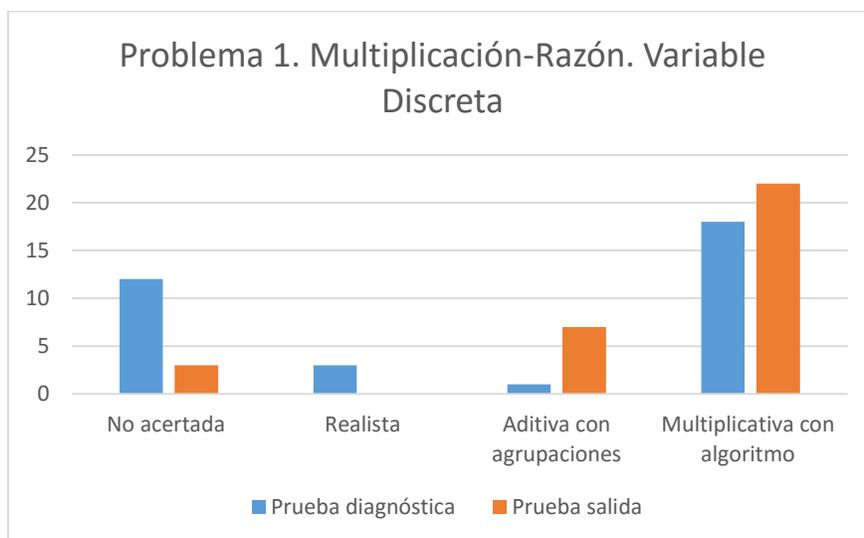
Análisis comparativo de estrategias

Al realizar un análisis comparativo entre las estrategias usadas por los estudiantes en la prueba diagnóstica y la prueba de salida, después de la actividad de intervención, se tienen los siguientes resultados en cada una de las categorías:

Categoría multiplicación – razón

P₁MR_{VD}: Al analizar la gráfica donde se compara las estrategias que los estudiantes usan para resolver este tipo de problemas en la prueba inicial y en la prueba de salida, se observa que a pesar de que no se registra una nueva estrategia, los estudiantes pasaron de la estrategia que requiere de una representación realista, a la estrategia de tipo aditiva con agrupaciones y multiplicativa con algoritmo, aumentando el número de aciertos en la solución del problema.

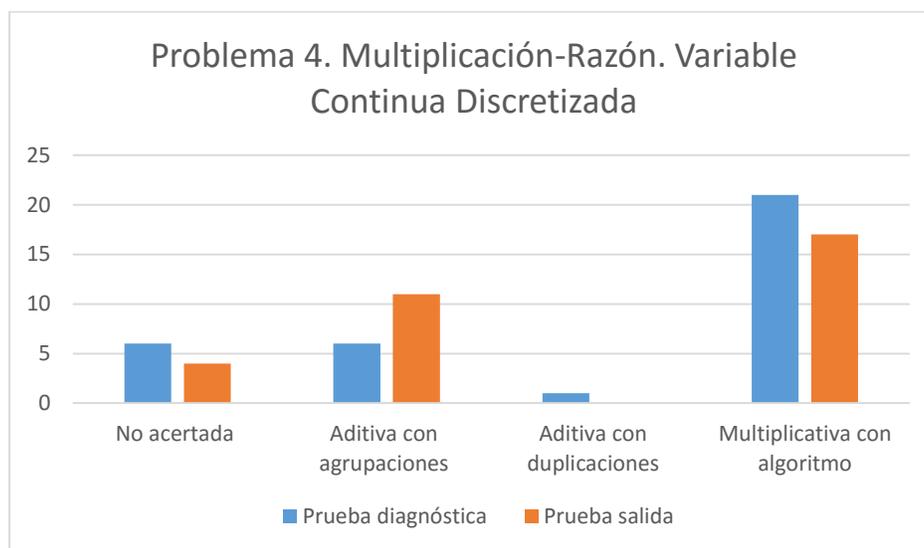
Gráfica 10. Comparativo Problema 1



P₄MR_{VCD}: Al igual que en el problema anterior, a pesar de que no se registra una nueva estrategia, la mayoría de los estudiantes acuden a la estrategia con agrupaciones y

multiplicativa con algoritmo, se presenta un modelo intuitivo asociado a la adición repetida sin depender de un conteo unitario para llegar la solución, la mayoría de los estudiantes aplican rutinas de cálculo, teniendo claridad sobre los diferentes grupos que se forman con los datos enunciados en cada problema, así aumentaron el número de aciertos en la solución del problema.

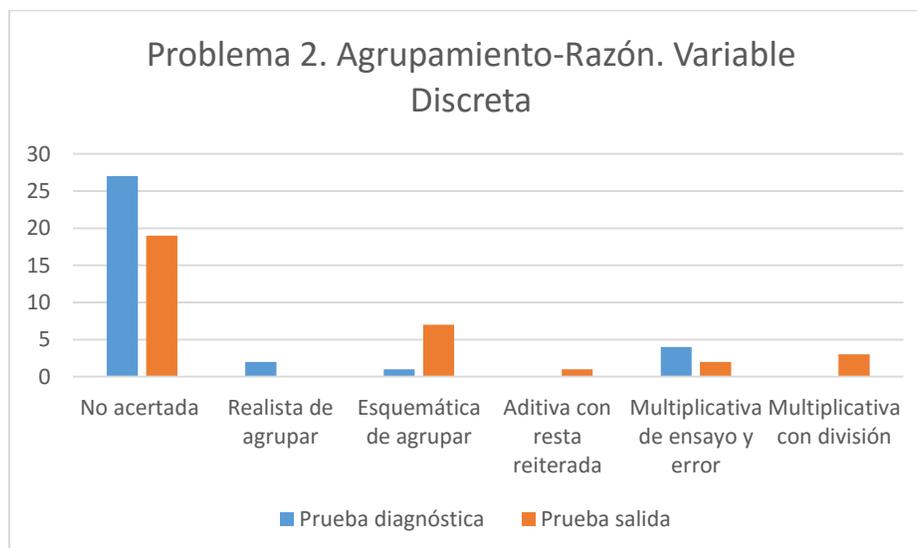
Gráfica 11. Comparativo Problema 4



Agrupamiento- razón

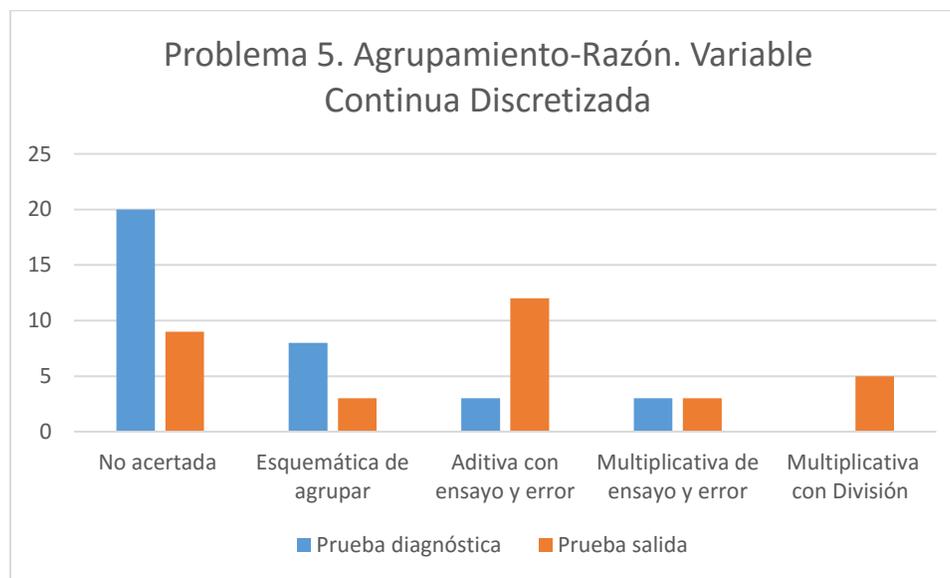
P2ARVD: En este problema los estudiantes registran una nueva estrategia en la prueba de salida, la aditiva de reparto, y aumentan al mismo tiempo el número de aciertos en la solución. Lo que conduce a pensar que en la medida en que los estudiantes exploran y comparten con sus compañeros, adquieren más estrategias y las dificultades en su aprendizaje van disminuyendo.

Gráfica 12. Comparativo Problema 2



P5ARVCD: Este problema registra igualmente una nueva estrategia en la prueba de salida, como la multiplicativa con división. Así mismo, se evidencia un aumento significativo en el número de aciertos. Además, también se observa que los estudiantes dejan de usar una estrategia esquemática para usar una estrategia más elaborada como la aditiva.

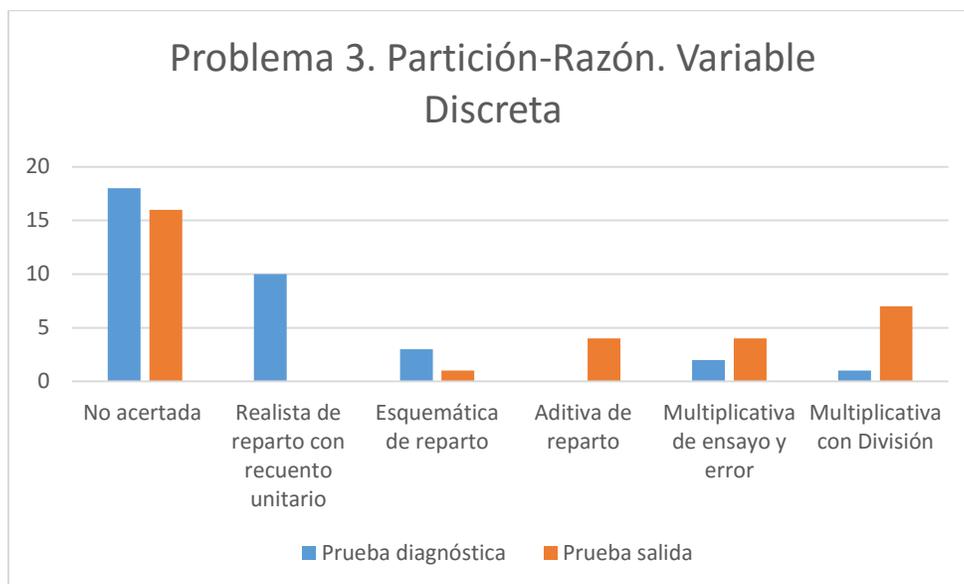
Gráfica 13. Comparativo Problema 5



Partición –razón

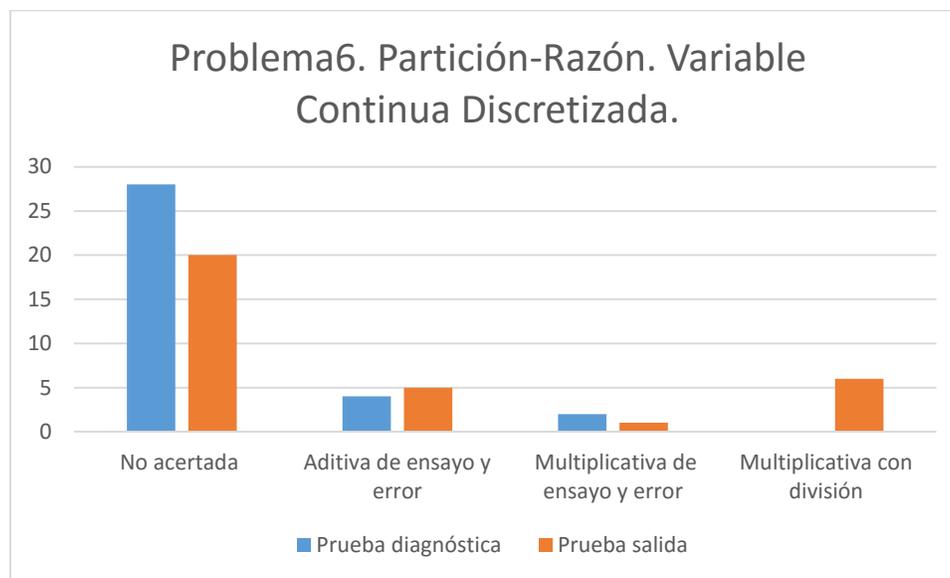
P₃PRVD: En este problema los estudiantes no utilizan una estrategia realista en la prueba de salida, registran una nueva estrategia, la aditiva de reparto y aumenta significativamente el número de estudiantes que utilizan la multiplicativa con división. Esto evidencia un nivel de representación más abstracto pues los estudiantes usan estrategias más elaboradas para resolver el problema (Gómez, 2007).

Gráfica 14. Comparativo problema 3



P6PRVCD: De igual forma, en este problema se registra una nueva estrategia en la prueba de salida, la multiplicativa con división, donde los estudiantes pasan a una representación más abstracta; comprenden y construyen dicho algoritmo dado que ha pasado por una representación realista, esquemática, aditiva y multiplicativa (Gómez, 2007).

Gráfica15. Comparativo problema 6

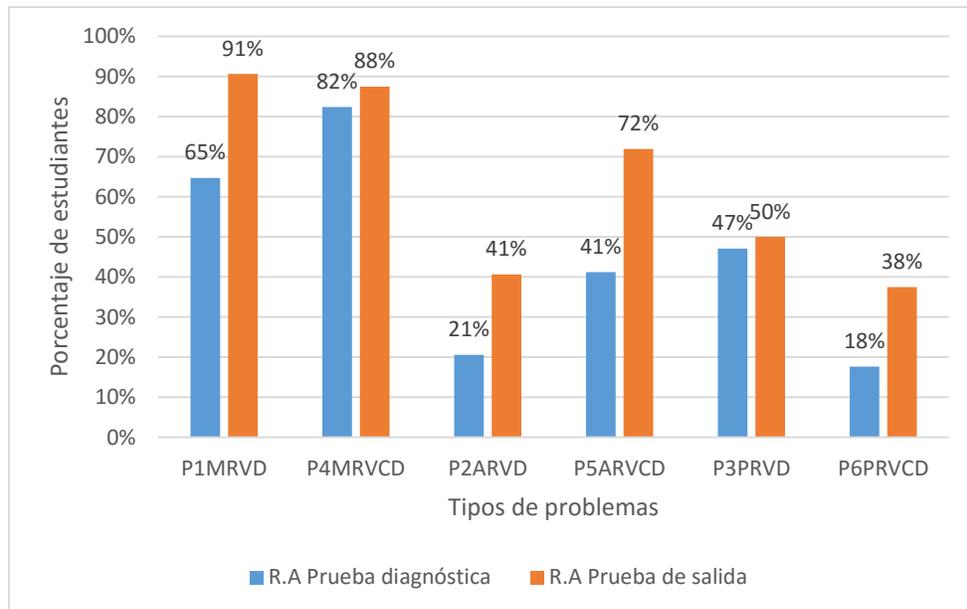


Ahora bien, finalmente para identificar los avances de los estudiantes de manera general, respecto a la comprensión de la estructura semántica de los problemas y la relación de sus elementos sintácticos, dados por los aciertos que presentaron antes y después de la intervención, es decir, en cada una de las categorías, se presenta una gráfica comparativa donde se observa lo siguiente:

- Los problemas relacionados con la categoría multiplicación-razón, evidencian un mayor número de aciertos en comparación con todos los problemas planteados.
- Los problemas relacionados con la categoría agrupamiento-razón evidencian un aumento significativo en cuanto al número de aciertos.
- Los problemas relacionados con la categoría de participación-razón continúan presentando mayor dificultad en los estudiantes para identificar estrategias, especialmente en los relacionados con las variables continuas discretizadas.

- Después de la implementación se evidencia que en todos los problemas hubo un aumento del número de aciertos por parte de los estudiantes en la prueba de salida.

Gráfica 16. Comparativo entre las respuestas acertadas



En este sentido se observa que el nivel de comprensión por parte de los estudiantes mejoró en la medida en que fueron explorando las estrategias de solución para resolver cada problema. Para la prueba de salida, muchos de los estudiantes que acudían mecánicamente al algoritmo de la multiplicación sin lograr un acierto con su estrategia, se dieron a la tarea de comprender la situación, explorando nuevas representaciones que dejaban entrever el problema con una serie de elementos que le permitían llegar a una respuesta acertada.

CONCLUSIONES

Es importante brindar la posibilidad a los estudiantes de expresar el porqué de algunas de sus actitudes en la clase de matemáticas de manera escrita; esto permitió entender un poco sus percepciones y reflexionar acerca de las prácticas pedagógicas implementadas en clase. El aplicar el instrumento para el reconocimiento de actitudes, a pesar de no estar propuesto como uno de los objetivos principales dentro de la investigación, enriqueció de cierta manera el proceso, en la medida en que se conocieron puntualmente las razones por las cuales los estudiantes en ocasiones presentan una mirada favorable o desfavorable hacia las matemáticas, invita a asumir una mirada más amplia frente a la cantidad de elementos que influyen el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Identificar las estrategias y las formas como proceden los estudiantes para resolver un problema multiplicativo ofrece la posibilidad de reconocer los niveles de representación por donde pasan los estudiantes para construir su pensamiento multiplicativo. Es decir, el caso en el que los estudiantes acuden a la representación realista para dar solución a sus problemas, indica el nivel de abstracción en el que aún se encuentran, requieren inicialmente de elementos concretos o dibujos que permitan representar tal situación para luego pasar a una comprensión más elaborada como los algoritmos de la división y multiplicación.

El diseño de un ambiente de aprendizaje en el que se relacionen situaciones semirreales, a través de una actividad como la ruleta *multi-ambiental* y la lectura de imágenes para la creación y solución de un problema, no solo dejan ver el interés de los estudiantes en el desarrollo de la clase, sino que permite la creación de espacios en los que el estudiante construye su propio aprendizaje, en la medida en que explora diferentes estrategias, comparte con sus compañeros nuevas soluciones y analiza la coherencia de las respuestas que dan a una situación planteada.

RECOMENDACIONES

El ambiente de aprendizaje propuesto en el transcurso de la investigación presentó resultados más tangibles en cuanto al reconocimiento y fortalecimiento de estrategias en el desarrollo del pensamiento multiplicativo. Sin embargo, a pesar de presentarse mayor recepción y participación en la solución de los problemas, las reflexiones acerca del cuidado y la creación de hábitos para favorecer el medio ambiente fueron dadas de manera esporádica y en menor cantidad, es decir, la atención de los estudiantes estuvo centrada un poco más en la creación de estrategias para dar solución de manera acertada al problema planteado y no en el análisis de las situaciones a nivel ambiental.

Reflexión pedagógica

El trabajo realizado durante la investigación aportó de manera significativa a mi labor en dos sentidos:

Reiteró mi compromiso a nivel profesional de generar una constante reflexión acerca de los modelos de enseñanza aplicados para llevar a cabo una clase de matemáticas, puesto que determinar los elementos que se requieren para que un estudiante aprenda demanda una búsqueda de estrategias que promuevan su interés y potencien sus capacidades. El conocer un poco lo que piensan los estudiantes respecto a una clase de matemáticas rompe con ciertos imaginarios y minimiza las barreras que conducen a la exploración de otras formas de asumir una clase.

Confirmó la importancia de tener como punto de partida, lo que sienten, piensan y saben los estudiantes en la construcción del aprendizaje. Observar sus reacciones cuando aprenden bajo un modelo diferente al tradicional, reconocer las maneras de proceder y fortalecer los avances en el proceso, conduce a superar las dificultades de los estudiantes y a ampliar la mirada del maestro frente a su método de enseñar.

REFERENCIAS

- Arrebola, I. A. (2010). Las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado de ESO: un instrumento para su medición. *PUBLICACIONES*(40), 49-71.
- Barroso, J. J., & Ortiz, I. R. R. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*, 342, 257-286.
- Bruer, J. (1995). *Escuelas para pensar. Una ciencia del aprendizaje en el aula*. Barcelona: Paidós Ibérica.
- Carretero, M. (1997). ¿Qué es el constructivismo? *Constructivismo y educación*. 39-71
- Fuenmayor, G., & Villasmil, Y. (2008). La percepción, la atención y la memoria como procesos cognitivos utilizados para la comprensión textual. *Revista de Artes y Humanidades UNICA*, 9(22), 187-202.
- Gómez, J. R. (2007). *Estrategias utilizadas por los niños de cuarto grado para resolver problemas multiplicativos simples de tipo razón*. (Tesis de pregrado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.) Bogotá D.C.
- Martínez, E. C., del Olmo Romero, M. Á., & Martínez, E. C. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Matemáticas, E. B. D. C. E. (2007). Ministerio de Educación Nacional. Disponible en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-342931_recurso_1.pdf
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Editorial síntesis.

- Nieto, L. B., Carrasco, A. C., Piedehierro, A., Barona, E. G., & Del Amo, R. G. (2010). El Dominio afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto. Revista de Educación*, 29(1), 13-31.
- Obando, G. (2015). *Sistemas de prácticas matemáticas en relación con la Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica*. (Tesis de Doctorado. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle).
- Parra, D. H. y Rojas, J. C. (2011). *Matemáticas y loncheras saludables: Un ambiente de aprendizaje de exploración e indagación relativo a situaciones multiplicativas con estudiantes de cuarto grado de primaria*. (Tesis de pregrado. Universidad Pedagógica Nacional).
- Rimoldi, H. J. (1997). Estructuras e imágenes en la solución de problemas. *Revista de psicología general y aplicada: Revista de la Federación Española de Asociaciones de Psicología*, 50(3), 285-296.
- Saldaña, M. A. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Edma 0-6: Educación matemática en la infancia* (1), 15-37.
- Sampieri Hernández, R., Fernández Collado, C., & Baptista, M. D. (2010). *Metodología de la Investigación* (Quinta Edición ed.). Mexico DF: Mc Graw Hill.
- Sánchez, B. J., & Torres, J. (2009). *Educación Matemática Crítica: Un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los Ambientes de Aprendizaje*. Bogotá: ASOCOLME.
- Skovsmose, Ole (2000). Escenarios de Investigación. *Revista EMA*, 6 (1). 3-26.
- Vergnaud, G. (2000). *El niño, la matemática y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Editorial trilla.

ANEXOS

Anexo 1. Encuesta de actitudes

 Universidad de La Sabana	MAESTRIA EN PEDAGOGIA DOCENTE: <u>Jeimy</u> Lorena Pérez
Objetivo:	Reconocer las actitudes de los estudiantes del grado cuarto hacia el área de matemáticas y cuidado del medio ambiente.
Nombre :	_____
Grado: _____ Edad: _____ Repitente: SI _____ NO _____	

Lee cuidadosamente cada uno de los enunciados y marca una x en la casilla que más se ajuste a tu respuesta.

		Siempre	Algunas veces	Nunca	¿POR QUE?
¿Cómo me veo en clase?	1. Las matemáticas son divertidas y entretenidas para mí.				
	2. Me gusta participar en clase de matemáticas.				
	3. Me gusta resolver problemas de matemáticas en grupo.				
¿Cómo me ven los demás?	4. Para mis profesores soy un buen estudiante de matemáticas.				
	5. Para mis compañeros soy un buen estudiante en clase de matemáticas				
	6. Para mis papás soy un buen estudiante en clase de matemáticas				
¿Cómo cuido el medio ambiente?	7. Cuando me encuentro una bolsa de refrigerio en el piso, la recojo y la llevo al reciclaje.				
	8. Cuando me baño la boca, cierro la llave mientras me cepillo.				
	9. Reutilizo las hojas de los cuadernos que me sobraron del año anterior.				

Anexo 2. Prueba diagnóstica

 <p>Universidad de La Sabana</p>	<p>MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA</p> <p>DOCENTE: Jeimy Lorena Pérez</p>
<p>Objetivo:</p>	<p>Reconocer las estrategias que utilizan los estudiantes del grado cuarto para resolver problemas multiplicativos simples de tipo razón.</p>
<p>Nombre :</p>	<p>_____</p>
<p>Grado: _____ Edad: _____ Repitente: SI _____ NO _____</p>	

Lee cuidadosamente cada situación y respóndela utilizando el procedimiento que desees.

<p>1</p>	<p>La profesora entregó a sus estudiantes 12 refrigerios, si cada uno de los refrigerios traía 3 bolsas para reciclar ¿Cuántas bolsas pudo reciclar?</p>	<p>Rta:</p>
<p>2</p>	<p>La profesora colocó en el salón varias cajas para reciclar los cuadernos utilizados, si en cada una de las cajas caben 12 cuadernos. ¿Cuántas cajas se necesitan para reciclar 60 cuadernos?</p>	<p>Rta:</p>

3	La profesora les entregó a 12 estudiantes 36 vasos de agua para cepillarse la boca, si cada uno de los estudiantes debe utilizar la misma cantidad de vasos de agua ¿Cuántos vasos le corresponde a cada uno?	<div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 100%; display: flex; justify-content: flex-end; align-items: center; padding-right: 10px;"> Rta: </div>
4	La profesora compró en la cafetería del colegio 4 refrigerios para sus estudiantes, si cada uno de los refrigerios costó 1.750 pesos ¿Cuánto pagó en total?	<div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 100%; display: flex; justify-content: flex-end; align-items: center; padding-right: 10px;"> Rta: </div>
5	La profesora tenía en el bolsillo 2.100 pesos para comprar varias botellas de agua, si cada una costó 700 pesos ¿Cuántas botellas pudo comprar?	<div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 100%; display: flex; justify-content: flex-end; align-items: center; padding-right: 10px;"> Rta: </div>
6	La profesora compró 3 cuadernos iguales para sus estudiantes, si le cobraron 4.500 pesos en total ¿Cuánto costó cada uno?	<div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 100%; display: flex; justify-content: flex-end; align-items: center; padding-right: 10px;"> Rta: </div>

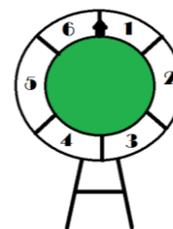
Formula y resuelve un problema en el que tengas que utilizar la multiplicación para solucionarlo.

Problema	Solución
	<div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 100%; display: flex; justify-content: flex-end; align-items: center; padding-right: 10px;"> Rta: </div>

Formula y resuelve un problema en el que tengas que utilizar la división para solucionarlo

Problema	Solución	
	<table border="1"><tr><td data-bbox="1019 646 1435 682">Rta:</td></tr></table>	Rta:
Rta:		

Anexo 3. Juego “LA RULETA MULTI-AMBIENTAL”.



- **Objetivos**

- Fortalecer en los estudiantes las estrategias para la solución de problemas multiplicativos de tipo razón a través del juego denominado “La ruleta ambiental”.
- Promover una conciencia ambiental a través de la solución de problemas multiplicativos de tipo razón que involucran situaciones relacionadas con reciclaje y el uso moderado de algunos recursos.
- Generar espacios de aprendizaje con un contexto lúdico y real que motiven al estudiante a la solución de problemas multiplicativos de tipo razón.

- **Contenido**

El juego está basado en la solución de problemas matemáticos simples de tipo razón clasificados de acuerdo a la estructura que propone Vergnaud en el isomorfismo de medidas. Estos problemas están diseñados de tal manera que a partir de la relación existente entre tres datos presentados de manera icónica se pueda hallar el cuarto dato faltante. Los problemas planteados en los cartones se enmarcan dentro de un contexto ambiental que permite la representación de situaciones tales como: el reciclaje de residuos sólidos como el papel y las bolsas plásticas de los refrigerios, la recolección de llantas usadas, la siembra de árboles y el ahorro de recursos como agua y energía.

- **Número de jugadores:**

6 jugadores para formar tres grupos, cada equipo con dos jugadores.

- **Materiales:**

- Ruleta de seis números.

- 18 cartones con una estructura multiplicativa enmarcada en el isomorfismo de medidas, cada cartón tiene tres imágenes que representan parte de la situación problemática y una incógnita que representa el valor que se debe hallar. Los cartones contienen problemas multiplicativos distribuidos de la siguiente manera: 6 cartones con problemas de Multiplicación-razón, 6 cartones con problemas de Partición-Razón y 6 cartones con problemas de Agrupamiento-Razón.
- 1 Tablero acrílico
- 1 Marcador borrable

Cartones para el Nivel 1. PROBLEMAS DE MULTIPLICACION –RAZÓN

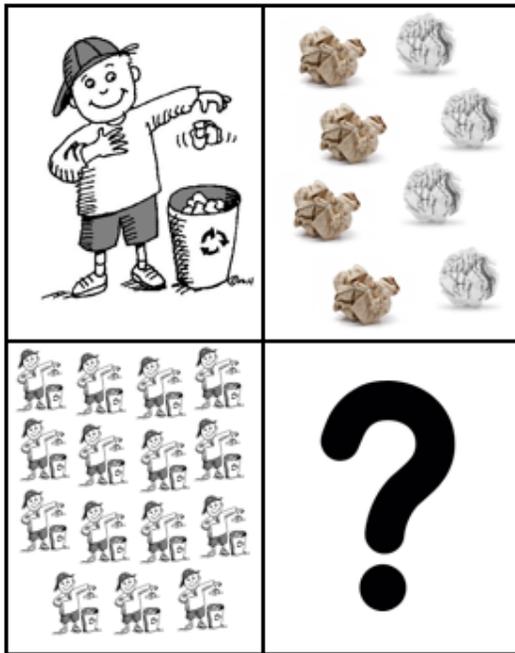
Problema 1. Multiplicación-Razón con Variable Discreta ($P_1M_RV_D$)



Problema 2. Multiplicación-Razón con Variable Discreta ($P_2M_RV_D$)



Problema 3. Multiplicación-Razón con Variable Discreta ($P_3M_RV_D$)



Problema 5. Multiplicación-Razón con Variable Continua Discretizada ($P_5M_RV_{CD}$)



Problema 4. Multiplicación-Razón con Variable Continua Discretizada ($P_4M_RV_{CD}$)



Problema 6. Multiplicación-Razón con Variable Continua Discretizada ($P_6M_RV_{CD}$)



Cartones para el Nivel 2. PROBLEMAS DE PARTICION-RAZÓN

Problema 1. Partición-Razón con Variable Discreta ($P_1P_RV_D$)



Problema 3. Partición-Razón con Variable Discreta ($P_3P_RV_D$)



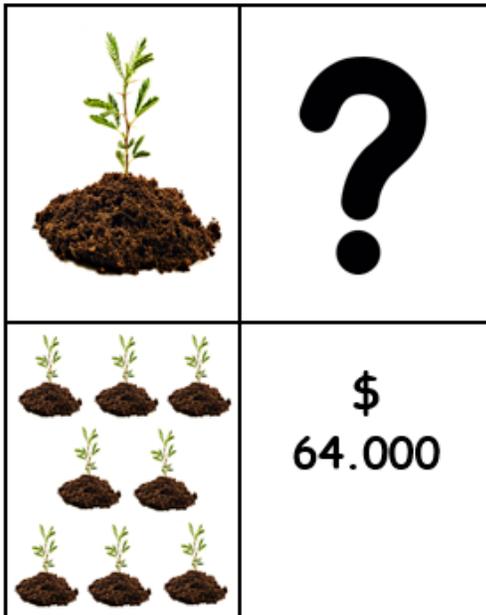
Problema 2. Partición-Razón con Variable Discreta ($P_2P_RV_D$)



Problema 4. Partición-Razón con Variable Continua-Discretizada ($P_4P_RV_{CD}$)



Problema 5. Partición-Razón con Variable Continua-Discretizada ($P_5P_RV_{CD}$)

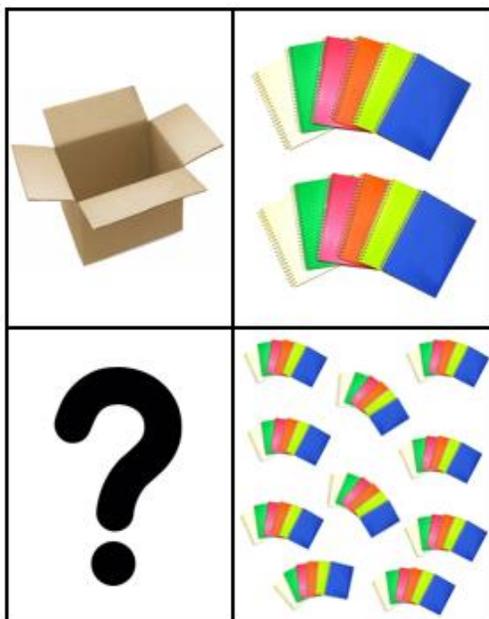


Problema 6. Partición-Razón con Variable Continua-Discretizada ($P_6P_RV_{CD}$)



Cartones para el Nivel 3. PROBLEMAS DE AGRUPAMIENTO -RAZON

Problema 1. Agrupamiento-Razón con Variable Discreta ($P_1A_RV_D$)



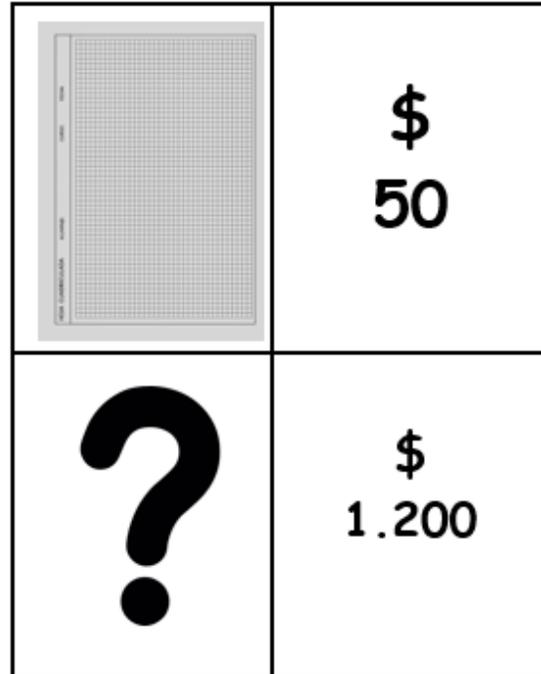
Problema 2. Agrupamiento-Razón con Variable Discreta ($P_2A_RV_D$)



Problema 3. Agrupamiento-Razón con Variable Discreta (P_{3ARVD})



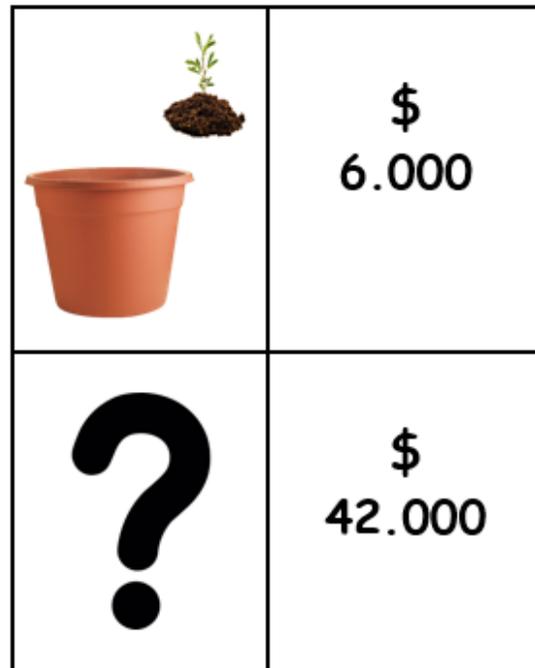
Problema 5. Agrupamiento-Razón con Variable Continua-Discretizada (P_{5ARVCD})



Problema 4. Agrupamiento-Razón con Variable Continua-Discretizada (P_{4ARVCD})



Problema 6. Agrupamiento-Razón con Variable Continua-Discretizada (P_{6ARVCD})



- **Instrucciones:**

1. Los estudiantes deben agruparse de la siguiente manera: formar **tres grupos que consten de dos personas cada uno**. El juego de la ruleta inicia con tres equipos. Los tres equipos formados inician el primer nivel del juego, que tiene como propósito resolver 6 problemas de tipo Multiplicación-Razón.
2. Cada equipo tiene dos oportunidades para girar la ruleta y resolver los problemas representados en los cartones. Como son dos estudiantes por equipo, cada estudiante resuelve el problema asignado en cada oportunidad. Si la ruleta cae nuevamente en el problema que ya ha sido resuelto, el equipo tiene derecho a girarla nuevamente.
3. La estrategia usada para la solución del problema debe ser representada en el tablero. Para confirmar si es correcta, esta debe ser comparada con la respuesta que aparece al respaldo de cartón. Por cada problema solucionado correctamente **en el primer nivel se le asigna 1 punto al equipo**.
4. En el segundo nivel continúan los tres equipos, cada uno tienen nuevamente dos oportunidades para hacer girar la ruleta con las mismas condiciones que en el nivel anterior.
5. Los problemas que allí se encuentran son los de Partición-Razón. En este nivel, por cada problema resuelto correctamente se asigna **3 puntos al equipo**.
6. Para pasar al último nivel, es necesario revisar los puntos que cada equipo lleva acumulados en los dos niveles anteriores. En el tercer nivel los tres equipos giran la ruleta dos veces y resuelve los problemas de Agrupamiento-Razón, quien logre resolverlos correctamente ganará **5 puntos** más.
7. Finalmente el equipo que acumuló más puntos al sumar los tres niveles, será el equipo ganador.

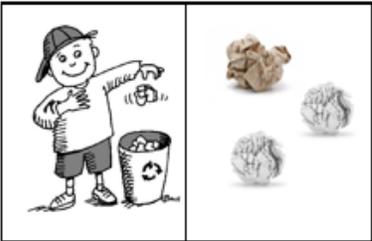
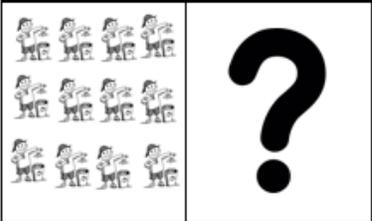
Reglas de juego:

1. El juego inicia cuando los jugadores estén listos.
2. El problema asignado debe ser resuelto únicamente por la pareja que giró la ruleta.
3. Como son dos estudiantes por equipo, cada estudiante resuelve un problema asignado en cada oportunidad.
4. La estrategia usada para resolver el problema debe ser escrita en tablero.
5. La respuesta al problema debe darse de manera escrita y debe ser comparada con la respuesta que aparece al respaldo de cada problema.
6. No se repite problema para resolver, si la ruleta selecciona un número donde el problema ya se resolvió, ésta se debe girar nuevamente.
7. El último equipo en participar resuelve los problemas que no han sido escogidos por la ruleta en los giros anteriores.

Anexo 4. Prueba de salida

 Universidad de La Sabana	MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA DOCENTE: Jeimy Lorena Pérez
Objetivo:	Reconocer las estrategias que utilizan los estudiantes del grado cuarto para resolver problemas multiplicativos simples de tipo razón.
Nombre :	_____
Grado: _____ Edad: _____ Repitente: SI _____ NO _____	

Observa cuidadosamente cada situación, formula el problema y resuélvelo utilizando el procedimiento que desees.

1. SITUACIÓN	PROBLEMA	SOLUCIÓN
 		
2. SITUACIÓN	PROBLEMA	SOLUCIÓN

			
		PROBLEMA	SOLUCIÓN
3. SITUACIÓN			
			
		PROBLEMA	SOLUCIÓN
4. SITUACIÓN			

	<p style="text-align: center;">\$ 1.750</p>		
	<p style="text-align: center;">?</p>	PROBLEMA	SOLUCIÓN
5. SITUACIÓN			
	<p style="text-align: center;">\$ 700</p>		
<p style="text-align: center;">?</p>	<p style="text-align: center;">\$ 2.100</p>	PROBLEMA	SOLUCIÓN
6. SITUACIÓN			

	<p>?</p>		
	<p>\$ 4.500</p>		