

## Información Importante

La Universidad de La Sabana informa que el(los) autor(es) ha(n) autorizado a usuarios internos y externos de la institución a consultar el contenido de este documento a través del Catálogo en línea de la Biblioteca y el Repositorio Institucional en la página Web de la Biblioteca, así como en las redes de información del país y del exterior con las cuales tenga convenio la Universidad de La Sabana.

Se permite la consulta a los usuarios interesados en el contenido de este documento para todos los usos que tengan finalidad académica, nunca para usos comerciales, siempre y cuando mediante la correspondiente cita bibliográfica se le de crédito al documento y a su autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, La Universidad de La Sabana informa que los derechos sobre los documentos son propiedad de los autores y tienen sobre su obra, entre otros, los derechos morales a que hacen referencia los mencionados artículos.

**BIBLIOTECA OCTAVIO ARIZMENDI POSADA**  
UNIVERSIDAD DE LA SABANA  
Chía - Cundinamarca

**LA DIMENSIÓN CONTEMPLATIVA DEL LENGUAJE PLÁSTICO CÓMO UN ELEMENTO  
QUE PERMITE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO A TRAVÉS DEL  
ARTE**

**MANUEL ALFONSO SIERRA GRANADOS**

**ASESOR:**

**YIMMY SECUNDINO TRIANA ESTRELLA**

**UNIVERSIDAD DE LA SABANA**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA**

**CHÍA, CUNDINAMARCA**

**2016**

**LA DIMENSIÓN CONTEMPLATIVA DEL LENGUAJE PLÁSTICO CÓMO UN ELEMENTO  
QUE PERMITE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO A TRAVÉS DEL  
ARTE**

**MANUEL ALFONSO SIERRA GRANADOS**

Trabajo de Grado presentado como requisito

Para optar al título de Magister en Pedagogía

**ASESOR**

**YIMMY SECUNDINO TRIANA ESTRELLA**

**UNIVERSIDAD DE LA SABANA**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA**

**CHÍA, CUNDINAMARCA**

**2016**

## **AGRADECIMIENTOS**

*Agradezco mucho a DIOS por el aliento de vida que me otorgó durante este proceso y la posibilidad de encontrar personas que me inspiraron a ser un mejor docente cada día y brindar más de mí para el avance de mis estudiantes.*

*Agradezco a mi familia que ha tenido la paciencia y la comprensión para apoyarme en los momentos difíciles y agotadores de este proceso investigativo, sin su apoyo sería imposible conseguir este logro.*

*A la Universidad de la Sabana por permitirme hacer parte de esta prestigiosa Institución Educativa, y fortalecer el amor y entrega a mi profesión Docente.*

*A la secretaria de educación de Bogotá por creer y aportar con la educación y capacitación de los docentes, brindando la posibilidad de ser mejores profesionales en nuestra labor.*

*A mi Asesor que con su aporte permitió concluir esta interesante ruta de crecimiento profesional.*

## **DEDICATORIA**

*A Dios y su forma interesante de motivar nuestra vida,*

*A mi esposa y mi hija que me enseñan a superar las dificultades,*

*Sin su compañía y apoyo no sería posible este logro.*

## TABLA DE CONTENIDO

<b>TABLA DE CONTENIDO.....</b>	<b>5</b>
Resumen.....	1
Palabras clave:.....	2
Abstract.....	3
Keywords:.....	3
<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>4</b>
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>	<b>7</b>
1.1 Problema.....	7
1.2 Antecedentes del problema.....	7
1.3 Justificación.....	11
1.4 Pregunta de investigación.....	14
1.5 Objetivos.....	14
<b>2. MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>16</b>
2.1. Estado del arte.....	16
2.2 Referentes teóricos.....	24
2.2.1 El Pensamiento Matemático .....	24
2.2.2 El Pensamiento geométrico .....	26
2.2.3 Dificultades en el aprendizaje de la geometría.....	27
2.2.4 Objetos Geométricos .....	30
2.2.5 Modelo De Van Hiele.....	37
2.2.6 Las cinco fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.....	40
2.2.7 La geometría y el arte .....	42
2.2.8 La educación artística .....	44
2.2.9 Comprensiones metodológicas de la educación artística .....	45
2.2.10 La contemplación en el lenguaje plástico.....	49
<b>3. METODOLOGÍA .....</b>	<b>51</b>
3.1 Enfoque y diseño de la investigación .....	51
3.2 Alcance .....	52

3.3 Población .....	54
3.4 Categorías de análisis .....	59
3.5 Instrumentos de recolección de información.....	62
3.6 Plan de acción.....	65
3.7 Actividades .....	66
<b>4. RESULTADOS Y ANALISIS DE LA INFORMACIÓN.....</b>	<b>75</b>
4.1 Análisis de la información.....	75
4.2 Actividades implementadas.....	75
4.2.1 Actividad 1 El cuento de los polígonos.....	75
Sesión 1.....	75
Sesión 2.....	82
Sesión 3.....	85
4.2.2 Actividad 3 Moldeando polígonos .....	92
4.2.3 Actividad 4 Rompecabezas teselados.....	96
4.2.4 Actividad 5 Creación de baldosas .....	102
4.2.5 Actividad 6 Construyendo teselaciones.....	105
4.3 Resultados.....	109
<b>5. CONCLUSIONES.....</b>	<b>117</b>
<b>6. RECOMENDACIONES.....</b>	<b>120</b>
<b>7. REFLEXIÓN PEDAGÓGICA .....</b>	<b>122</b>
<b>8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>124</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>127</b>
Anexo 1 - Prueba diagnóstica.....	127
Anexo 2 - Actividad 1 “el cuento de los polígonos” .....	131
Anexo 3 - Actividad 2 “guía de trabajo” .....	134
Anexo 4 – Actividad 3 “ejemplos de teselados” .....	135
Anexo 5 – Actividad 4 “¿qué es una teselación?” .....	135
Anexo 6 – Actividad 5 “teselaciones” .....	136
Anexo 7 – Construcción de baldosa generadora “hueso” .....	137
Anexo 8 – Formato de observaciones de intervención.....	138
Anexo 9 - Registro fotográfico.....	139
Actividad 1 “El cuento de los polígonos” .....	139

Actividad 2 “Reconociendo polígonos” .....	142
Actividad 3 “Moldeando polígonos” .....	144
Actividad 4 - Rompecabezas teselados .....	146
Actividad 5 “Creación de baldosas” .....	148
Actividad 6 “Construyendo teselaciones” .....	150
Exposición de arte .....	153
Obras finales realizadas por los estudiantes: .....	153
Exposición de trabajos en festival artístico escolar .....	155
Folleto promocional.....	156
Anexo 10 – Visita al museo.....	157

## INDICE DE ILUSTRACIONES

<i>Ilustración 1- Categorías de análisis</i> .....	62
--	----

## INDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1 Actividad de Implementación 1</i> .....	67
<i>Tabla 2 Actividad de Implementación 2</i> .....	69
<i>Tabla 3 Actividad de Implementación 3</i> .....	70
<i>Tabla 4 Actividad de Implementación 4</i> .....	71
<i>Tabla 5 Actividad de Implementación 5</i> .....	72
<i>Tabla 6 Actividad de Implementación 6</i> .....	73

## INDICE DE IMÁGENES

<i>Imagen 1 : Elementos de un polígono</i> .....	31
<i>Imagen 2 Polígono regular</i> .....	32
<i>Imagen 3 Ejemplo de rotación</i> .....	33
<i>Imagen 4 Ejemplo de rotación</i> .....	33
<i>Imagen 5 Ejemplo de traslación</i> .....	34
<i>Imagen 6 Ejemplo de traslación</i> .....	34
<i>Imagen 7 Ejemplo de teselados</i> .....	35
<i>Imagen 8 Deformaciones por giro de 90°</i> .....	36
<i>Imagen 9 Deformación por traslación</i> .....	36
<i>Imagen 10 Deformación por simetría en deslizamiento</i> .....	36
<i>Imagen 11 La nueva figura del pueblo de papel</i> .....	69
<i>Imagen 12 Construcción de polígonos</i> .....	79



<i>Imagen 13 Construcción de polígonos</i> .....	79
<i>Imagen 14 Moldes mal contruidos</i> .....	81
<i>Imagen 18 Teselando el plano</i> .....	84
<i>Imagen 17 Teselando el plano</i> .....	85
<i>Imagen 16 Teselando el plano</i> .....	85
<i>Imagen 20 Dibujo realizado por estudiantes 1</i> .....	86
<i>Imagen 19 Dibujo esperado</i> .....	86
<i>Imagen 21 Dibujo realizado por estudiantes 2</i> .....	87
<i>Imagen 22 Reconociendo polígonos</i> .....	91
<i>Imagen 23 Reconociendo polígonos</i> .....	91
<i>Imagen 24 Reconociendo polígonos</i> .....	92
<i>Imagen 25 Reconociendo polígonos</i> .....	92
<i>Imagen 27 Decorando polígonos</i> .....	92
<i>Imagen 26 Decorando los polígonos</i> .....	92
<i>Imagen 28 Moldeando polígonos</i> .....	95
<i>Imagen 29 Moldeando Polígonos</i> .....	95
<i>Imagen 30 Modelando Polígonos</i> .....	95
<i>Imagen 31 Moldeando polígonos</i> .....	96
<i>Imagen 32 Armando teselaciones</i> .....	97
<i>Imagen 33 Armando Teselaciones</i> .....	97
<i>Imagen 34 Construyendo teselaciones</i> .....	98
<i>Imagen 36 Construcción libre</i> .....	99
<i>Imagen 35 Construcción libre</i> .....	99
<i>Imagen 37 Construcción libre</i> .....	100
<i>Imagen 40 Construcción libre</i> .....	102
<i>Imagen 39 Construcción libre</i> .....	101
<i>Imagen 38 Construcción libre</i> .....	101
<i>Imagen 41 Construcción de baldosas generadoras</i> .....	102
<i>Imagen 42 Construcción de baldosas generadoras</i> .....	102
<i>Imagen 44 Baldosas generadoras</i> .....	104
<i>Imagen 43 Baldosas generadoras</i> .....	104
<i>Imagen 45 Baldosas generadoras</i> .....	104
<i>Imagen 47 Baldosas generadoras</i> .....	107
<i>Imagen 46 Baldosas generadoras</i> .....	107
<i>Imagen 48 Construcción de teselados</i> .....	107
<i>Imagen 50 Construcción de teselados</i> .....	107
<i>Imagen 49 Construcción de teselados</i> .....	107
<i>Imagen 51 Teselaciones</i> .....	108
<i>Imagen 53 Teselaciones</i> .....	108
<i>Imagen 52 Teselaciones</i> .....	109
<i>Imagen 54 Elaboración de polígonos</i> .....	139
<i>Imagen 55 Elaboración de polígonos</i> .....	139
<i>Imagen 56 Elaboración de polígonos</i> .....	139
<i>Imagen 57 Elaboración de polígonos</i> .....	139
<i>Imagen 58 Elaboración de polígonos</i> .....	139
<i>Imagen 59 Elaboración de polígonos</i> .....	139
<i>Imagen 60 Cubrimiento del plano</i> .....	140
<i>Imagen 61 Cubrimiento del plano</i> .....	140
<i>Imagen 62 Cubrimiento del plano</i> .....	140
<i>Imagen 63 Cubrimiento del plano</i> .....	140
<i>Imagen 64 Dibujando el cuento</i> .....	141
<i>Imagen 65 Dibujando el cuento</i> .....	141

<i>Imagen 66 Dibujando el cuento</i> .....	141
<i>Imagen 67 Dibujando el cuento</i> .....	141
<i>Imagen 68 Dibujando el cuento</i> .....	141
<i>Imagen 69 Dibujando el cuento</i> .....	141
<i>Imagen 70 Reconociendo polígonos</i> .....	142
<i>Imagen 71 Reconociendo polígonos</i> .....	142
<i>Imagen 72 Reconociendo polígonos</i> .....	142
<i>Imagen 73 Reconociendo polígonos</i> .....	142
<i>Imagen 74 Reconociendo polígonos</i> .....	143
<i>Imagen 75 Reconociendo polígonos</i> .....	143
<i>Imagen 76 Reconociendo polígonos</i> .....	143
<i>Imagen 77 Reconociendo polígonos</i> .....	143
<i>Imagen 78 Moldeando polígonos</i> .....	144
<i>Imagen 79 Moldeando polígonos</i> .....	144
<i>Imagen 80 Moldeando polígonos</i> .....	144
<i>Imagen 81 Moldeando polígonos</i> .....	144
<i>Imagen 82 Moldeando polígonos</i> .....	145
<i>Imagen 83 Moldeando polígonos</i> .....	145
<i>Imagen 84 Moldeando polígonos</i> .....	145
<i>Imagen 85 Moldeando polígonos</i> .....	145
<i>Imagen 86 Moldeando polígonos</i> .....	145
<i>Imagen 87 Moldeando polígonos</i> .....	146
<i>Imagen 88 Moldeando polígonos</i> .....	146
<i>Imagen 89 Rompecabezas teselado</i> .....	147
<i>Imagen 90 Rompecabezas teselados</i> .....	147
<i>Imagen 91 Moldeando polígonos</i> .....	147
<i>Imagen 92 Moldeando polígonos</i> .....	147
<i>Imagen 93 Moldeando polígonos</i> .....	147
<i>Imagen 94 Moldeando polígonos</i> .....	147
<i>Imagen 95 Rompecabezas teselados</i> .....	148
<i>Imagen 96 Rompecabezas teselado</i> .....	148
<i>Imagen 97 Rompecabezas teselado</i> .....	148
<i>Imagen 98 Rompecabezas teselado</i> .....	148
<i>Imagen 99 Creación de baldosas</i> .....	148
<i>Imagen 100 Creación de baldosas</i> .....	148
<i>Imagen 101 Creación de baldosas</i> .....	149
<i>Imagen 102 Creación de baldosas</i> .....	149
<i>Imagen 103 Creación de baldosas</i> .....	149
<i>Imagen 104 Creación de baldosas</i> .....	149
<i>Imagen 105 Creación de baldosas</i> .....	149
<i>Imagen 106 Creación de baldosas</i> .....	149
<i>Imagen 107 Construyendo teselaciones</i> .....	150
<i>Imagen 108 Construyendo teselaciones</i> .....	150
<i>Imagen 109 Construyendo teselaciones</i> .....	150
<i>Imagen 110 Construyendo teselaciones</i> .....	150
<i>Imagen 111 Construyendo teselaciones</i> .....	151
<i>Imagen 112 Construyendo teselaciones</i> .....	151
<i>Imagen 113 Construyendo teselaciones</i> .....	151
<i>Imagen 114 Construyendo teselaciones</i> .....	151
<i>Imagen 115 Construyendo teselaciones</i> .....	151
<i>Imagen 116 Construyendo teselaciones</i> .....	151
<i>Imagen 117 Construyendo teselaciones</i> .....	152

<i>Imagen 118</i>	<i>Construyendo teselaciones</i>	<i>152</i>
<i>Imagen 119</i>	<i>Creación de los estudiantes</i>	<i>153</i>
<i>Imagen 120</i>	<i>Creación de los estudiantes</i>	<i>153</i>
<i>Imagen 121</i>	<i>Creación de los estudiantes</i>	<i>154</i>
<i>Imagen 122</i>	<i>Creación de los estudiantes</i>	<i>154</i>
<i>Imagen 123</i>	<i>Exposición de trabajos</i>	<i>155</i>
<i>Imagen 124</i>	<i>Exposición de trabajos</i>	<i>155</i>
<i>Imagen 125</i>	<i>Folleto promocional</i>	<i>156</i>
<i>Imagen 127</i>	<i>Visita al museo</i>	<i>157</i>
<i>Imagen 126</i>	<i>Visita al museo</i>	<i>157</i>
<i>Imagen 128</i>	<i>Visita al museo</i>	<i>158</i>
<i>Imagen 129</i>	<i>Visita al museo</i>	<i>158</i>
<i>Imagen 130</i>	<i>Visita al museo</i>	<i>159</i>
<i>Imagen 131</i>	<i>Visita al museo</i>	<i>159</i>

## **Resumen**

En el presente reporte de investigación de enfoque cualitativo y enmarcado dentro de la investigación acción, se muestran los pormenores de una intervención de aula realizada con el objetivo de ayudar a superar las dificultades detectadas en el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes de grado quinto de la IED Manuelita Sáenz. La intervención se conformó de una serie de actividades que integran la enseñanza de la geometría y el arte por medio de las teselaciones, diseñadas teniendo en cuenta el modelo de Van Hiele y sus 5 fases de aprendizaje, que permiten identificar el avance de los estudiantes en su razonamiento geométrico.

La investigación fue dirigida a desarrollar una ruta de acción que permita reconocer la posible conexión existente entre el proceso de visualización geométrica y el proceso contemplativo del arte, e identificar en qué medida el trabajo realizado a través del arte puede contribuir en el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes y hasta qué punto les permite superar las dificultades observadas en cuanto al reconocimiento de polígonos y el manejo de los instrumentos de trazo, para lo cual propone 6 actividades orientadas a la construcción de teselaciones.

La intervención de aula propuesta se fundamentó en el modelo de Van Hiele para la comprensión del desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, puesto que este modelo no solo presenta unos niveles en los cuales se pueden ubicar a los estudiantes de acuerdo a su razonamiento geométrico, sino también determinar el avance presentado por estos en la resolución de las dificultades observadas; por otra parte se incorporan elementos propios de arte plástico que el docente implementa por medio de las teselaciones como elemento integrador de la geometría y el arte para lograr vincular ambos pensamientos en la clase de geometría.

Entre los hallazgos más significativos que se pueden reportar en la investigación se encuentran el reconocimiento de elementos comunes entre la contemplación artística y la visualización geométrica, los

cuales brindan la posibilidad de una integración curricular en el aula de clase, aspecto que puede emplear el docente para ayudar a solventar dificultades en el razonamiento geométrico de los estudiantes con el empleo de las teselaciones.

**Palabras clave:**

Geometría, artes plásticas, creatividad, aprendizaje, estrategias educativas, modelo de Van Hiele.

## **Abstract**

In this research report qualitative approach and framed within the action research, details of an intervention classroom made in order to help overcome the difficulties encountered in the development of geometric reasoning of students in fifth grade shown I.E.D. Manuelita Saenz; The intervention was formed of a series of activities that integrate the teaching of geometry and art through tessellations, designed taking into account the model of Van Hiele and its 5 phases of learning, which identify the progress of students in its geometric reasoning.

The research aims to find a route of action to recognize the possible link between the process of geometric visualization and contemplative art process, and identify to what extent the work done through art can contribute to the development of geometric reasoning and to what extent students it enables them to overcome the difficulties in the recognition of polygons and management instruments stroke, for which proposes six activities aimed at building tessellations.

The intervention classroom proposal is based on the model of Van Hiele for understanding the development of geometric thinking of students, since this model not only features levels where you can place students according to their geometric reasoning, but also determine the progress made by them in the resolution of the difficulties observed; on the other elements of plastic art teacher implemented through tessellations how integrating element of geometry and art to achieve link the two thoughts in geometry class are incorporated.

Finally the results of which are recognition of common elements between artistic contemplation and geometric display are presented, which provide the possibility of integrating curriculum into the classroom, something that can employ the teacher to help solve difficulties geometric reasoning in students with the use of tessellations.

## **Keywords:**

Geometry, art, creativity, learning, educational strategies, Van Hiele model.

## INTRODUCCIÓN

En el presente reporte de investigación se muestra los aportes que puede brindar al docente el uso de las teselaciones en la clase de geometría cómo una estrategia pedagógica para facilitar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes de grado quinto de educación básica a través de la contemplación de obras de arte. Se aborda este tema de investigación para aprovechar la especialidad en artes del docente investigador quien ve en el empleo del arte plástico y su dimensión contemplativa una forma para apoyar el razonamiento geométrico de los estudiantes, y en específico ayudar a superar las dificultades que se presentan en el aula de clase referidas a la apropiación de conceptos y manejo de instrumentos de trazo.

El enfoque seleccionado para la investigación es de tipo descriptivo – interventivo, ya que su propósito fundamental es proponer una serie de estrategias pedagógicas que puedan emplearse para solventar las dificultades presentadas por los estudiantes en clase de geometría ; se fundamenta en la recopilación y análisis de información respecto a las dificultades observadas y luego se proponen 6 actividades que desde el aula de clase el docente puede aplicar para ayudar a superar estas dificultades. Cómo un elemento fundamental para entender cómo ayudar en el desarrollo de habilidades para el razonamiento geométrico y cómo identificar los avances de los estudiantes en este aspecto, el docente integra el modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría, elemento que se utiliza para reconocer el nivel de razonamiento que poseen los estudiantes y además brinda herramientas para potenciar las habilidades geométricas lo que permitan desarrollar un avance en este razonamiento.

En el transcurso de la investigación se brindan aportes frente a los beneficios de llevar a cabo una propuesta de integración curricular en el aula de clase, que facilitó no solo el desarrollo del razonamiento geométrico, sino también el desarrollo de la capacidad contemplativa del arte en los estudiantes; de esta forma se encontraron elementos en común entre la visualización geométrica y la

contemplación artística que pueden trabajarse con la creación de teselaciones y que a la vez permitieron la manipulación de los instrumentos de trazo y medida.

Luego de implementar las actividades de intervención se reconocieron avances en el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes, se identificaron los elementos comunes a la visualización geométrica y la contemplación artística, que contribuyeron al aprendizaje de la geometría de manera notable con relación al nivel de conocimientos que mostraban antes de iniciar la intervención. De igual manera, el docente no solo identificó las dificultades que presentaron los estudiantes en el aprendizaje de la geometría sino también reconoció aquellas actividades que permitieron superar las deficiencias y desarrollar de mejor manera el razonamiento geométrico a partir de la creación de obras de arte.

Producto de las reflexiones pedagógicas realizadas durante la investigación, el docente investigador pudo modificar sus prácticas pedagógicas, fomentando sus conocimientos frente a la enseñanza de la geometría y el diseño de actividades integradoras en el aula de clase, reconociendo la importancia que tiene para los estudiantes el desarrollo de las habilidades y destrezas en el manejo de los instrumentos de trazo en la clase de geometría y los aportes que brinda el empleo de materiales plásticos no solo para la motivación de clase, sino también para el aprendizaje de conceptos geométricos.

El documento se desarrolla a lo largo de 4 capítulos en los cuales se plantea no solo el problema a investigar, sino que también formula una ruta de intervención que vincula la visualización geométrica y la contemplación artística en el aula de clase, propone para ello 6 actividades de implementación con las cuales se solventan las dificultades geométricas presentadas por los estudiantes dando fundamentos teóricos para entender la propuesta, se recopilan de esta manera una serie de evidencias que permiten observar los aportes de las actividades en desarrollo del razonamiento geométrico, elementos que le



permiten al docente plantear una serie de conclusiones frente a la integración curricular y la pertinencia de la investigación con sus estudiantes.

## **1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **1.1 Problema**

Los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Distrital Manuelita Sáenz presentan dificultad en el aprendizaje de algunos conceptos geométricos cómo son los polígonos regulares, sus propiedades y el reconocimiento de los movimientos de rotación y traslación en el plano, de igual manera se reconocen deficiencias en la manipulación y uso de los instrumentos de trazo cómo la regla y el transportador, estos elementos repercuten en el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes y afectan su desempeño en la asignatura; por otra parte, se presenta el hecho de que el docente que guía el aprendizaje de la asignatura no es especialista en el área, sin embargo tiene especialidad en artes plásticas, por tanto quiere aprovechar esta especialidad para potenciar la enseñanza de la geometría y se apoya en la dimensión artística del lenguaje plástico para llevar a cabo la propuesta.

### **1.2 Antecedentes del problema**

El área de matemáticas en la Institución Educativa Manuelita Sáenz es una de las áreas del currículo escolar en la que los estudiantes requieren de un mayor apoyo y acompañamiento del docente para alcanzar los logros propuestos y las temáticas planteadas, esto debido a la dificultad de apropiar y desarrollar de manera adecuada las habilidades requeridas en los pensamientos geométrico, numérico, métrico, aleatorio y variacional que deben adquirir los estudiantes en este campo de conocimiento; en el caso particular del grado quinto en la Institución Educativa Manuelita Sáenz de la Localidad cuarta de San Cristóbal en la Ciudad de Bogotá los resultados obtenidos en las pruebas Saber corroboran esta problemática.

De acuerdo a lo anterior se puede observar cómo estos resultados en pruebas Saber han demostrado un histórico bajo rendimiento si se tienen en cuenta los últimos dos años, en los cuales uno de los componentes a evaluar es el componente geométrico-métrico. Se observa de esta forma que los

resultados obtenidos en las pruebas Saber para grado quinto del año 2013 el 66% de los estudiantes se encuentran en los niveles mínimo e insuficiente, porcentaje que aumentó para el año 2014 donde el 72% de los estudiantes se encuentran en estos mismos niveles; la prueba evalúa tres competencias generales en matemáticas, estas son razonamiento, comunicación y resolución, comparando los años 2014 y 2013 la prueba arroja cómo resultado que el plantel educativo es débil en “razonamiento y argumentación, Fuerte en Comunicación, representación y modelación” (Icfesinteractivo, 2016)<sup>1</sup>. Por otro lado los resultados obtenidos en la prueba ofrecen otros componentes referidos a conocimientos específicos evaluados en matemáticas entre estos se pudo encontrar que en comparación con otras instituciones distritales los resultados fueron “similar en el componente numérico-variacional, débil en el componente geométrico-métrico, representación y modelación, fuerte en el componente aleatorio” (Icfesinteractivo, 2016); estos resultados permiten reconocer que en el aspecto matemático los estudiantes de la IED Manuelita Sáenz tienen desempeños similares en el componente geométrico-métrico a las otras instituciones educativas y que tienen un desempeño inferior a otras instituciones en el componente de representación y modelación, pero si demuestran un desempeño superior a otras instituciones en el componente aleatorio, de esta forma se observa la necesidad de fortalecer el desarrollo de las habilidades y el razonamiento de los estudiantes en el componente geométrico-métrico, el cual describe un bajo interés por el área y una poca intervención desde el aula de clase.

Según lo mencionado por el MEN (2005) en su Documento “Programa Saber” en la Prueba Saber se evalúan los conocimientos, procedimientos, destrezas y estrategias que utiliza el estudiantes para la resolución de problemas matemáticos (MEN, 2005), en referencia al componente Geométrico-métrico esta prueba busca reconocer el análisis abstracto de figuras en el plano, el uso de unidades de

---

<sup>1 1</sup> Fuente recuperada de la página

<http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/historico/reporteHistoricoComparativo.jsp>

Fecha de actualización 31 de Marzo 2016

medida, la selección y uso de instrumentos adecuados, al igual que la comprensión del espacio y el pensamiento visual. El Componente Geométrico- métrico se explica desde el Instructivo Nacional de las pruebas Saber cómo aquel que busca demostrar algunas habilidades en el razonamiento Geométrico cómo describir las características de diferentes figuras planas y la comparación de estas características con otras figuras, al igual que establecer relaciones entre diferentes sistemas de medida y el reconocer las propiedades invariantes de una figura cuando se aplica una transformación en el plano. (Icfes, 2012)

Al realizar un comparativo entre lo propuesto por el MEN, el Icfes y los desempeños de los estudiantes de la Institución Educativa Manuelita Sáenz, el docente investigador encargado de orientar el área en el grado quinto del año 2015, observa que los estudiantes presentan dificultades frente a elementos propuestos en los lineamientos curriculares cómo son el reconocimiento de las características de diferentes figuras planas, el manejo y reconocimiento de los sistemas de medida, las rotaciones y traslaciones en el plano (MEN, 2006 evidenciándose esto en las dificultades demostradas por los estudiantes en el aula de clases al momento de realizar tareas geométricas propuestas por el docente, en las que se requiere comprender los conceptos de polígono, rotaciones y traslaciones, ya que los estudiantes presentan inconvenientes para reconocer cada movimiento en el plano e identificar las características generales de un polígono regular cómo son el ser una figura cerrada, formada por semirectas y que está conformada por algunos elementos cómo son los lados, los ángulos y los vértices, y que estos a su vez deben tener una relación de igualdad en longitud e inclinación para conformar un polígono regular.

Entre las dificultades presentadas se halla la inadecuada manipulación de los instrumentos de trazo y medida cómo es el caso de la regla y el transportador; esto se evidencia cuando la mayoría de los estudiantes del aula no identifican la forma adecuada de utilizar uno y otro instrumento, de igual manera en los inconvenientes para la ubicación de los instrumentos de trazo para comenzar a medir y también

en la poca habilidad para diferenciar entre las unidades de longitud (centímetros) y de inclinación (grados) lo que impide el trazo de semirectas y ángulos con una medida establecida para construir polígonos. Estas dificultades presentadas por los estudiantes han sido mencionadas y reconocidas por autores como Franchi & Rincón (2004), las autoras realizan un artículo investigativo denominado “tipología del error en el área de geometría Plana” allí señalan que los inconvenientes de los estudiantes en la realización de tareas geométricas pueden verse reflejadas en el empleo inapropiado de los instrumentos de dibujo, una inadecuada notación de los elementos geométricos, utilizar inadecuadamente la terminología geométrica y dibujar figuras geométricas que no corresponden con el enunciado propuesto.

Por otro lado, los estudiantes tienen dificultad para realizar conjeturas y verificar la aplicación de algunos movimientos en el plano como son la rotación y la traslación, esto puede deberse al no conocimiento y aplicación de los conceptos necesarios para la tarea y el añadir hipótesis que no están dadas en la solución o en la demostración. (Franchi & Rincón, 2004) o dificultades presentadas por la dificultad del lenguaje (Radatz, 1979) debido a que los términos presentados a los estudiantes de rotación y traslación no son totalmente comprendidos, de igual manera; Radatz (1979) vincula a esta problemática los errores debidos a dificultades para obtener información espacial, los estudiantes no pueden encontrar elementos como el cambio de posición de ángulos o la inclinación de la figura para definir el movimiento realizado, Socas (1997) hace su aporte al tema mencionando que estas inconvenientes pueden estar asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, lo que dificulta dar sentido a ciertos tipos de conocimientos.

Las dificultades de aula presentadas anteriormente se corroboran con el seguimiento realizado por el docente en diferentes diarios de campo llevados a cabo en las clases de geometría de grado quinto, en los cuales se pone en evidencia las dificultades antes expuestas en los aspectos conceptuales

y procedimentales del Pensamiento Geométrico de los estudiantes que conllevan a aspectos actitudinales, ya que se percibe desmotivación hacia la clase al igual que un bajo interés por superar estas dificultades. Este último factor, el motivacional ha sido mencionada cómo una de las posibles dificultades en la enseñanza de la geometría, Socas (1997) menciona cómo algunos errores en la ejecución de tareas de clase tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

### **1.3 Justificación**

El pensamiento geométrico está concebido cómo uno de los cinco pilares fundamentales que aportan al desarrollo del pensamiento matemático en la escuela y hace parte fundamental de los estándares del Ministerio de Educación Nacional en el componente matemático (MEN, 2006), en el cual se busca que los estudiantes alcancen un determinado nivel de razonamiento geométrico para resolver problemas de representación y conceptualización de su realidad, se propone para tal fin que el estudiante alcance una serie de competencias que den cuenta del avance en este aspecto. Por lo tanto se deben proponer situaciones que promuevan el desarrollo de habilidades que faciliten el reconocimiento de características y propiedades de los polígonos regulares e irregulares, la localización y descripción de relaciones espaciales en el plano, la comparación y clasificación de figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices), verificar los resultados de aplicar transformaciones en el plano, al igual que el conocimiento y correcta manipulación de los elementos de trazo y medida, se presentan cómo elementos fundamentales para el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes de grado quinto (MEN, 2006).

Frente al objetivo de alcanzar las competencias anteriormente mencionadas para grado quinto, se puede observar que estas van dirigidas a que el estudiante logre alcanzar unos mínimos esperados en los estándares curriculares, a continuación se cita el siguiente estándar que apunta a:

“la apropiación por parte de los estudiantes del espacio físico y geométrico requiere del estudio de relaciones espaciales de los cuerpos sólidos y huecos entre sí; de cada cuerpo sólido o hueco con sus

formas y con sus caras, bordes y vértices; de las superficies, regiones y figuras planas con sus fronteras, lados y vértices, en donde se destacan los procesos de localización en relación con sistemas de referencia, y del estudio de lo que cambia o se mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones”.(MEN, 2006, p.67)

Para poder alcanzar los mínimos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional en el pensamiento geométrico, es importante en primer lugar tener en cuenta aquellas dificultades que pueden tener los estudiantes para alcanzar el nivel de razonamiento geométrico esperado, algunas de estas dificultades han sido reconocidas por el docente encargado del área a través del seguimiento en diarios de campo de las actividades y desempeño de los estudiantes en la clase de geometría, entre ellas se encuentran la imposibilidad de reconocer las propiedades de los polígonos regulares, la localización y descripción de relaciones espaciales en el plano, la comparación y clasificación de figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices), dificultades en el reconocimiento de las características de diferentes figuras planas, el manejo y reconocimiento de los sistemas de medida, la dificultad para realizar conjeturas y verificar la aplicación de algunos movimientos en el plano cómo son la rotación y la traslación; estas problemáticas han sido estudiadas anteriormente por Franchi & Rincón (2004), en su estudio “tipología de los errores en la geometría plana” reúnen documentos de varios autores que han estudiado las problemáticas de los estudiantes a la hora de aprender geometría, de esta manera se encuentran algunas problemáticas similares a las observadas por el docente en su aula de clase cómo son: el uso inapropiado de los instrumentos de dibujo y elementos geométricos, utilizar inadecuadamente la terminología geométrica o describir de manera errónea la construcción de figuras geométricas, trazar de manera equivocada figuras y lugares geométricos y/o sus elementos, intentar demostrar o resolver un problema geométrico sin utilizar algún dato dado.

Se observa entonces, cómo las dificultades reconocidas por el docente a través de su práctica de aula no son algo nuevo en la enseñanza de la geometría, ya que son problemáticas que se presentan de

manera frecuente en las aulas de clase y por esta razón se han realizado aportes de diferentes autores frente al tema, de esta forma es importante reconocer también que otros autores como Brousseau (2001) mencionan que pueden existir una serie de obstáculos que afectan el desarrollo de razonamiento geométrico en los estudiantes, entre estos obstáculos menciona los relacionados a nivel práctico, en el desarrollo de la tarea, el error de técnica, el error de tecnología y dificultades a nivel teórico.

Estas dificultades en la comprensión de la geometría pueden afectar el desempeño de los estudiantes en otras asignaturas diferentes a las Matemáticas, pues cómo lo mencionan los lineamientos curriculares “la percepción Geométrica se complejiza y ahora las relaciones de los objetos se deben no solo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas” (MEN, 2006, p.61), de igual manera más adelante el mismo texto alude a cómo el estudio de la geometría se relaciona con el arte y la decoración, con el diseño, con la educación física, los deportes y la danza, y con otras formas de lectura y comprensión del espacio que el estudiante utilizará en su vida diaria; por tal motivo se hace necesario el estudio de las dificultades en el aprendizaje geométrico y el encontrar una ruta de acción que facilite su comprensión.

Por otro lado se presenta un obstáculo didáctico por parte del docente, como lo menciona Vinner (1991) y es el hecho que el docente investigador no es especialista en el área de matemáticas, esto genera una gran dificultad ya que carece de elementos teóricos específicos que le ayuden en la enseñanza de esta asignatura en el aula, presentándose esto cómo un obstáculo a la hora de planear las clases y diseñar las actividades, lo que genera en el docente frustración al no conseguir que los estudiantes comprendan conceptos nuevos; de esta manera surge la inquietud de formular una ruta de trabajo que le permita utilizar su experiencia cómo docente de artes plásticas y la manipulación de diferentes materiales en la elaboración de obras artísticas para vinculen los conocimientos geométricos propios de este grado de escolaridad, y logre cambiar las prácticas pedagógicas tradicionales que ha



empleado para la enseñanza de la geometría, es aquí donde estudios como los presentados por Gutiérrez (1990) reconocen una posible ruta de integración entre el arte y la geometría como es el estudio de las teselaciones de M.C. Escher; lo que permitirá no solo abordar los elementos geométricos sino también acercar a los estudiantes a los componentes de la educación artística como son la contemplación, la transformación simbólica, la reflexión y la valoración de una obra.

#### **1.4 Pregunta de investigación**

¿De qué manera una propuesta didáctica de integración, entre el arte y la geometría, puede contribuir a superar las dificultades que presentan los estudiantes de grado quinto de la IED Manuelita Sáenz en la comprensión de conceptos geométricos como son el reconocimiento de algunos polígonos regulares y sus propiedades, los movimientos de rotación y traslación en el plano, y el manejo de los instrumentos de trazo y medida en su construcción?

#### **1.5 Objetivos**

##### **Objetivo General**

Diseñar e implementar una propuesta didáctica de integración pedagógica entre el arte y la geometría, y determinar en qué medida contribuye a solventar las dificultades que presentan los estudiantes de grado quinto en la comprensión de conceptos geométricos como son el reconocimiento de algunos polígonos regulares y sus propiedades, los movimientos de rotación y traslación en el plano, y el manejo de los instrumentos de trazo y medida en su construcción.

##### **Objetivos Específicos**

1. Reconocer en qué medida la contemplación artística desde el lenguaje plástico, aporta al razonamiento geométrico de los estudiantes en el reconocimiento de polígonos regulares, sus propiedades y construcción empleando los instrumentos de trazo, de tal manera que permita fundamentar la importancia de la integración en el aula de clase.

2. Determinar los aspectos pertinentes para diseñar varias estrategias didáctica que apoyadas en la experiencia artística ayuden a desarrollar el razonamiento geométrico de los estudiantes y el empleo de los elementos de trazo y medida para comprender los movimientos de rotación y traslación.
3. Evaluar la pertinencia de aplicar en el aula de clase las teselaciones cómo una estrategia didáctica integradora entre la geometría y el arte que facilite el desarrollo de habilidades para el razonamiento geométrico de los estudiantes.
4. Determinar el avance de los estudiantes en su razonamiento geométrico tomando cómo base los niveles de Van Hiele, luego de aplicar algunas actividades artísticas que vinculan elementos geométricos cómo la construcción de polígonos, manejo de la regla y el transportador, los movimientos rotación y traslación en la construcción de teselaciones.
5. Evaluar los posibles aportes que brinda la contemplación artística de obras teseladas en el fortalecimiento del proceso de visualización y el desarrollo de habilidades geométricas en los estudiantes.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. Estado del arte

Abordar las problemáticas referidas a las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo de su razonamiento geométrico en el grado quinto, requirió realizar una indagación desde el ámbito matemático y geométrico que permitiera profundizar el problema, y plantear un horizonte para comprender los posibles elementos que desde lo metodológico, lo didáctico y lo pedagógico puedan presentarse como posibles causas que dificultan el aprendizaje de la geometría en los estudiantes; de igual modo se busca reconocer una serie de actividades que desde el aula de clase puedan ayudar a superar las dificultades presentadas por los niños y los elementos que puede tener en cuenta el docente a la hora de plantear una propuesta pedagógica de clase, que facilite estos aprendizajes y motive a los participantes a superar las falencias detectadas, es allí donde se recurre al arte plástico no sólo por ser el lenguaje del arte que presenta mayor afinidad con la geometría, sino también como medio facilitador de estos aprendizajes, puesto que las dimensiones del arte como la contemplación, y la transformación simbólica puede promover por medio de la manipulación de materiales artístico una ruta para que los estudiantes encuentren gusto por la geometría y se favorezca el desarrollo de las habilidades geométricas.

Por esta razón, se abordan en primer momento las dificultades que se pueden presentar en los estudiantes al desarrollar su pensamiento geométrico, de esta forma se encuentran aportes de Franchi & Rincón (2004) con su documento tipología de errores en geometría plana, aquí las autoras profundizan en las diferentes falencias y errores en los que pueden incurrir los estudiantes al abordar los conceptos geométricos y llevar a la práctica ejercicios que implican también el uso de materiales e implementos geométricos; toman como referencia varios autores entre ellos Brousseau (2001), Socas (1997), Movshovitz (1997), Radatz (1979) y de Atolfi (1999), para plantear una lista que permita tipificar las

dificultades presentadas por los estudiantes de una institución educativa, identificando similitudes en los aportes de los autores referenciados al describir cada una de las dificultades.

Este documento mencionado es muy valioso para la presente investigación en la medida que permite reconocer que las dificultades evidenciadas por el docente investigador no surgen solamente en su aula de clase y con sus estudiantes, sino que este tipo de dificultades se presenta en muchas circunstancias y es muy frecuente encontrarlo en cualquier aula de clase y en cualquier nivel educativo, de allí que esta problemática presentada en el desarrollo del pensamiento geométrico haya sido estudiado por tantos autores; esto le permite al investigador reconocer que existen propuestas didácticas y pedagógicas desde diferentes ámbitos y escenarios que pueden brindar sustento a la intervención que se va a realizar en la población seleccionada.

Además de indagar sobre las dificultades presentadas en el desarrollo de las habilidades geométricas, el rastreo de material académico presentó una directriz marcada por el interés personal del docente investigador de aplicar sus conocimientos en el área de educación artística, con el cual se espera no solo generar un ambiente de motivación y gusto por la actividad geométrica, sino también indagar hasta qué punto puede ser empleado para potenciar el aprendizaje de la geometría por parte de los estudiantes, favoreciendo el reconocimiento de los polígonos regulares, su construcción con la ayuda de los instrumentos de trazo y medida, e identificar los movimientos de rotación y traslación en el plano.

De esta forma, la búsqueda de referentes investigativos apunta a la integración de estos dos tipos de pensamiento, el geométrico y el artístico; tras múltiples averiguaciones e indagaciones en el material académico de algunos investigadores, se encuentran varios documentos que integran los conocimientos geométrico y artísticos brindando una posible ruta de trabajo para esta investigación, de esta manera aportes como el documento “Los cubrimientos de M.C. Escher como material didáctico en la enseñanza

de las isometrías” (Gutiérrez, 1990) en España, permiten reconocer diferentes propuestas didácticas para la enseñanza de los elementos geométricos entre ellos el uso de las teselaciones, para ello basó sus estudios en las obras del Holandés M.C. Escher, quien demostró por medio de sus obras de arte gran manejo técnico de los materiales de trazo y el empleo de diferentes conceptos geométricos entre ellos los movimientos en el plano (rotaciones y traslaciones), al igual que las propiedades de los polígonos regulares e irregulares para dividir el plano; este documento de Gutiérrez propone después de una explicación de la temática de las teselaciones una forma de llevar estos conceptos geométricos a los estudiantes, al igual que exponer diferentes formas para elaborar las baldosas de teselación cómo son las deformaciones por traslación, deformaciones por giro de  $90^\circ$  y  $180^\circ$  y la deformación simétrica por desplazamiento; de igual manera expone técnicas para la elaboración de las teselaciones en las cuales menciona la construcción por cubrimientos regulares de simetrías en deslizamiento y por giro.

Este artículo de Gutiérrez (1990) brinda elementos didácticos contundentes a la presente investigación que serán empleados para el diseño de algunas de las actividades que se van a formular a los estudiantes, otorgando ejemplos y ejercicios sobre cómo elaborar las baldosas generadoras con los estudiantes a partir de un polígono regular; realiza además un análisis de varias obras de Escher en las que reconoce su construcción, esto sirve de guía al docente para llevar al aula de clase la contemplación de obras de arte y fundamentar el análisis geométrico de estas mismas obras.

De otra parte, Schattschneider (2010) presenta un artículo denominado las obras de M.C. Escher y sus teselaciones del plano, en este se puede apreciar una propuesta didáctica de cómo construir una serie de figuras simétricas a partir de algunos polígonos regulares e irregulares utilizando la regla y el compás, se plantean también actividades donde los estudiantes pueden dividir el plano y reconocer con ello algunas características propias de las obras teseladas cómo son el hecho de determinar las baldosas generadoras y los movimientos de traslación y rotación en el plano. En este mismo artículo la autora

explica cómo a partir del conocimiento de la geometría y el posterior análisis de algunas obras clásicas Islámicas en los ornamentos de la Alhambra de Granada, en España; el artista Escher comienza a crear sus propias teselas (baldosas) para construir el inicio de su obra, nos demuestra de manera matemática con fórmulas y aplicaciones la creación de algunas de estas teselas, que el artista luego fue modificando para crear obras cómo la metamorfosis, día y noche, ángeles y demonios, entre otras.

Esta investigación realizada por *Schattschneider* (2010), brinda luces sobre cómo se pueden elaborar diferentes teselados con métodos sencillos desde el aula de clase que vinculen ejercicios y actividades para solventar las dificultades presentadas por los estudiantes en el razonamiento geométrico y el manejo de los elementos de trazo y medida; esto permitirá entender cómo la obra de Escher se puede utilizar para vincular los conocimientos geométricos que se busca solventar en grado quinto y al mismo tiempo brindar un espacio de creación y expresión desde el arte que motive a los estudiantes frente al aprendizaje de la geometría.

En un contexto más cercano, en Costa Rica encontramos un trabajo orientado desde el Ministerio de Educación de este país denominado “Escher y la Geometría”, dirigido a la capacitación de los docentes para emplear en sus clases de geometría las teselaciones de Escher lo que permite abarcar con los estudiantes temas cómo la simetría, ejes de simetría, polígonos regulares y las traslaciones en el plano, de esta manera se utilizan las obras del artista para trabajar en los estudiantes de educación primaria el análisis geométrico a partir de la comprensión de la obra de arte (Barrantes, 2013). Esta es una propuesta didáctica muy clara donde una de las obras de Escher sirve cómo excusa para orientar la clase de geometría en grado cuarto de primaria, permitiendo que los estudiantes descompongan los elementos de la obra y reconozcan su organización de manera geométrica; esta aplicación didáctica de los teselados permite al investigador reconocer las ventajas de emplear elementos artísticos en la clase

de geometría y reconocer también cómo los conceptos previstos en el área de geometría se pueden vincular alrededor de las teselaciones.

En Venezuela surge una propuesta integradora del arte y la geometría, titulada “Enseñanza de simetrías matemáticas a través del arte: propuesta para promover un estudio integral” de la autora Daniela Palacios, en ella se describen teorías del aprendizaje relacionadas con la construcción del pensamiento y la adquisición de aprendizajes geométricos significativos para justificar el diseño de material didáctico de clase teniendo en cuenta el modelo de pensamiento geométrico de Van Hiele, donde los temas expuestos son explicados a través de representaciones artísticas como pinturas y mosaicos (Palacios, 2007). En este documento la autora explica de manera descriptiva cómo se reconoce la clase de geometría por parte de los estudiantes y qué elementos teóricos conocen sobre esta temática; luego, al identificar la metodología tradicional como principal didáctica de la clase, indaga sobre la aplicación del arte plástico y las teselaciones como un medio para llevar a la práctica los conceptos y procedimientos propios de la geometría; por último cómo recomendaciones resalta la importancia de continuar con esta línea de investigación que busca integrar diferentes pensamientos, generando una formación integral de los estudiantes.

Estos aportes presentados por la autora sirven de motivación para llevar a cabo la vinculación del arte en la clase de geometría en la presente investigación, donde se busca proponer la manipulación de diferentes materiales artísticos para elaborar los polígonos y los teselados propuestos, permitiendo de esta manera que el desarrollo del pensamiento geométrico surja de la experimentación y manipulación de los materiales.

En nuestro país surgen trabajos académicos como “Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte” liderado por un grupo de

investigadores de la Universidad Distrital y puesto a conocimiento de la comunidad académica en el 11° encuentro de matemática educativa, (Herrera, Montes, Cruz & Vargas, 2010), este artículo da cuenta de cómo se pueden potenciar expresiones artísticas y creativas de diferentes individuos, a partir de la representación de nociones geométricas presentes en los cubrimientos del plano, lo que permite observar las diferentes propiedades de los polígonos regulares e irregulares aplicadas en la división del plano, creando una interrelación matemática necesaria para el desarrollo cognitivo, sociocultural de los estudiantes y validando su importancia en la didáctica de la geometría, dando nuevas herramientas para la práctica docente a partir de una experiencia de aula.

Este artículo académico de la Universidad Distrital permite observar cómo la temática de integración curricular no es extraña, sino que es muy pertinente para abordar nuevos conocimientos geométricos y evocar la expresión creativa de los estudiantes en cualquier grado de escolaridad, ya que esta es aplicada en estudiantes universitarios pero propone la apertura de la investigación y algunas actividades a otros niveles de escolaridad; este trabajo de investigación permite observar una doble línea de intervención ya sea desde la matemática hacia el arte o en sentido contrario, permitiendo prestar atención ante los avances y relaciones en ambos pensamientos.

Un documento interesante es el presentado por estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia denominado “las teselaciones en el club de matemáticas” (Angel, Jimenez, Rojas, Zambrano, & Mora, 2006) en el cual se analizan las dificultades de los estudiantes talentosos en matemáticas a la hora de adquirir el conocimiento geométrico; esta investigación plantea cómo elemento facilitador para el aprendizaje de la geometría el análisis de las teselaciones de Escher, allí se analizan elementos como la creación de las baldosas generadoras y los movimientos en el plano como son la rotación y traslación.



Otro trabajo de investigación es presentado en nuestro país es el realizado por la Universidad del Valle, liderado por la asesora María Fernanda Mejía, denominado “El estudio de las teselaciones para la enseñanza de la Geometría Transformacional” (Mejía, 2013) en este estudio se habla de cómo en la Universidad del Valle se aplican las teselaciones como herramienta didáctica para comprender la geometría y la creación de polígonos a partir de las obras de arte, uno de sus intereses investigativos es buscar las conexiones del arte y la geometría; por lo cual las teselaciones se presentan como eje de estudio recurriendo a las obras de arte de M.C. Escher como un elemento motivador e inspirador para que los estudiantes aborden los conocimientos geométricos, por otro lado innova con la creación de nuevos diseños de teselaciones en ambientes de geometría dinámica aplicando el Software Cabri Geometre II Plus lo que facilita encontrar nuevos diseños y la aplicación de las propiedades matemáticas en cada una de las figuras creadas virtualmente.

Aunque la investigación de la Universidad del Valle es realizada en el ambiente universitario, sí toca algunos elementos importantes que se proponen abordar en este documento investigativo, como son la motivación de los estudiantes por la clase de geometría, la expresión artística y creativa de los estudiantes, que es uno de los elementos que desde la presente investigación se plantean utilizar para facilitar el desarrollo del razonamiento geométrico; por otro lado la puesta en práctica de los conceptos geométricos sobre los polígonos regulares, los movimientos de rotación y traslación, y el manejo de unidades de medida con el uso adecuado de la regla y el transportador en la Universidad del Valle, permite observar cómo estos instrumentos de trazo requieren un entrenamiento en su utilización para efectuar tareas geométricas asignadas; todos estos elementos son vinculados con las obras de arte de M.C. Escher como eje central, con las cuales los estudiantes puedan analizar las propiedades de los polígonos regulares y la composición de obras teseladas.

Desde la misma Universidad de la Sabana puede citarse la investigación: “La geometría cómo medio de desarrollo perceptivo espacial dentro del campo artístico” de las autoras Lucila Farfán y Sandra Ariza, en esta investigación se desarrollan actividades que conjuntamente requieran de aptitudes relacionadas al campo artístico, que contribuyen al aprendizaje de las demás áreas de conocimiento (Farfán & Ariza, 2002), de esta forma con ayuda de figuras geométricas ubicadas en el plano se pretende que todos los estudiantes adquieran la capacidad de dibujar y expresarse por medio de este lenguaje, permitiéndoles distinguir elementos propios tanto de la geometría cómo del arte. En este documento se busca fundamentar el hecho de que una expresión dinámica de los estudiantes y rica en elementos plásticos, requiere reconocer elementos geométricos ya que estos comparten algunos sistemas de representación que se utilizan para aprender a dibujar y manejar el plano de una mejor forma; las autoras utilizan algunos elementos geométricos cómo el disponer de polígonos para que los estudiantes puedan representar aquello que desea expresar, utilizan elementos del manejo del plano, y movimientos de rotación y traslación de figuras para apoyar el dinamismo de una obra de arte, todo esto lo emplean para que las obras que crean los estudiantes en clase de artes se enriquezcan y sean más elaboradas; esta propuesta ayuda a fundamentar el arte plástico y demuestran cómo la integración curricular de estos dos pensamientos, puede generar nuevas metodologías y aportes didácticos en la escuela.

Estos trabajos mencionados anteriormente junto con muchas otras investigaciones realizadas en el ambiente académico dejan ver la pertinencia de seguir aplicando este tipo de proyectos integradores entre la geometría y el arte, que permiten al docente dar una posible solución a las dificultades presentadas por los estudiantes en el desarrollo del pensamiento geométrico en la escuela, aplicando para ello diferentes estrategias didácticas y metodologías que desde la geometría, el

reconocimiento de figuras, su construcción, el manejo de materiales de trazo y creación de teselaciones ayuden a la adquisición de conocimiento y a la motivación por la clase.

## **2.2 Referentes teóricos**

El segundo capítulo de la Investigación pretende aclarar al lector aquellos elementos tanto didácticos y pedagógicos que implica la enseñanza de la geometría y el arte en la escuela, permitiendo de igual manera presentar una serie de conceptos propios de cada área de conocimiento que es importantes tener en cuenta para abordar luego la intervención de aula propuesta y entender los elementos que allí se encuentran.

### **2.2.1 El Pensamiento Matemático**

Un elemento importante e ineludible en el desarrollo del ser humano es su Pensamiento Matemático, ya que su desarrollo “permite comprender y explicar la realidad del mundo que lo rodea, aparte de concebir y explicar todos los fenómenos que suceden en él” (MEN, 2006) ; la construcción de este pensamiento matemático tiene un alto grado de individualidad pues son las capacidades innatas y las experiencias las que marcan de manera determinante la concepción del mundo, gracias a las diferentes experiencias que se viven en cada ámbito de la vida muchos elementos del pensamiento matemático se adquieren y practican, citando a Ernest (1991) “el conocimiento matemático está conectado con la vida social de los hombres, que se utiliza para tomar determinadas decisiones que afectan a la colectividad y que sirve como argumento de justificación” (p.180). Teniendo en cuenta esta concepción de las matemáticas como un elemento colectivo y social, que se reconstruye en las condiciones del contexto se puede distinguir una matemática ya no tan estricta y exacta como se concebía en épocas anteriores, sino que ésta se va elaborando y tomando significado por su condición cultural, y por ello la escuela debe promover prácticas que apoyen este tipo de proceso.

En la elaboración social del pensamiento matemático la escuela tiene un papel muy importante, ya que es la encargada de presentar los conceptos de manera gradual y brinda los elementos para potenciar el razonamiento matemático, de esta manera la educación matemática concibe que en su interior se realizan diferentes procesos mentales cada uno de ellos encargado de un aspecto específico de la realidad, es así cómo los estándares básicos de competencias en matemáticas realizan un análisis de estos procesos generales de toda actividad matemática que se privilegian en la escuela y menciona los siguientes: “formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos”(MEN, 2006, p. 51), estos procesos permiten concebir la matemática cómo un espectro del conocimiento no rígido e inamovible, sino que al igual que otras ciencias y procesos de pensamiento puede analizar la realidad desde distintos puntos de vista, plantearse hipótesis y acercarse de diferente manera al conocimiento o elemento de interés.

En el espectro matemático del conocimiento existen también diferentes tipos de pensamiento, cada uno enfocado a un elemento específico de la actividad lógica matemática de esta forma encontramos cinco tipos de pensamiento que son el numérico, el geométrico o espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional (MEN, 2006). Los cuales permiten observar el desempeño matemático en diferentes aspectos, actualmente se utilizan estos tipos de pensamiento en las pruebas saber para indagar por el uso de la matemática en situaciones significativas (MEN, 2005), además de eso “para inferir la competencia matemática, se tiene en cuenta el enfoque de resolución de problemas, entendido como mecanismo que permite aprender y evaluar los conceptos, procedimientos, destrezas y estrategias” (MEN, 2005, p. 9).

Esta investigación tiene cómo objeto de estudio el pensamiento geométrico-espacial cómo elemento de intervención desde el aula de clase, este pensamiento es concebido desde los lineamientos

curriculares presentados por el MEN cómo “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (MEN, 2006, p. 61).

### **2.2.2 El Pensamiento geométrico**

El conocimiento geométrico es un componente muy importante de la matemática, no sólo por su función de entender, describir e interactuar con el espacio circundante, sino también “por sus procesos de formalización científica que ayudan a generar procesos mentales de rigor, abstracción y generalidad” (MEN, 2004, p.1), la geometría puede ser entendida en varias dimensiones cómo “una ciencia del espacio y de la forma...un método para representar visualmente conceptos... una vía para desarrollar pensamiento y comprensión... un ejemplo para enseñar razonamiento deductivo... y una herramienta en diversos campos de aplicación” (MEN,2004, p.1) de esta manera se comprende que la geometría está ligada a muchos ámbitos de la vida del hombre e involucra no solo aspectos científicos y tecnológicos sino también elementos sociales y culturales, por lo cual su enseñanza y su desarrollo no se limita únicamente a los aprendizajes escolares, ya que tienen gran relevancia en su aprendizaje las experiencias individuales de los estudiantes.

Frente a estos elementos de experiencias para favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico el Ministerio de Educación Nacional menciona que “difícilmente otro campo de las matemáticas abarca un espectro tan amplio de dimensiones, la enseñanza de la geometría debe reflejar una preocupación por desarrollar actividades en las distintas dimensiones logrando en los alumnos una amplia experiencia” (MEN, 2004, p.61) de este modo se reconoce cómo el aprendizaje de la geometría debe estar mediado por elementos experienciales que faciliten el desarrollo del razonamiento geométrico, apoyado en las experiencias y conocimientos previos de los estudiantes; e incorporar en

el proceso de aprendizaje diferentes elementos propios de la geometría cómo otros diferentes materiales que apoyen y afiancen los conocimientos desde diferentes dimensiones.

### **2.2.3 Dificultades en el aprendizaje de la geometría**

El desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes implica tener una serie de elementos que permitan reconocer los avances que se presentan y el tipo de actividades que necesitan los estudiantes para seguir avanzando en el aprendizaje de la geometría, la falta de algunos preconceptos o experiencias pueden llegar a generar una serie de dificultades en el desarrollo del pensamiento geométrico, estas pueden surgir no solo por la inexperiencia del estudiante en el ámbito geométrico, sino que también pueden surgir por concepciones erróneas y fallos metodológicos del mismo docente.

Al reconocer que pueden existir dificultades o posibles errores en los aprendizajes de la geometría Gutiérrez & Jaime (2012) proponen que una forma de interpretar y reconocer el origen de estas dificultades puede ser por medio del modelo de Vinner (1991) “modelo que intenta explicar cómo se produce el aprendizaje de conceptos matemáticos con fuerte contenido gráfico o visual” (Gutiérrez & Jaime, 2012, p. 56) teniendo en cuenta este modelo una de las posibles causas que dificultan el aprendizaje de la geometría se encuentra el papel que desempeña el docente, ya que de su propuesta pedagógica y didáctica en el aula depende en gran medida que el estudiante relacione las figuras con los conceptos, al respecto mencionan que los docentes suelen recurrir a dos tipos de métodos:

“i) enunciar una definición matemática del concepto y, a continuación plantear ejercicios de memorización y de reconocimiento de algunas figuras concretas, ii) presentar ejemplo de figuras que representan ese concepto haciendo una descripción de sus características matemáticas, a continuación,

enunciar una definición matemática del concepto y, por último, plantear ejercicios de memorización de la definición y de reconocimiento” (Gutiérrez & Jaime, 2012, p.64)

Frente a los dos tipos de métodos empleados por los docentes Gutiérrez & Jaime (2012) citando a Vinner (1991) mencionan que “los profesores colocan mayor atención a las definiciones que a los ejemplos y que precisamente son estos últimos los que impactan más a los estudiantes, generando un efecto mental más duradero”(Gutiérrez & Jaime, 2012, p.64); Sobre este mismo aspecto Vinner & Hershkowitz (1983) resaltan que las definiciones y conceptos utilizados por los estudiantes para responder las preguntas y ejercicios del docente, los estudiantes no los aplican cuando se les pide resolver un problema geométrico, de esta manera explican Gutiérrez & Jaime (2012) citando a Vinner (1991) que “el método empleado para enseñar no permite que el estudiante relacione directamente la imagen con el concepto, de allí la dificultad de emplear los conceptos de manera práctica al tratar de resolver problemas geométricos” (Gutiérrez & Jaime, 2012, p.67). Sobre estos inconvenientes Vinner (1991) afirma que en la conformación de la imagen de un concepto que tiene una persona, “desempeñan un papel básico la propia experiencia y los ejemplos que se han visto” (Vinner, 1991); de esta manera propone que los docentes deben brindar a los estudiantes la posibilidad de comparar ejemplos y contraejemplos, para que de esta manera puedan verificar las propiedades de los objetos y reconocer la veracidad de las hipótesis que se plantean; los docentes también deben permitir que los estudiantes comparen diferentes ejemplos, de esta forma el estudiante logra reconocer las diferencias entre figuras y compararlas; por último resalta la importancia de utilizar en su mayoría ejemplos gráficos y manipular objetos concretos que ayuden al estudiante a formar una buena imagen mental.

Además de estas posibles dificultades generadas por la elección de un método de enseñanza inapropiado por parte del docente, se pueden encontrar otras dificultades presentadas por los estudiantes frente a las tareas geométricas, cómo son los mencionados por Franchi & Hernández (2003) a las cuales

denominan errores geométricos y los clasifican de la siguiente manera: “errores de pre-requisitos, errores propios de lenguaje, errores de razonamiento, errores de técnica y de tecnología” (Franchi & Hernández, 2003, p.197), puesto que la investigación y posterior artículo realizado por las autoras se enfoca a nivel universitario, se encuentran algunos errores que los estudiantes de grado quinto, con los cuales se realizará la intervención de la presente propuesta de investigación, aún no están en la capacidad de cometer por tal motivo no se mencionan, pero alguno de ellos si pueden explicar algunas de las observaciones realizadas por el docente investigador en el aula de clase; entre estas dificultades tenemos los errores de pre-requisitos son entendidos como aquellas “habilidades y destrezas que el alumno debió adquirir antes de iniciar el estudio de la geometría. Se considera que están asociados específicamente a deficiencias en el aprendizaje de conceptos previos” (Franchi & Hernández, 2003, p.197) de esta manera se evidencia que el abordar conceptos geométricos se requiere de unos conocimientos previos que faciliten la adquisición de los contenidos. Otra de las dificultades son los errores propios del lenguaje geométrico éste va muy relacionado al anterior, de hecho se menciona que estos son coincidentes ya que “el no poseer ciertos conceptos dificulta que los estudiantes puedan expresarse adecuadamente utilizando el lenguaje propio de la geometría” (Franchi & Hernández, 2003, p.198).

Se menciona también que los errores gráficos son aquellos que se cometen en “El trazado incorrecto de figuras geométricas a partir de un enunciado dado, se corresponde con la mala interpretación de este enunciado, y por ello está estrechamente vinculado con los errores propios del lenguaje geométrico” (Franchi & Hernández, 2003, p.198) de igual manera se menciona que estos errores pueden deberse a la dificultad de imaginar, trazar e interpretar figuras geométricas. Otra dificultad de los estudiantes se presenta en los errores de razonamiento, sobre éstos las autoras mencionan que se ven reflejados en “la dificultad de emplear de manera correcta axiomas, teoremas y



definiciones geométricas” (Franchi & Hernández, 2003, p. 199); los errores de técnica, son aquellos que ocurren cuando el estudiante pretende realizar un procedimiento para solucionar un problema geométrico pero lo ejecuta de forma equivocada por ejemplo al intentar construir un polígono regular (Franchi & Hernández, 2003); y por último mencionan los problemas de tecnología “se consideran aquellos que se producen cuando el alumno selecciona un algoritmo inadecuado para resolver un problema geométrico o usa una estrategia inadecuada para realizar una demostración geométrica” (Franchi & Hernández, 2003, p. 201) en este tipo de errores cabe mencionar las dificultades en el manejo de los Instrumentos de trazo y medida que impiden demostrar medidas de lados y ángulos, sobre este tipo de dificultades con los elementos de trazo se puede mencionar cómo Gutiérrez & Jaime (1990) también los tienen en cuenta en sus planteamientos cuando nombran que estas dificultades pueden deberse a “errores ocasionados por una falta de coordinación y de práctica en los niños. De todas formas, cuando los niños tienen edad suficiente, deben utilizar también los elementos habituales de dibujo (regla, escuadra, compas, etc.)” (Gutierrez & Jaime, 1990, p. 344)

#### **2.2.4 Objetos Geométricos**

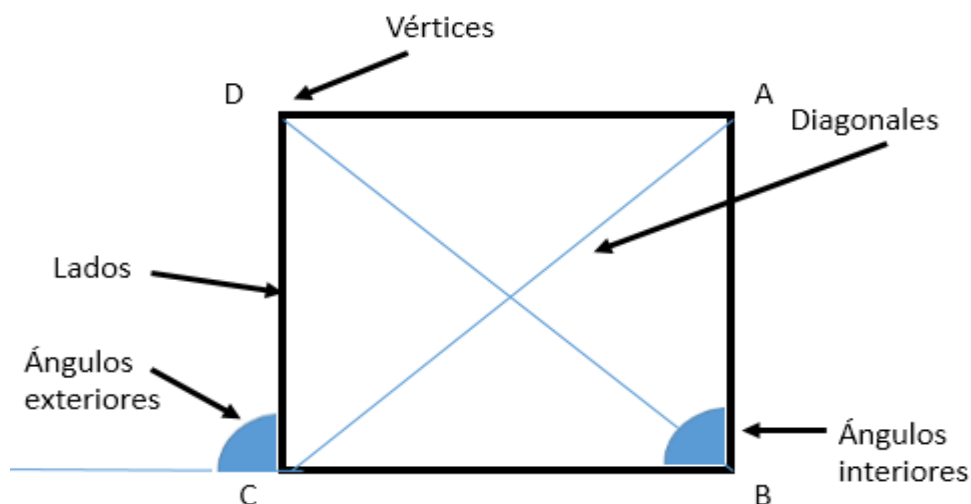
La presente Investigación aborda desde el aula de clase y por medio de las actividades planteadas algunos conceptos geométricos propios del grado quinto, de los cuales es importante tener una definición que aclare al lector los términos geométricos que se van a emplear, a continuación se presentan los términos que se abordan en la investigación y que son tomados en su mayoría de la enciclopedia Geométrica Help your kids with Math de la editorial Dorling Kindersley (2010).

El primer concepto Geométrico a reconocer y definir es Polígono, sobre éste se menciona:

“un polígono es una figura plana cerrada, formada por líneas rectas cuyos extremos se unen en un punto llamado vértice. Los ángulos interiores de un polígono generalmente son más pequeños que los

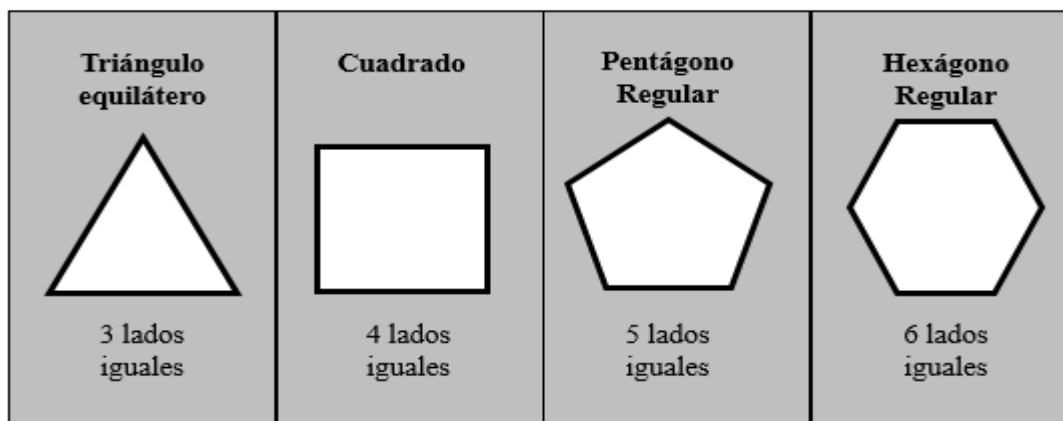
exteriores, aunque lo contrario es posible. Independientemente de su forma los polígonos se componen de las mismas partes lados, vértices y ángulos” (Dorling Kindersley, 2010 p. 126)

En la siguiente imagen se observan cada uno de los elementos que conforman un polígono regular



*Imagen 1 : Elementos de un polígono*

Luego de abordar el concepto de polígono debemos diferenciar específicamente los polígonos regulares que son los objetos que se abordan en la intervención de aula y con los cuales los estudiantes tendrán un acercamiento, sobre cómo reconocer un polígono se nombra una característica fundamental “en un polígono regular, todos los ángulos y lados son iguales; es decir, este tipo de polígono es tanto equilátero como equiangular” (Dorling Kindersley, 2010 p. 126). A continuación se muestran los polígonos regulares que se trabajan en la intervención, donde se menciona como característica principal su número de lados.



*Imagen 2 Polígono regular*

Sobre los elementos que conforman un polígono cómo son ángulos, lados y vértices podemos encontrar las siguientes definiciones: ángulos “los ángulos indican la abertura entre dos líneas que giran mientras se alejan de un punto en común en otras direcciones. Esta abertura se mide en grados, que usa el símbolo °” (Dorling Kindersley, 2010 p. 76), los lados “son segmentos de línea que tienen longitud fija, y que delimitan el área de un polígono” (Dorling Kindersley, 2010 p. 78), los vértices son el “punto en el que se encuentran los lados de un ángulo o las aristas de un objeto”. (Dorling Kindersley, 2010 p. 256)

Otro concepto importante a tener en cuenta son los movimientos en el plano, específicamente la rotación y la traslación, sobre éstos conceptos encontramos que

“una rotación es un tipo de transformación isométrica que toma un objeto y lo mueve en relación a un punto dado. El punto al rededor del cual se produce una rotación se llama centro de rotación, y la distancia que rota una forma se llama ángulo de rotación. El centro de rotación puede ubicarse dentro o fuera de un objeto o en su entorno”. (Dorling Kindersley, 2010, p. 92).

A continuación las imágenes 3 y 4 muestran ejemplos de rotación, la primera de ellas muestra la rotación del objeto, la segunda ejemplifica el centro de rotación.

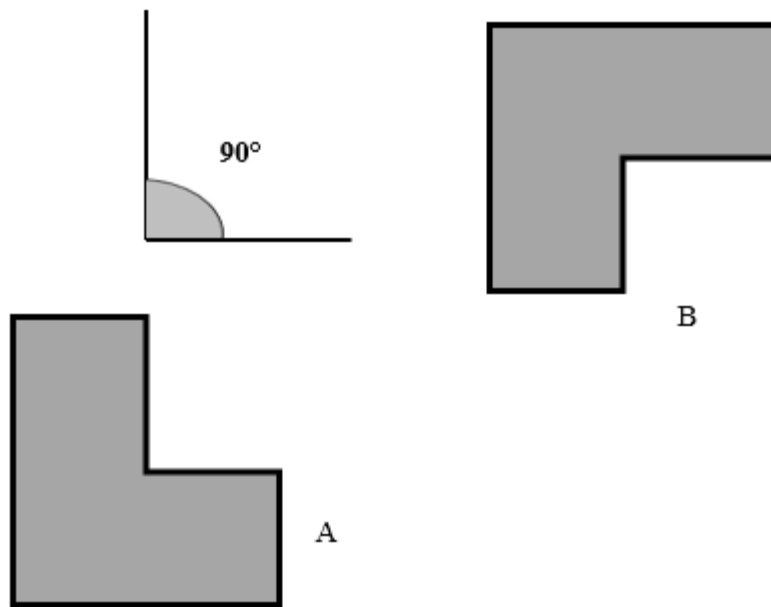


Imagen 3 Ejemplo de rotación

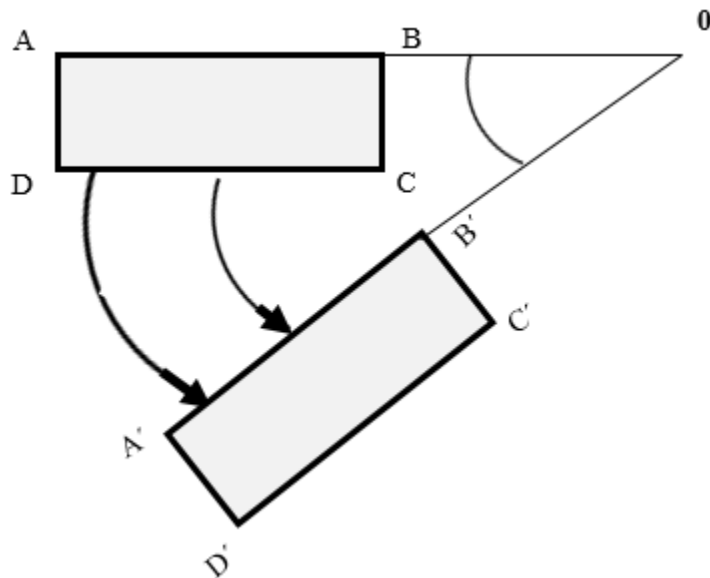
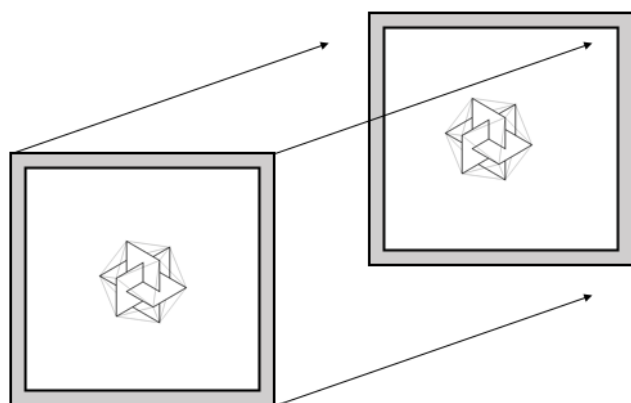


Imagen 4 ejemplo de rotación

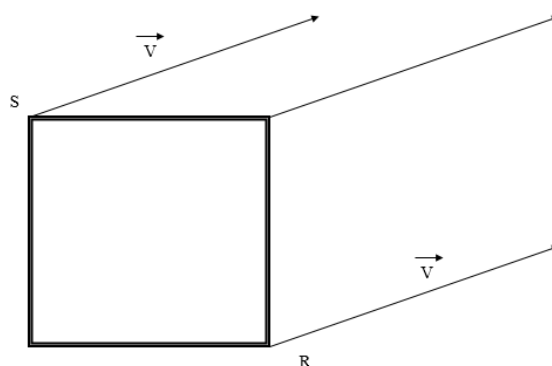
Sobre el concepto geométrico de traslación se menciona “es un tipo de transformación isométrica, que mueve un objeto a una posición nueva. El objeto trasladado se denomina imagen y

tiene exactamente el mismo tamaño y forma que el objeto original. Las traslaciones se expresan como vectores”. (Dorling Kindersley, 2010, p. 90)

En la imagen 5 se observa el cambio de posición del objeto inicial y se señala la traslación realizada, en la imagen 6 se observa la traslación de los vértices de la figura.



*Imagen 5 ejemplo de traslación*



*Imagen 6 ejemplo de traslación*

El siguiente concepto geométrico a definir es teselación, aquí se toma como guía los aportes de Mejía (2006) citando a Tena (2004):

Una teselación se denomina regular si se utiliza un único tipo de polígono (un solo tipo de baldosa) y en cada vértice el número de baldosas que lo rodean es el mismo. Tales polígonos pueden ser regulares (en cuyo caso se hablaría de teselación regular mediante polígonos regulares) o no (por ejemplo los rombos de cualquier retículo plano). (Mejía, 2006, p.176)

Sobre este mismo término podemos encontrar el siguiente aporte, “una teselación es un patrón creado mediante formas para cubrir una superficie, sin dejar espacios en blanco. Dos formas, el cuadrado y el hexágono regular, se pueden teselar con ellas mismas usando sólo la traslación” (Dorling Kindersley, 2010 p. 91).

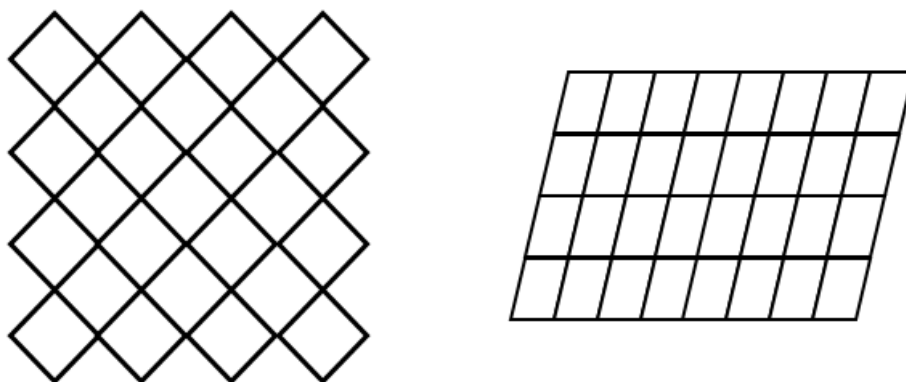


Imagen 7 ejemplo de teselados-

La imagen 7 presenta dos ejemplos de teselaciones que se pueden construir con una solo polígono que se repite para cubrir el plano.

En la Investigación se emplea una de las formas de construir teselaciones que es creando las baldosas y eligiendo un movimiento en el plano a esto se le llama “*sistema generador*” (Gutiérrez, 1990), para la elaboración de las baldosas se pueden emplear varios métodos que fueron presentados por Gutiérrez en su artículo *los cubrimientos de M.C. Escher cómo material didáctico en la geometría* entre estos métodos se encuentran las deformaciones por traslación y las deformaciones por giro; sobre esta forma de construir las baldosas, menciona Gutiérrez (1990 p.7) “desde el punto de vista didáctico, no es provechoso ofrecerles directamente la respuesta, sino que es preferible plantearles preguntas que les marquen el camino de la solución y consigan que los propios alumnos la descubran”.

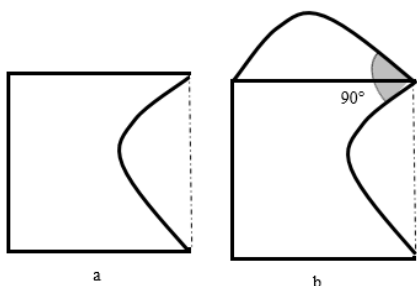


Imagen 8 Deformaciones por giro de  $90^\circ$

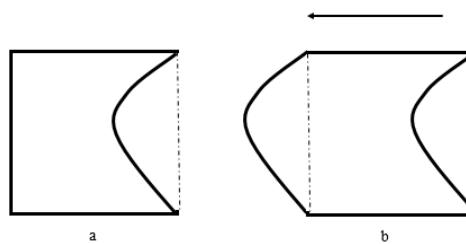


Imagen 9 Deformación por traslación

La imagen 8 presenta un ejemplo de deformación por giro para la creación de baldosas, la imagen 9 por su lado presenta el ejemplo de deformación por traslación.

Sobre las deformaciones con simetrías en deslizamiento Gutiérrez (1990) indica “se realizan dos movimientos consecutivos, traslación seguida de simetría o simetría seguida de traslación, antes de llegar a la posición final” (p.8)

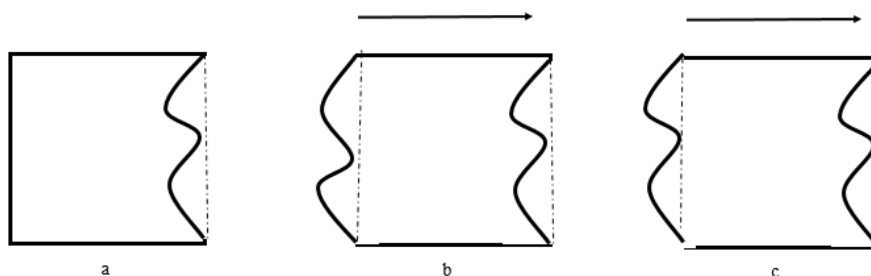


Imagen 10 Deformación por simetría en deslizamiento

La imagen 10 muestra las posibles construcciones (b y c) que pueden surgir de la deformación por simetría en deslizamiento.

A continuación luego de definir los conceptos geométricos a abordar en la investigación y su intervención de aula, se presentan elementos propios de la integración entre la enseñanza de la geometría y el arte en la escuela, de igual manera se resalta su importancia e incidencia en los estudiantes.

### 2.2.5 Modelo De Van Hiele

Para tener elementos conceptuales propios sobre cómo se genera el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes se tendrá como guía el modelo de Van Hiele, este modelo desarrolla una propuesta pedagógica y didáctica que permite plantear una ruta de intervención en el aula de clase que busca solventar las dificultades presentadas por los estudiantes en su razonamiento geométrico, sobre este modelo Fouz y de Donosti (2005) aportan

“El aprendizaje de la geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no van asociados a la edad y que solo alcanzando un nivel se puede pasar al siguiente. Es más, se señala que cualquier persona y ante un nuevo contenido geométrico a aprender, pasa por estos niveles, y su mayor o menor dominio de la geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente” (Fouz & De Donosti, 2005, p. 67)

De esta forma se puede interpretar cómo desde las concepciones de Van Hiele el conocimiento geométrico no se da de la misma manera en los estudiantes y que además su desarrollo no está dictado por la edad, sino por la habilidad de cada uno en el campo geométrico, por este motivo los resultados obtenidos en el grupo a investigar pueden ser muy variados independientemente de que todos estén participando en las mismas actividades y explicaciones; además se señala por los autores antes mencionados

“que en la base del aprendizaje de la geometría hay dos elementos importantes, el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos, el primero implica que los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado, y el segundo, que sólo van a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento” (Fouz & De Donosti, 2005, p. 68)



De esta manera se reconoce que pueden existir diferentes niveles de razonamiento que facilitarán o no acceder a nuevas habilidades geométricas, ya que el poder comprender el lenguaje empleado por el docente en el aula, las tareas asignadas y los conceptos propios de la geometría presentados en la clase está limitado por el nivel de razonamiento en que se encuentre el estudiante; Teniendo en cuenta lo anterior, el modelo de Van Hiele contempla varios niveles que pueden clasificar el desarrollo del pensamiento geométrico de un estudiante, de esta forma se pueden encontrar 4 niveles: Visualización o reconocimiento, Análisis, Deducción Informal u orden, Deducción Formal; cada uno de estos Niveles presentados por el modelo de Van Hiele, presenta una serie de características propias que pueden llegar a determinar en qué nivel se encuentra un estudiante y que tareas geométricas y conceptos está en capacidad de realizar y comprender

**Nivel 1:** Visualización o Reconocimiento: Este primer Nivel “es el más elemental del razonamiento geométrico se caracteriza por que los estudiantes perciben la figura geométrica de manera global” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 306), esto quiere decir que el estudiante está en la capacidad de mencionar que la figura que observa es un cuadrado, un triángulo o un círculo por la relación que existe entre la figura y el nombre, pero no es capaz de identificar los elementos que conforman cada una de ellos cómo son sus lados, ángulos, vértices; además de esto “las diferenciaciones o clasificaciones de figuras se basan en semejanzas o diferencias físicas globales” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 306), esta característica permite observar que las diferencias que mencionan los niños entre un cuadrado y un rombo están dadas por la forma, el tamaño o el color. En este nivel también explica el modelo de Van Hiele que “en muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 307) es decir que los estudiantes para describir un rombo mencionen por ejemplo que parece una cometa.

**Nivel 2:** Análisis: en éste nivel el modelo de Van Hiele menciona varias características propias cómo son “los estudiantes se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 308), de esta manera se puede apreciar cómo los estudiantes reconocen que un cuadrado tiene lados, vértices, ángulos y usa estos elementos para describir la figura, utilizando también estos elementos para diferenciar entre una o varias figuras geométricas; en este nivel ya se pueden mencionar la importancia del uso de los materiales de trazo y dibujo para encontrar semejanzas o diferencias entre estas propiedades de las figuras, experimentando sus hipótesis, sobre este aspecto mencionan Gutiérrez y Jaime (1990) que los estudiantes descubren y generalizan siempre a partir de la observación y la manipulación, de esta manera se reconoce que la mejor forma de ayudar en el desarrollo del razonamiento geométrico es por medio de actividades de manipulación de instrumentos y figuras.

**Nivel 3** Deducción informal u orden: En este nivel comienza el proceso de razonamiento formal de los estudiantes (Gutiérrez & Jaime, 1990), aquí los estudiantes comprenden que unas propiedades de las figuras dependen de otras, ya pueden clasificar lógicamente las familias de figuras teniendo en cuenta sus propiedades (Gutiérrez & Jaime, 1990), en este nivel los estudiantes pueden clasificar las figuras geométricas comparando las propiedades de sus lados, ángulos, etc. Ya no solo describen los elementos constituyentes de cada figura sino que puede encontrar figuras similares y agruparlas; los estudiantes realizan pequeñas deducciones, pero “aún no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas” (Gutiérrez & Jaime, 1990), se menciona que este Nivel es solo de paso para llegar a un Nivel superior de Razonamiento Geométrico.

**Nivel 4** Deducción Formal: Este nivel requiere procesos de razonamiento geométrico y lógica mucho más avanzados, algunas características que se observan son que “los estudiantes pueden entender y realizar razonamiento lógicos formales... reconocen la importancia de las demostraciones y

comprenden la estructura axiomática de las matemáticas” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 309) de igual manera los estudiantes realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, al reconocer su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.

Teniendo como referencia el modelo de Van Hiele, se reconoce que existe en cada uno de los niveles presentados anteriormente una serie de fases o secuencias con las cuales se puede dar la enseñanza de la geometría, ya que “estas fases permiten la organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento”(Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 333) estas fases pueden dar pistas sobre cómo organizar las actividades propuestas para cada grado, y además se resalta que “enfatan en la idea que el paso de un nivel a otro depende más de la enseñanza recibida que la edad o madurez,”. (Fouz & De Donosti, 2005, p. 72) esto quiere decir que es de gran importancia llevar al aula de clase por parte del docente actividades y materiales que ayuden a los estudiantes a recorrer cada una de las 5 fases de aprendizaje facilitando de esta manera el desarrollo de su razonamiento geométrico.

### **2.2.6 Las cinco fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele**

**Fase 1:** Preguntas / información: Se trata de una fase de contacto donde el docente informa sobre lo que se va a trabajar en la clase, los recursos empleados y los problemas a resolver, “los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán conocimiento básicos” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 333) de igual manera, el docente por medio de preguntas puede indagar los conocimientos previos de los estudiantes y reconocer el nivel de razonamiento en el que se encuentran.

**Fase 2:** Orientación Dirigida: en esta fase los estudiantes conocen el material a trabajar, lo manipulan y experimentan, “el objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras etc. Que están

estudiando” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 334), ya que en esta fase construirán todos los elementos necesarios para acercarse a un nuevo nivel de razonamiento. Las actividades deben buscar presentar el conocimiento de manera gradual para que los estudiantes lo puedan comprender.

**Fase 3:** Explicación: una de sus finalidades es que los estudiantes intercambien sus experiencias, que expliquen cómo han resuelto las actividades por medio del diálogo entre ellos, en esta fase “es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento por justificar su opinión hará que tenga que analizar sus ideas, ordenarlas y expresarlas con claridad” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 334), esta no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, es el momento de llegar a conclusiones y perfeccionar el lenguaje con que los estudiantes se expresan.

**Fase 4:** Orientación Libre: en esta fase aparecen actividades más complejas referidas a aplicar los conocimientos adquiridos, “el campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero éstos todavía deben perfeccionar su conocimiento” (Gutiérrez & Jaime, 1990,p.334 ), el papel del profesor entonces debe ser el plantear problemas geométricos que tengan diversas formas de solución aplicando los conocimientos adquiridos, al respecto se menciona “estas actividades abiertas con múltiples caminos de solución permitirán completar la red de relaciones que se empezó a formar en fases anteriores”(Gutiérrez & Jaime, 1990,p.335 )

**Fase 5:** Integración: En esta última fase, no se trabajan contenidos nuevos sino que se sintetizan los conceptos ya trabajados, se menciona sobre esta fase “se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento” (Gutiérrez & Jaime, 1990,p.335) de esta manera el profesor busca realizar comprensiones globales de lo aprendido, permitiendo organizar en el pensamiento todos los elementos trabajados por lo que es importante no abordar conocimientos nuevos, sino trabajar con

los ya adquiridos. Se espera que al completar esta fase los estudiantes sustituyan sus anteriores percepciones mentales y haya adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

Éstas cinco fases planteadas por el modelo de Van Hiele fueron tenidas en cuenta para la planeación de las actividades propuestas para los estudiantes de grado quinto en la presente investigación, en las cuales se observa y desarrolla la progresión de estos niveles lo cual permite aclarar el camino de intervención a realizar, es importante resaltar que las actividades planteadas para la clase son enriquecidas con elementos del arte integrando en ellas materiales plásticos y fortaleciendo componentes de la experiencia artística cómo la contemplación de las obras realizadas.

### **2.2.7 La geometría y el arte**

Un aspecto a tener en cuenta es la integración curricular que surge al abordar la enseñanza de la geometría, pues cómo se ha mencionado anteriormente los conceptos geométricos surgen no solo del aula de clase sino de todas las experiencias sociales y culturales que vive el individuo, de esta manera se pueden encontrar cómo diferentes áreas del conocimiento ayudan a fortalecer y afianzar conocimientos geométricos y de igual manea utilizan elementos del razonamiento geométrico para su desarrollo, teniendo en cuenta esta relación reciproca los lineamientos curriculares aluden a la riqueza existente entre el pensamiento geométrico espacial y algunos de los lenguajes propios del arte, para dar referencia de cómo desde la concepción matemática también se puede generar este puente, que fortalezca el entendimiento del mundo y la relación del niño con su entorno

“Lo anterior implica relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y

maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial (MEN, 2006, p. 61)

Al apuntar por una educación integral que integre varias áreas del conocimiento se busca una educación que abarque las diferentes experiencias que puede brindar la escuela, procurando una educación holística del niño, por esta razón y debido a su importancia se observa la necesidad de integrar algunas asignaturas en este caso el arte y la geometría para que ayuden de esta forma a potenciar el conocimiento de ambas; de esta forma se debe tener en cuenta que :

“Se entiende por educación integral aquella que posibilita el desarrollo de todas las dimensiones del ser humano: la Lógica (o de la razón), la Ética (o del comportamiento) y la Estética (o del sentimiento) contempladas con una visión de totalidad, de manera que no actúan aisladas sino, por el contrario, interactúan para enriquecerse” (UNIMINUTO, 2003, p. 74)

Sobre este mismo aspecto integrador podemos encontrar las afirmaciones de Víktor Lowenfeld (1980) sobre cómo el arte es una actividad dinámica y unificadora de los saberes de la escuela, sobre este tema aporta:

“La educación artística no es el único, pero quizá represente el vehículo más eficaz para canalizar el proceso creador de los estudiantes, y bien puede ser quien responda por la diferencia entre un individuo creativo, capaz de utilizar con flexibilidad sus conocimientos, de aquel que sólo acumula información mecánicamente” (Lowenfeld, 1980, p. 70).

De igual forma Herbert Read nos amplía la concepción del arte cómo elemento primordial en la educación cuando cita:

“El lugar que aspiro para el arte en el sistema educacional es de vastos alcances; el arte ampliamente concebido, debería ser la base fundamental de la educación, pues ninguna otra materia

puede dar al niño no sólo una conciencia en la cual se hallan unificados y correlacionados imagen y concepto, sensación y pensamiento, sino también al mismo tiempo, un conocimiento instintivo de las leyes del universo y un hábito o comportamiento en armonía con la naturaleza” (Read, 1955, p. 37)

Esta afirmación brinda un sustento fuerte para apostarle a la integración curricular en el aula cómo elemento fundamental para obtener aprendizajes significativos, empleando el arte cómo medio integrador de conocimientos que no solo facilite el aprendizaje de las diferentes asignaturas sino que también enriquezca la sensibilidad, creatividad y experiencia del arte en el niño, apuntando a un desarrollo integral.

Incluir un apartado sobre las teselaciones y su proceso de construcción según la propuesta de Gutiérrez.

### **2.2.8 La educación artística**

La Educación Artística es un elemento muy importante en la educación ya que aporta elementos transformadores en la vida del estudiante, permitiéndole no solo ser más sensible frente a su realidad sino que le permite su expresión, le permite poner en evidencia su pensamiento y sentimiento utilizando para ello diferentes lenguajes, citando al profesor Santiago Cárdenas en los Lineamientos Curriculares en Educación Artística comenta “El propósito de la enseñanza de las artes en la escuela es contribuir con el proceso educativo y cultural de los pueblos; de manera que las artes sirvan cómo medio fundamental de comunicación y de sensibilización” (MEN, 2000, p. 60) desde este punto de vista se puede analizar el arte no solo cómo un elemento de expresión y sensibilización sino también de socialización con los otros, que permite el auto reconocimiento y el reconocimiento de la diferencia del otro, la comunicación y la integración de diferentes tipos de lenguajes.

No se puede olvidar tampoco la experiencia sensible que genera la educación artística en los estudiantes desde los diferentes lenguajes del arte cómo lo son el arte plástico, la danza, la música, el teatro que ayudan a potenciar sus sentidos y su visión del mundo, citando a Cárdenas (2000)

“La visión artística es fundamental en la sensibilización de los sentidos, de la visión, del tacto, del oído, para el control de la sensorialidad del cuerpo y de la mente. La memoria y la imaginación del estudiante son estimuladas para archivar lo visto, lo oído, lo palpado por medio de imágenes reales o poéticas que ayudan a descifrar y a interpretar el mundo real” (MEN, 2000, p. 61)

Para reconocer el valor del arte en la escuela y en la formación de los estudiantes, es importante entender cuáles han sido los aportes que se han realizado frente a esta área de conocimiento desde la academia y que ayudan a comprender los aportes que el arte brinda no solo cognitivamente sino también psicológica y emocionalmente a los estudiantes.

### **2.2.9 Comprensiones metodológicas de la educación artística**

Desde la Psicología Cognitiva se ha reparado en el valor cognitivo de la actividad artística cómo opción para pensar, revelando el papel de la Educación Artística en la escuela, con respecto a su potencial formativo en el desarrollo humano; prueba de ello son sus recientes hallazgos sobre un amplio espectro de competencias simbólicas, diferentes de las legitimadas por el tradicional pensamiento lógico matemático, científico y lingüístico, que son posibles de desarrollar mediante la expresión de los diferentes lenguajes artísticos.

Dentro de esta tendencia se destaca Howard Gardner, quien revisa las posturas desarrollistas de Piaget y se propone ampliar su comprensión, por lo que considera que los estudios sobre el desarrollo deben abarcar la totalidad del ser humano y no sólo uno de sus aspectos (Gardner, 1996) a diferencia de Piaget, Gardner sostiene que el desarrollo humano puede variar de acuerdo con las



diversas áreas del conocimiento, cómo también con relación a las diferencias culturales, por ello afirma “La naturaleza y el sistema educativo pueden marcar las trayectorias del desarrollo humano en la cultura” (Gardner, 1996,p.25). A partir del Proyecto Zero, Howard Gardner al lado de Nelson Goodman tratan de definir el curso del desarrollo identificando las formas de simbolización promovidas por las artes, de donde surgen las habilidades artísticas.

Para Goodman (1976), las emociones funcionan en el ser humano de modo cognitivo otorgándole una mejor forma de interpretar el mundo, las artes son un medio de expresión desde donde se puede leer, escribir y aprender, y en donde la mente es la encargada de transformar los símbolos de una manera comprensible; en su obra *Educación Artística y Desarrollo Humano* repara en lo mucho que le compete a la escuela el desarrollo creativo y artístico del niño; cuestiona cómo tradicionalmente el sistema escolar ha limitado la enseñanza del arte a desarrollar la habilidad del dibujo cómo único medio. Sobre el mismo asunto afirma Gardner (1994) que la educación artística produce efectos positivos sobre la comprensión y desempeño en otras áreas del conocimiento; destaca también de manera alentadora, que en las últimas décadas se ha tratado que el arte no sea solo producción y recopilación de técnicas, situando su verdadera importancia en el cambio de mentalidad por medio del conocimiento de la estética e interpretación y deleite de la obra de arte. (Gardner, 1994).

La Educación artística desde sus distintos lenguajes conlleva una serie de procesos propios y únicos que favorecen el desarrollo de cada estudiante, son cuatro aspectos que desde los lineamientos curriculares de la Educación Artística se contemplan (MEN, 2000) en los cuales se encuentran el proceso de desarrollo del pensamiento contemplativo, el proceso de transformación simbólica en la interacción con el mundo, el proceso de desarrollo del pensamiento reflexivo y el proceso de desarrollo de Juicio Crítico.

El primero de ellos el contemplativo hace referencia a la percepción de la obra por medio de los sentidos (el gusto, el olfato, el tacto, la vista y el oído), de cómo el niño puede conocer el mundo que lo rodea, los colores, las formas, los olores, los sonidos; nos menciona de igual forma cómo este proceso es individual, solitario y silencioso, que surge de la curiosidad y el interés por conocer, permite el autoconocimiento, la autoconfianza; teniendo en cuenta estos elementos se proponen desde los lineamientos curriculares de la Educación Artística algunos logros esperados referentes al proceso contemplativo cómo son: “el desarrollo perceptivo de las propias evocaciones y fantasías, de la naturaleza, de los demás y de las cosas; apertura al diálogo; cambios y generación de actitudes” (MEN, 2000, p.190)

El segundo de ellos el proceso de transformación simbólica busca generar habilidades que permitan al estudiante expresarse en los diferentes lenguajes plástico, musical, corporal, etc. reconociendo elementos propios de cada uno de ellos, lo que le permite crear sus propias ideas sobre las obras, en el lenguaje plástico podrá entonces reconocer las tensiones internas de la obra, su estructura, su corporeidad y colorido de la misma, algunos logros esperados son: “Desarrollo expresivo de sensaciones, sentimientos e ideas a través de metáforas y símbolos; desarrollo de habilidades comunicativas que impliquen dominio técnico y tecnológico”. (MEN, 2000, p.190)

El desarrollo del proceso reflexivo tiene cómo objetivo que el estudiante genere una reflexión conceptual de los diferentes lenguajes del arte, que desde su experiencia pueda participar activamente en la obra analizando sus elementos y procesos internos, en este momento se pueden generar conceptos para la reflexión de los sistemas de representación, tiene cómo logros esperados: “La construcción y reconocimiento de elementos propios de la experiencia estética y de lenguajes artísticos”. (MEN, 2000, p. 190)

Por último, se busca desde la educación artística el desarrollo del Juicio Crítico, que busca generar en los estudiantes una postura frente a las expresiones artísticas; que después de su experiencia al contemplar, transformar y reflexionar sobre elementos plásticos, desde su interior construya una postura y una conceptualización de lo bello; que pueda con argumentos valorar una obra, dando su juicio apreciativo desde la comprensión estética y reconociendo el contexto donde se realizó, de esta manera se busca alcanzar los siguientes logros: “Formación del juicio apreciativo de las propias cualidades y reconocimiento del cuerpo desde la comprensión estética, multiétnica y pluricultural, de la interacción que se tiene con el mundo y de la producción cultural; y la comprensión de los sentidos estéticos y de pertenencia cultural”. (MEN, 2000, p. 190)

Fundamentando el marco teórico de la presente investigación y su pertinencia en la educación básica, se encuentran algunas orientaciones pedagógicas para la educación artística en educación básica mencionados por el Ministerio de educación (MEN, 2010), de esta forma se apuntan a los siguientes objetivos:

“Describo, comento y explico mis experiencias emocionales, sensoriales y motrices, y manifiesto mis preferencias por los estímulos provocados por determinadas obras o ejercicios...Realizo ejercicios de decodificación de obras (interpretación formal), utilizando el vocabulario específico de las artes... Propongo variaciones sobre un patrón genérico visual, facilitado por el docente...Realizo ejercicios de creación individuales o colectivos, de acuerdo a los procesos productivos de las prácticas artísticas, utilizando diversos instrumentos, materiales o técnicas”. (MEN, 2010, p. 92)

Al hablar de educación Artística se deben abordar todos sus lenguajes expresivos de distinta manera, ya que cada uno de ellos representa una visión e interacción con el mundo, construyendo en si misma unos símbolos de representación propios para cada lenguaje, estas representaciones son las

que permitirán que los estudiantes se acerquen al conocimiento y expresen de manera más libre sus emociones, sentimientos e ideas sobre el mundo.

La integración curricular propuesta en ésta investigación busca entonces no solamente ahondar en el problema de la enseñanza del pensamiento geométrico, sino además afianzar elementos plásticos como la percepción, la creación y la expresión; la expresión entonces no requiere solo de materiales y disposición, requiere elementos conceptuales y experienciales, como lo menciona Spravkin

“La expresión se configura como un proceso en el que intervienen: la necesidad, el deseo o la interacción de expresar; la organización operativa para expresar el empleo instrumental de los elementos (sensibles, materiales, conceptuales) que se consideran sustanciales para concretar lo que ha de expresarse”. (Spravkin, 1997, p.67)

De esta manera se busca entonces no solo que el empleo del arte como medio de aprendizaje facilite la adquisición del pensamiento geométrico para este grado de escolaridad, sino también brindar herramientas propias del arte para profundizar en sus medios y facilitar la expresión y sensibilidad de los estudiantes hacia el lenguaje plástico.

### **2.2.10 La contemplación en el lenguaje plástico**

Cómo ya se vio anteriormente la dimensión contemplativa del arte hace referencia a la percepción de la obra por medio de los sentidos, de cómo el niño puede conocer el mundo que lo rodea, esta contemplación se da de manera transversal en todos los lenguajes del arte, pero al enfocarse en el lenguaje plástico propiamente dicho encuentra unos matices diferentes, es aquí donde ese proceso individual adquiere un auténtico sentido personal, donde se mezclan la curiosidad, el interés y los saberes previos para entender la obra y sus composición (MEN, 2010); en el lenguaje plástico cobra

relevancia las experiencias visuales y táctiles cómo elementos perceptivos que permiten comprender e interpretar una obra de arte. En este sentido la contemplación de la obra plástica tiene en cuenta varios elementos a considerar cómo son las tensiones compositivas, la figura/fondo, simetría/asimetría, equilibrio, estructura, representación y abstracción entre muchos otros que el estudiante y todo espectador de una obra plástica puede contemplar (MEN, 2015). Frente a estos elementos el MEN presenta algunas consideraciones importantes en su documento pruebas SER a tener en cuenta:

“Algunos conceptos aplicables a todas las técnicas del lenguaje plástico son: las tensiones compositivas que tratan lo inesperado, lo inestable, contribuye a focalizar la atención sobre un determinado suceso compositivo, figura/fondo cómo la relación que se establece entre las cualidades de un objeto y su entorno; simetría /asimetría: es la correspondencia o proporción adecuada o inadecuada de las partes de un todo, entre sí o con el todo mismo. El equilibrio visual o físico relaciona la armonía es una característica de la estructura, portador de dinamismo y del movimiento; la secuencialidad lleva al orden visual que determina un efecto de sentido temporal, La estructura es la disposición organizada de los elementos de una obra plástica, La Composición es la organización de los elementos básicos en un dibujo o pintura, entendida cómo relación equilibrada de las partes entre sí y con el todo que crean la estructura, la representación: hace alusión a la figura o imagen que sustituye la realidad y la abstracción es comprender lo esencial y poder separarlo de sus formas básicas”. (MEN, 2015, p.15)

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1 Enfoque y diseño de la investigación

La presente Investigación estuvo orientada desde un enfoque de tipo descriptivo – interventivo de corte transversal, su propósito fundamental es proponer una serie de estrategias pedagógicas que ayuden a solventar las dificultades presentadas por los estudiantes de grado quinto del colegio Manuelita Sáenz en el desarrollo de su razonamiento geométrico. Se fundamenta en la recopilación y análisis de información respecto a las dificultades presentadas por los estudiantes en clase de geometría para comprender algunos conceptos cómo son los polígonos regulares, sus partes, los movimientos de rotación y traslación en el plano y el adecuado empleo de los instrumentos de trazo.

Este estudio investigativo se realizó durante el año 2014 y 2015 desde su diseño hasta su ejecución y se abordó desde la metodología de la investigación acción, en la medida en que este tipo de metodología permite no solo investigar sobre el problema presentado en la enseñanza de la geometría, sino también implementar estrategias para solucionar el problema y brindar alternativas pedagógicas para superar las dificultades presentadas desde el aula de clase. Esta investigación-acción permite al docente-investigador analizar la información recolectada al mismo tiempo que se llevan a cabo las estrategias para solucionar las dificultades presentadas (Miguelez, 2000), de esta forma se realiza la intervención desde el aula de clase siendo este el espacio donde se interactúa con la población seleccionada; se reconoce en esta práctica de intervención argumentos teóricos que fundamentan la investigación y a la vez generan rutas integradoras entre el arte y la geometría que pueden brindar soluciones al problema de investigación.

Algunas de las características propias de este modelo de Investigación-acción según Sandín, citada por Hernández son:

“primero, la Investigación-Acción envuelve la transformación y mejora de una realidad (social, educativa, administrativa, etc.), en segunda medida, Parte de problemas prácticos y vinculados con un ambiente o un entorno; tercero, implica la total colaboración de los participantes en la detección de necesidades y en la implementación de los resultados del estudio.” (Hernández, 2006, p. 707)

El enfoque cualitativo posee una serie de características propias que ayudan a fundamentar la investigación en el aula cómo son el hecho de:

“sus planteamientos son abiertos... expansivos, que paulatinamente se van enfocando en conceptos relevantes de acuerdo con la evolución del estudio... fundamentados en la experiencia e intuición, se orienta a aprender de experiencias y puntos de vista de los individuos, valorar procesos y generar teorías fundamentadas en las perspectivas de los participantes” (Hernández, 2006, p. 741)

La realidad seleccionada por el investigador se centra en una población y espacio específico, en este caso los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Manuelita Sáenz en la asignatura de geometría, ya que cómo lo menciona Hernández Sampieri citando a Elliot “la Investigación-Acción es el estudio de una situación social con miras a mejorar la calidad de la acción dentro de ella” (Hernández, 2006, p. 706), es así cómo se proyectó que los avances tanto didácticos cómo pedagógicos que se generan en la investigación ayuden a construir conocimientos en el campo geométrico y artístico, todo generado desde la práctica de aula y su posterior análisis.

### **3.2 Alcance**

La investigación presenta un alcance de tipo descriptivo - interventivo, en la medida que describe en primer momento las dificultades que presentan los estudiantes en la asignatura de geometría, de igual forma se describen las situaciones de aula y las actitudes de los estudiantes frente a la misma; luego se presenta una ruta de acción que responda a superar las dificultades de los estudiantes en el desarrollo

de su razonamiento geométrico, abordando elementos conceptuales sobre esta asignatura cómo elementos expresivos desde la educación artística; de esta manera se presenta una estructura de actividades integradoras que faciliten el reconocimiento de los polígonos regulares y sus elementos, al igual que los movimientos de rotación y traslación, así cómo el manejo de los instrumentos de trazo y la manipulación de materiales artísticos, con lo cual se pretende superar en gran medida las dificultades de los estudiantes. De esta forma, la propuesta pretende llegar ser un referente importante para futuros investigadores que tengan cómo objetivo abordar las dificultades de los estudiantes en el desarrollo de su razonamiento geométrico y pretendan realizarlo por medio de una integración curricular entre el arte y la geometría, brindando elementos claves para entender cómo el arte y la manipulación de diferentes materiales plásticos pueden brindar aportes significativos al respecto.

Desde el campo artístico se orienta a formar estudiantes más sensibles y creativos en el lenguaje plástico, que puedan reconocer el arte cómo un medio de expresión y comunicación tanto de los sentimientos cómo de los pensamientos, de igual manera demostrar cómo la contemplación de las obras de arte conlleva un conocimiento geométrico y una elaboración conceptual en la cual se pueden integrar muchos de los aprendizajes de la escuela, con lo cual se busca dar valor al arte y un aporte a la cultura escolar por medio de exposiciones y muestras plásticas.

A nivel institucional se busca que los resultados y avances de la investigación motiven a los compañeros del área y demás miembros de la comunidad a realizar trabajos de integración curricular; de igual manera aprovechar la experiencia realizada, con sus evidencias documentales de distinto tipo para participar en los foros institucional y locales realizados por la Secretaría de Educación, en donde se reúnan la comunidad académica del sector, de tal manera que sirva de referente a otros docentes y a la comunidad educativa cómo una propuesta integradora curricularmente que afianza y colabora en la elaboración de procesos geométricos y artísticos, motivando de esta forma



a los demás docentes de cómo poder mejorar el desempeño de los estudiantes en las diferentes áreas del conocimiento, llevando este tipo de propuestas a otros grados de escolaridad; permitiendo la integración de los docentes y en lo posible la creación de un nuevo grupo de docentes innovadores.

### **3.3 Población**

El contexto de aula en el cual se lleva a cabo la propuesta está conformado por 34 estudiantes de grado quinto del curso 503 de la jornada de la tarde de la Institución Educativa Distrital Manuelita Sáenz en la localidad de San Cristóbal en Bogotá, en este grupo se encuentran 17 niñas y 17 niños entre los 10 y 13 años, todos residentes de la comunidad cercana a la institución, con un estrato socio-económico entre 1 y 3; la mayoría de los niños tiene un contexto familiar complicado debido a la desintegración familiar y dificultades económicas, se presenta poco apoyo y acompañamiento de los padres al proceso académico, por lo tanto el avance y desarrollo académico de los estudiantes se enfoca exclusivamente al tiempo designado para colegio.

La propuesta se implementó con todos los estudiantes de grado quinto, sin embargo se realizó el seguimiento y documentación a 15 de ellos, estos estudiantes se eligen de manera aleatoria de acuerdo a los resultados presentados en el test de entrada; se considera que esta muestra es significativa ya que representa diferentes niveles de razonamiento geométrico que pueden presentarse en el aula regular, con ellos se lleva a cabo la aplicación de las diferentes actividades y el análisis de los avances, lo que permite al investigador observar de manera más precisa y detallada los avances no solo en lenguaje geométrico, sino también en la manipulación de instrumentos y en el desarrollo de problemas geométricos formulados.

#### **3.3.1 Caracterización de la población**

Para conocer a mayor profundidad las dificultades que presentan los estudiantes en la clase de geometría y el nivel de razonamiento geométrico en que se encuentran al iniciar la investigación, se

emplea cómo prueba diagnóstica el test planteado por Fouz (2006), el cual presenta una serie de preguntas que al ser aplicadas permiten clasificar a los estudiantes en alguno de los tres primeros niveles del modelo de Van Hiele de acuerdo con los resultados obtenidos. El test propone no solo preguntas en las que el estudiante debe poseer algunos conceptos geométricos específicos, sino también elementos de razonamiento y visualización geométrica en las que el estudiante puede acercarse a una respuesta al observar los ejemplos propuestos; las preguntas empleadas en el test se plantean con opción de selección múltiple y con preguntas abiertas donde el estudiante explica sus respuestas y demuestra la apropiación que tiene del lenguaje geométrico.

El test escrito consta de 16 preguntas (Ver anexo1), estas preguntas están orientadas a reconocer elementos claves del desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes cómo son el reconocimiento de los polígonos regulares y sus elementos, la identificación de los movimientos de rotación y traslación en el plano y el manejo del lenguaje geométrico, de igual manera el conocimiento que poseen los estudiantes sobre el manejo de la regla y el transportador, su modo de empleo, su utilidad al trazar rectas y medir los ángulos y el reconocimiento de las unidades de medida; por otro lado permite observar aspectos de la contemplación artística y creatividad de los estudiantes, para evaluar estos aspectos relacionados con la dimensión artística se plantean preguntas dirigidas a reconocer elementos contemplativos cómo la composición de la obra donde el estudiante puede dar cuenta de la armonía en la estructura de la obra, reconocer elementos de simetría y ritmo en las figuras presentes, al igual que identificar la relación que tiene el aplicar color en una obra y cuál es la relevancia que brindan los estudiantes al color en el momento de la contemplación; de igual manera se busca identificar elementos creativos al dar la posibilidad de aplicar colores y matices a ejercicios presentados y plantear algunas soluciones a problemas geométricos que se pueden resolver de diferente forma.

Después de llevar a cabo el test de entrada con los 15 estudiantes seleccionados como población objetivo, los resultados obtenidos por los estudiantes permiten caracterizarlos de la siguiente manera:

El conocimiento y habilidades demostrados por los estudiantes en el razonamiento geométrico se enmarcan en el nivel 1 del modelo de Van Hiele, presentando algunas características propias de este nivel como son, que los niños diferencian algunos de los polígonos presentados en el test, pero no pueden mencionar los elementos que los conforman o las propiedades de los mismos, el 67% no puede identificar y resaltar los ángulos rectos de los polígonos presentados. Al abordar el concepto de polígono se reconoce que la mayoría de los estudiantes no tienen claridad frente a este, a pesar de proponerles una serie de ejemplos gráficos que podían ayudar a definir el concepto (Ver anexo 1) solamente el 20% de los estudiantes lograron acercarse al concepto, otro 20% describieron algunas características de los ejemplos para intentar definir el concepto y el resto se limitó a describir la figura presentada. En cuanto al reconocimiento de los movimientos de rotación y traslación de los polígonos en el plano el 54% de los estudiantes pudieron dar cuenta de los movimientos realizados por las figuras en los ejemplos asignados, el resto de los estudiantes reconocen uno de los movimientos con dificultad o no distingue la diferencia entre estos, como principal argumento mencionan: “la figura se movió arriba”, en otros casos no reconocen los movimientos diciendo: “ninguna figura se desplazó todas están en su lugar”.

Sobre el reconocimiento de algunos de los elementos de los polígonos y las propiedades de los mismos se presentan varias figuras que se espera que los estudiantes puedan definir geoméricamente, los resultados apuntan al nivel 1 ya que el 60% de los estudiantes describen los polígonos presentados refiriéndose a su similitud con objetos cotidianos o utilizando su parecido a otras figuras geométricas más sencillas que conocen, para poder describir los polígonos presentados utilizan frases como “se parece a...”, “es como una ...”. En el aspecto relacionado con identificar la existencia

de familia de polígonos y comparar las características de figuras similares el 40% de los estudiantes pudo reconocer el cuadrado como un polígono perteneciente a una familia de cuadriláteros, el resto del grupo mostró dificultades en la comprensión del lenguaje geométrico al no poder diferenciar entre paralelogramo, trapecios y trapezoides.

En cuanto a identificar las propiedades de un cuadrilátero, trazar su diagonal y reconocer otras características sólo el 20% de los estudiantes estuvo en la capacidad de responder correctamente, el resto de los estudiantes presentó dificultades no sólo en el lenguaje geométrico, sino en reconocer y entender las características mencionadas. Por otro lado se encontró que las preguntas adaptadas del test geométrico de Fouz (2006) presentaron un reto enorme para los estudiantes, ya que la dificultad de entender el lenguaje geométrico y los conceptos allí expresados dificultó la interpretación, de esta manera se identificó que el vocabulario geométrico demostrado por los estudiantes se presenta en un nivel muy básico, por tal motivo preguntas que indagan conceptos como polígono, ángulos, diagonales, cuadrilátero, traslación, rotación, necesitaron un apoyo adicional del docente para que los estudiantes comprendieran la pregunta que se estaba formulando.

Sobre el conocimiento y uso adecuado de los instrumentos de trazo y medida, se observó cómo los estudiantes no emplearon dichos implementos para corroborar las propiedades de los polígonos presentados, de tal forma que les permitiera llegar a una respuesta más acertada en la identificación de los ángulos y propiedades de los polígonos, por el contrario algunos de los estudiantes el 20% no conocían el transportador, confundiéndolo con la escuadra, y otro tanto el 60% no sabía el modo de ubicarlo ni las unidades de medida que este emplea; al momento de dibujar polígonos los estudiantes no emplearon la regla para cumplir con la condición de formar estas figuras con segmentos rectos.

Otro grupo de preguntas de la prueba diagnóstica apunta a identificar algunos niveles de creatividad de los estudiantes en este aspecto se observa en los resultados que alrededor de la mitad de

los estudiantes el 47% emplea los polígonos y los ubica de tal manera que estos puedan recrear objetos o figuras que les agradan en contraste con el resto de estudiantes que se limitaron a dibujar polígonos de manera separada sobre el plano o a imitar los ejercicios presentados anteriormente en el test. Sobre el lenguaje plástico se puede mencionar que los estudiantes reconocen la presencia del color como un aspecto motivante y llamativo frente a la contemplación de una obra de arte, identifican las familias cromáticas existentes y demuestran el gusto por poder aplicar color a las obras propuestas. En la aplicación del color se distinguen diferentes niveles de creatividad en los cuales un grupo de estudiantes colorea la obra siguiendo como guía el ejemplo dado en la prueba, un 53% de los estudiantes colorea libremente sin seguir ningún esquema establecido y un 20% fueron más allá encontrando objetos combinando los polígonos presentados en la obra. Los estudiantes demostraron en sus respuestas que reconocen la intencionalidad y comunicación que conlleva una obra de arte reconociendo que esta posee elementos sensibles que puede ayudar a acercar al observador al tema de la obra.

Como resultado de la aplicación de la prueba diagnóstica se pudo ubicar a los estudiantes en el nivel 1 del modelo de Van Hiele de acuerdo a las características presentadas, entre estas se encuentra que los estudiantes distinguen diferencias características físicas globales de los objetos geométricos (Gutiérrez & Jaime, 1990), “en muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 307); algunos de ellos presentan características de nivel 2 en la cual “los estudiantes se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 308) pero ninguno las demuestra de manera contundente para ser ubicado en este nivel. Para identificar de manera más específica cómo se analizaron las respuestas a cada pregunta presentada en

el test de entrada se le invita al lector a revisar el análisis de la prueba de entrada en el apartado de Anexos.

### **3.4 Categorías de análisis**

Por medio de la intervención a realizar en el grupo seleccionado se busca encontrar algunos aspectos característicos de cada uno de los pensamientos a abordar, el pensamiento geométrico y el pensamiento artístico, esto permite realizar una clasificación de diferentes categorías de análisis, teniendo en cuenta para ello el registro de las actividades implementadas, de esta manera se pueden analizar las siguientes categorías: visualización geométrica, contemplación artística y motivación.

La primera de las categorías propuestas contiene varias subcategorías entre ellas reconocimiento de polígonos, comparación entre polígonos, reconocimiento de movimientos en el plano, manejo del vocabulario geométrico y manejo de los instrumentos de trazo y medida; la segunda categoría denominada contemplación artística, contiene las siguientes subcategorías, composición de la obra, aquí se encontrarán elementos estructurales de la obra cómo son: figura/fondo, simetría/asimetría, ritmo (SED, 2015); manejo del color, referidos elementos cómo el matiz, intensidad y contrastes(SED, 2015) y la motivación es la tercera categoría en ella se tiene en cuenta la actitud de los estudiantes al realizar cada una de las actividades propuestas.

En la primera categoría se reconocen las siguientes subcategorías:

1. Reconocimiento de polígonos, sus características y propiedades: aquí se alinean todos los datos recolectados que dan cuenta del avance del pensamiento geométrico-espacial de los estudiantes a la luz de los niveles de razonamiento geométrico del modelo de Van Hiele, de esta manera se busca encontrar las evidencias que demuestren la capacidad de los estudiantes para reconocer que un polígono

tienen lados, vértices, ángulos y cómo emplea estos elementos para describir la figura (Gutiérrez y Jaime,1990), todos estos elementos apuntan a reconocer el Nivel 2 de razonamiento en los estudiantes.

2. Comparación de polígonos: esta subcategoría permite identificar cómo los estudiantes clasifican los diferentes polígonos regulares presentados y reconocen algunas de sus propiedades, utilizan para ello el reconocimiento de los elementos que conforman un polígono para diferenciar entre una o varias figuras geométricas hallando similitudes, congruencias e semejanzas; en este nivel ya se pueden mencionar la importancia del uso de los materiales de trazo y dibujo para encontrar semejanzas o diferencias entre estas propiedades de las figuras, experimentando sus hipótesis (Gutiérrez y Jaime,1990).

3. Reconocimiento de movimientos en el plano: esta subcategoría busca observar las comparaciones que hace el estudiante entre una figura geométrica y otra, reconocer que si no encuentra alteraciones en sus medidas de lados y ángulos es decir que son isométricas (Gutiérrez, 1990) si pueden presentarse en diferente posición sobre el plano, aquí logra diferenciar los movimientos de rotación y traslación que ejecuta, de esta forma se busca identificar cómo el estudiante con el uso apropiado de lenguaje geométrico y ejecución de las diferentes actividades “reconoce la traslación cómo un movimiento en línea recta que deja las figuras con la misma orientación en la que están antes de moverse” (Gutiérrez,1990,p350) e identifica la rotación cómo “un cambio de orientación” (Gutiérrez, 1990).

La siguiente categoría va referida al lenguaje geométrico se pretende encontrar cómo los estudiantes van empleando de mejor manera los conceptos geométricos y cómo los apropian tanto para comunicarse cómo para seguir las instrucciones dadas por el docente para la elaboración adecuada de un polígono, de igual manera determinar la aplicación de los conceptos geométricos abordados en los ejercicios planteados en clase.

Otra categoría muy cercana a la visualización geométrica que va ligada al pensamiento métrico y sistemas de medidas es el manejo de los instrumentos de trazo y medida, esta categoría cobra gran relevancia, de esta forma se persigue encontrar los aspectos que dificultan la empleo de la regla y el transportador para elaborar los polígonos regulares, siguiendo algunas medidas y determinar cuáles son las actividades y las explicaciones que facilitan la comprensión del manejo de estos elementos.

En cuanto a la educación artística se reconoce una gran categoría de análisis cómo es la Contemplación; en ella se encuentran relacionadas las siguientes subcategorías:

1. Composición de la obra: aquí se pretende focalizar la atención sobre los sucesos compositivos cómo la figura fondo, entendida cómo la relación entre las cualidades de un objeto y su entorno (SED, 2015), simetría/asimetría cómo la capacidad del estudiante de encontrar correspondencia entre las partes y el todo de la obra (SED, 2015); el ritmo, entendido cómo la “periodicidad percibida” (SED, 2015) entre los objetos de una composición.

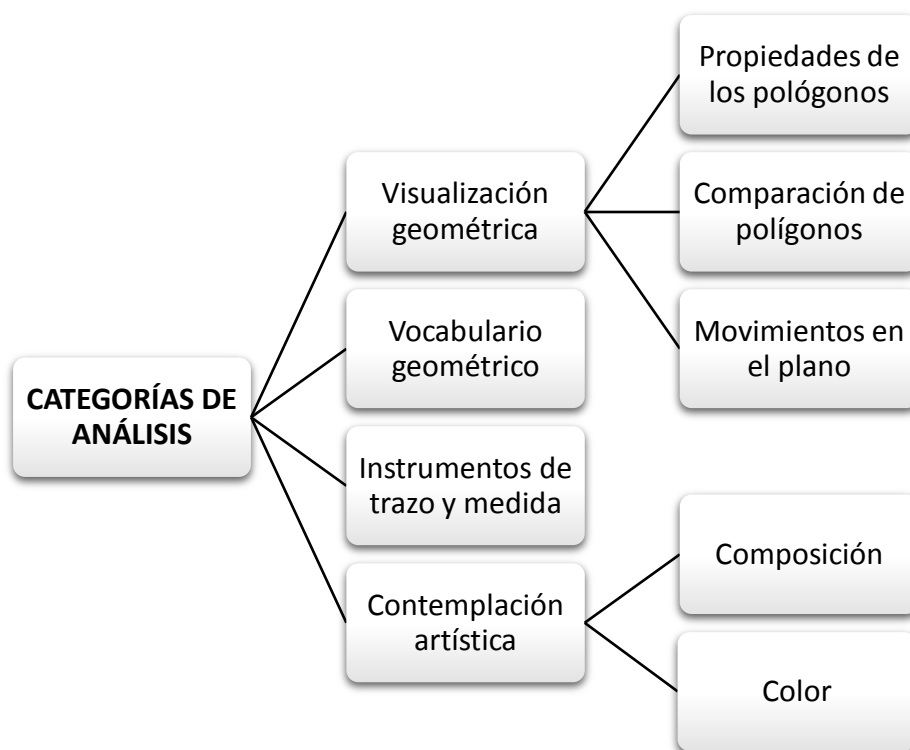
2. El color, en esta segunda subcategoría se dirige la atención a reconocer cómo los estudiantes están en la capacidad de identificar algunas propiedades del color cómo son su claridad u oscuridad empleada en la obra; la intensidad entendida cómo la pureza del color utilizado y el contraste cómo aquella “combinación de las cualidades opuestas del color” (SED, 2015) y el empleo que dan de este elemento en la creación de sus obras.

Por último se pretende observar e identificar la motivación, ya que es un factor importante ligado al entendimiento y el cual está presente en cualquier proceso educativo, de esta forma se proyectó observar que tipos de actividades que motivan más la actitud de los estudiantes a trabajar en clase, y a utilizar de manera correcta los elementos propuestos al igual que integrar los dos tipos



de pensamientos, de esta misma manera reconocer cómo esta motivación ayudó a un buen seguimiento de instrucciones y a la elaboración correcta de las actividades planteadas.

En el siguiente mapa se encuentra resumida la información presentada anteriormente sobre las categorías de análisis de la investigación:



*Ilustración 1- Categorías de análisis*

### **3.5 Instrumentos de recolección de información**

En la investigación acción se pretende que la recopilación de información permita observar datos precisos sobre cómo los integrantes van generando sus conceptos, percepciones, emociones, pensamientos, experiencias, etc. (Migueléz, 2000); de esta forma se requiere que los instrumentos utilizados con tal fin puedan ser llevados y desarrollados en el aula de clase con los propios participantes, de manera que el investigador pueda recolectar todo tipo de datos ya sea en el lenguaje

escrito, verbal, no verbal, los tipos de conducta, imágenes, etc. (Migueléz, 2000); para la presente investigación se utilizaron los siguientes instrumentos de recolección de información: Observaciones de Intervención, Grabaciones de video y audio, Portafolios.

Las observaciones de intervención pretenden ser una fuente valiosa de información ya que buscan enfocar la atención a aquellos detalles que surgen propiamente en el aula de clase y los cuales el investigador pudo dejar pasar por alto, citando a Hernández- Sampieri “En la investigación cualitativa necesitamos estar entrenados para observar y es diferente de simplemente ver...no se limita al sentido de la vista, implica todos los sentidos” (Hernández, 2006, p.3 47) esto quiere decir que al observar el desarrollo de las clases no solo se anota lo que el investigador ve, sino que también se realiza el análisis de cómo se siente el ambiente de clase, que hablan los estudiantes, que actitud demuestran , etc. (Hernández-Sampieri, 2006)

Los instrumentos de recolección de información se escogen de tal forma que estén alienados con los objetivos de la investigación, de esta manera se emplean con el fin de obtener evidencias que permitan hacer un seguimiento a la implementación de las actividades propuestas, al mismo tiempo que observar cómo los estudiantes desarrollan las habilidades y conocimientos necesarios que les permita avanzar en su razonamiento geométrico.

La elaboración y seguimiento de las diferentes actividades mediante el formato de observaciones de intervención en cada clase, permitió analizar las pre-categorías que fueron surgiendo, anotaciones y aportes propios del investigador y un análisis de lo observado, esto da paso a las anotaciones finales del documento. Para la investigación se plantea cómo principal instrumento de recolección de información las observaciones de intervención, este instrumento se utiliza para registrar aquellos hechos que suceden en el aula y que son susceptibles de interpretación, de esta manera el instrumento permite recopilar información sobre el desarrollo de las actividades, las participaciones de los

estudiantes, dificultades presentadas y formas de intervenirlas o corregirlas; finalmente las evidencias recolectadas sirven para verificar en qué medida se alcanzaron los objetivos planteados en la investigación.

Sumado a esto, se lleva un seguimiento de documentos y materiales elaborados por los estudiantes, que dan cuenta de los avances en el proceso contemplativo y de expresión de obras artísticas; estos documentos son registrados de tal forma que den cuenta de la fecha y el lugar donde fueron elaborados, tomando como referencia a Hernández- Sampieri (2006):

“lo primero por realizar es registrar la información de cada documento, artefacto, registro, material u objeto (fecha y lugar de obtención, tipo de elemento, uso aparente que le dará en el estudio, quien o quienes lo produjeron)... También integrarlo al material que se analizará” (Hernández-Sampieri, 2006, p.408)

El formato empleado por el docente investigador cuenta con varios elementos entre ellos: las notas descriptivas, estas dan cuenta de todo el acontecer de la clase, en ella se incluye datos básicos de la clase como lugar, grado, hora, fecha, asignatura, además del objetivo general y específico de la actividad a realizar, al igual que el desarrollo de la propuesta de clase; además allí aparece el registro de lo que sucede y aporta cada uno de los estudiantes participantes, además de contener un registro fotográfico de las actividades.

Aparecen además algunas notas interpretativas que son las diferentes reflexiones del investigador sobre las notas descriptivas, brindando aportes e interpretaciones de lo escrito, aparece además el cuadro de categorías que le permite al docente investigador brindar elementos que aparecen en las anotaciones y analizarlos a la luz de las categorías planteadas. Por último aparecen en las observaciones de intervención, estas son constituidas por algunas notas metodológicas en las cuales el

investigador da aportes sobre la metodología y actividades planteadas, donde se observa y analiza si las actividades tuvieron el resultado esperado y los avances de los estudiantes.

Para esta investigación se recopilaron documentos cómo pruebas escritas, ejercicios de clase, trabajos grupales, que pusieron en evidencia los elementos teóricos y prácticos referidos al desarrollo del razonamiento geométrico y a la dimensión contemplativa del arte; sustentos cómo fotografías, grabaciones y videos permiten abordar elementos menos evidentes para su análisis cómo son la motivación y actitud a la clase, la apreciación de las obras y el seguimiento de instrucciones para elaborar los diferentes polígonos; elementos que buscan avalar el cumplimiento de los objetivos propuestos en la investigación. Además de las observaciones se tiene cómo otro instrumento de recolección de datos portafolios de los estudiantes, compuestos por las obras de arte realizadas en clase, las que permiten dar cuenta de los progresos alcanzados en cada sesión y los avances demostrados tanto en la dimensión contemplativa del arte cómo en la visualización geométrica por parte de los niños.

### **3.6 Plan de acción**

El objetivo de la investigación se orienta en solucionar las dificultades presentadas por los estudiantes de grado quinto para el desarrollo de su razonamiento geométrico en la clase de geometría; por tal motivo en un primer momento se lleva a cabo una prueba diagnóstica que permita determinar el nivel de razonamiento en que se encuentran los estudiantes, luego se plantean 6 actividades integradoras en el aula, organizadas de acuerdo con las 5 fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y que vinculan el uso y manipulación de materiales plásticos por parte de los estudiantes, al igual que el empleo de los materiales de trazo cómo fueron la regla y transportador.

Cómo primer momento se establece la fase diagnóstica, ya que se observa la importancia de tener un punto de partida y la necesidad de reconocer el nivel de razonamiento de los estudiantes con

los cuales se lleva a cabo la propuesta, esto fundamentado en la fase 1 del proceso de aprendizaje de Van Hiele denominado información, ya que cómo lo menciona Gutiérrez (1990) “se debe iniciar acercándose lo más posible a la situación real de los alumnos, reconocer sus conocimientos previos” (p.336).

Por tal motivo se plantea un test de entrada a los estudiantes con algunas preguntas adaptadas del test geométrico de Fouz (2006) en el cual se abordan conceptos cómo los polígonos y sus elementos, el reconocimiento de diferentes polígonos, los movimientos de rotación y traslación sobre el plano al igual que reconocer el empleo que brindan los estudiantes a los elementos de trazo y medida cómo la regla y el transportador. (Ver anexo 1)

Luego de realizar la fase de diagnóstico se plantean seis actividades que buscan dar alternativas de solución para las dificultades detectadas las cuales se relacionan a continuación:

### **3.7 Actividades**

#### **3.7.1 Actividad # 1**

La actividad se organizó en tres instantes diferentes, el primero de ellos fue diseñado para ayudar al estudiante a superar las dificultades relacionadas con: el reconocimiento de las partes de un polígono y su construcción utilizando los instrumentos de trazo y medida, el segundo momento direccionado a rellenar una parte del plano utilizando polígonos regulares y acercar a los estudiantes a los movimientos de rotación y traslación de polígonos, y el último de ellos buscó integrar los conocimientos trabajados en las sesiones anteriores, de esta manera se afianza en los estudiantes la capacidad de identificar los polígonos regulares y sus propiedades y representar los movimientos de rotación y traslación.

Tabla 1 Actividad de Implementación 1

ACTIVIDAD :	<b>EL CUENTO DE LOS POLÍGONOS</b>
<b>SESIÓN 1</b>	Construcción de polígonos
MATERIALES REQUERIDOS	Cartulina, Regla, transportador, tijeras, borrador
SUBCATEGORIAS	<b>OBJETIVO</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS</li> <li>• COMPARACIÓN DE POLÍGONOS</li> <li>• VOCABULARIO GEOMÉTRICO</li> <li>• INSTRUMENTOS DE TRAZO Y MEDIDA</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Afianzar en los estudiantes el reconocimiento de los elementos constituyentes de un polígono cómo son el número de lados, vértices, ángulos y las medidas de los mismos utilizando los instrumentos de trazo y medida para su construcción.</li> <li>• Reconocer algunas dificultades presentadas por los estudiantes para identificar las partes de un polígono y su construcción.</li> </ul>
	<b>FASES DE APRENDIZAJE</b>
Fase 1	<i>Se presentan a los estudiantes una serie de polígonos en cartulina y se realizan preguntas que buscan identificar su grado de reconocimiento de los elementos constituyentes de cada polígono; de igual manera se emplean una serie de preguntas orientadoras para reconocer el grado de apropiación y manejo de los instrumentos de trazo y medida</i>
Fase 2	<i>El docente aborda los conceptos de lados, ángulos, vértices, diagonales en un polígono, utilizando cómo modelo figuras en cartulina que los estudiantes pueden manipular, se entregan los elementos de trabajo y el docente da las indicaciones para elaborar los polígonos regulares (triángulo, cuadrado, pentágono) con los elementos de trazo y medida.</i>
Fase 3	<i>Se da de manera continua, junto a la fase 2, en ella se corrige el uso adecuado del vocabulario geométrico y el adecuado manejo de los instrumentos de trazo y medida para realizar los polígonos regulares, el docente explica el manejo y ubicación de la regla y el transportador para realizar las medidas ángulos y semirectas de los polígonos; en la elaboración de los polígonos se brindan espacios para que los estudiantes se ayuden entre sí e intercambien ideas, el docente ayuda a que las conversaciones se hagan empleando un adecuado lenguaje geométrico.</i>
Fase 4	<i>Se propone cómo problema a los estudiantes la elaboración de un hexágono regular, para lo cual el docente brinda la medida de los ángulos y los estudiantes aportan la medida de sus lados, cada uno debe realizar el molde sobre cartulina, empleando los elementos brindados a medida que señalan con diferente color cada elemento del polígono, por último cada estudiante corta el molde de cada uno de los polígonos realizados.</i>
Fase 5	<i>Se realiza de manera grupal la revisión de los polígonos realizados sobre cartulina, de esta manera se cotejan las respuestas frente a si estos moldes son polígonos regulares o no, y que características permiten definir esto, se refuerza el empleo adecuado del vocabulario geométrico por parte del docente.</i>
ACTIVIDAD	<b>EL CUENTO DE LOS POLÍGONOS</b>
<b>SESIÓN 2</b>	Dividir el plano
MATERIALES REQUERIDOS	Moldes de polígonos regulares, tijeras, pegante, papeles iris de diferente color, Pliego de cartulina.
SUBCATEGORIAS	<b>OBJETIVO</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS</li> <li>• VOCABULARIO GEOMÉTRICO</li> <li>• COMPARACIÓN DE POLÍGONOS</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar la capacidad de los estudiantes para relacionar un polígono con su nombre y sus propiedades de acuerdo a unas indicaciones dadas.</li> <li>• Identificar las dificultades de los estudiantes para diferenciar entre los polígonos (triángulo, cuadrilátero, pentágono y hexágono)</li> <li>• Reconocer las capacidades de los estudiantes para ubicarse en el plano y reconocer diferentes movimientos de figuras en él.</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>• MOVIMIENTOS EN EL PLANO</li> <li>• COMPOSICIÓN</li> <li>• COLOR</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Analizar elementos de la dimensión contemplativa del arte, identificando elementos de la composición y el color empleado.</li> </ul>
<b>FASES DE APRENDIZAJE</b>	
Fase 1	<i>Se presentan a los estudiantes los polígonos realizados por ellos en la sesión # 1, y se realizan preguntas que indagan sobre sus conocimientos frente a los elementos de estos polígonos, su construcción y la importancia de emplear los materiales de trazo y medida.</i>
Fase 2	<i>Se presentan y entregan a los estudiantes los materiales a utilizar, se sugiere cómo actividad el realizar polígonos regulares de diversos colores empleando los materiales, no se sugiere un modo de hacerlo, permitiendo explorar diferentes rutas de elaboración.</i>
Fase 3	<i>El docente emplea algunos moldes para mostrar a los estudiantes los movimientos de rotación y traslación, indicando cómo se pueden referenciar los vértices de la figura para reconocer el tipo de movimiento ejecutado, se pide a los estudiantes ejecutar este movimiento y explicar cómo pueden reconocerlo.</i>
Fase 4	<i>Se plantea cómo problema que los estudiantes utilicen los moldes de los polígonos realizados para cubrir la superficie completa de la cartulina sin dejar espacios vacíos, pueden hacerlo cambiando la posición de las figuras, ejecutando diferentes movimientos en el plano y combinando a su agrado los colores.</i>
Fase 5	<i>Se exponen los trabajos realizados y cada grupo explica cómo realiza el ejercicio, las dificultades presentadas y cómo las solucionaron, de igual manera se busca que elijan la obra de su agrado y expliquen qué elementos los hace seleccionarla.</i>
ACTIVIDAD # 1	<b>EL CUENTO DE LOS POLÍGONOS</b>
<b>SESIÓN 3</b>	Gráfica del cuento “La nueva figura de papel”
MATERIALES REQUERIDOS	Cartulinas teseladas, moldes de polígonos, pintura, pinceles.
SUBCATEGORIAS	<b>OBJETIVO</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS</li> <li>• VOCABULARIO GEOMÉTRICO</li> <li>• COMPARACIÓN DE POLÍGONOS</li> <li>• MOVIMIENTOS EN EL PLANO</li> <li>• COMPOSICIÓN</li> <li>• COLOR</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar la capacidad de los estudiantes para relacionar un polígono con su nombre y sus propiedades de acuerdo a unas indicaciones dadas.</li> <li>• Identificar las dificultades de los estudiantes para diferenciar entre los polígonos (triángulo, cuadrilátero, pentágono y hexágono)</li> <li>• Reconocer las capacidades de los estudiantes para ubicarse en el plano y reconocer diferentes movimientos de figuras en él.</li> <li>• Analizar elementos de la dimensión contemplativa del arte, identificando elementos de la composición y el color empleado.</li> </ul>
<b>Fases de aprendizaje</b>	
Fase 1	<i>El docente realiza una serie de preguntas orientadas a indagar el conocimiento de los estudiantes frente al concepto de polígono y sus elementos, del mismo modo indaga sobre cómo pueden los estudiantes diferenciar entre algunos polígonos, al igual que lo movimientos de rotación y traslación sobre el plano.</i>
Fase 2	<i>Se realiza la lectura del cuento “La nueva figura de papel” (VER ANEXO 2) en el cual se busca que los estudiantes relacionen el polígono que deben pintar a partir de reconocer sus elementos, de igual manera se busca que los estudiantes puedan identificar y representar pictóricamente los movimientos de rotación y traslación que se mencionan en el cuento.</i>
Fase 3	<i>El aporte del docente se realiza de manera continua en la fase dos en la elaboración de la obra y durante la lectura del cuento.</i>

Fase 4	<i>En los grupos de trabajo deben resolver el problema de elaborar la obra a partir de las indicaciones que brinda el cuento, se busca que los estudiantes puedan integrar los conceptos geométricos trabajados.</i>
Fase 5	<i>Se exhiben las obras realizadas, los estudiantes de cada grupo brindan aportes sobre cómo fue su elaboración, las dificultades que presentaron y se brindan aportes generales del grupo sobre si se consiguió lo esperado y por qué.</i>

La sesión 3 va acompañada del cuento “la nueva figura del pueblo de papel” (ver anexo 2), con el cual siguiendo las instrucciones los estudiantes deben tener la posibilidad de construir el siguiente gráfico e integrar en los objetos geométricos descritos en el cuento:

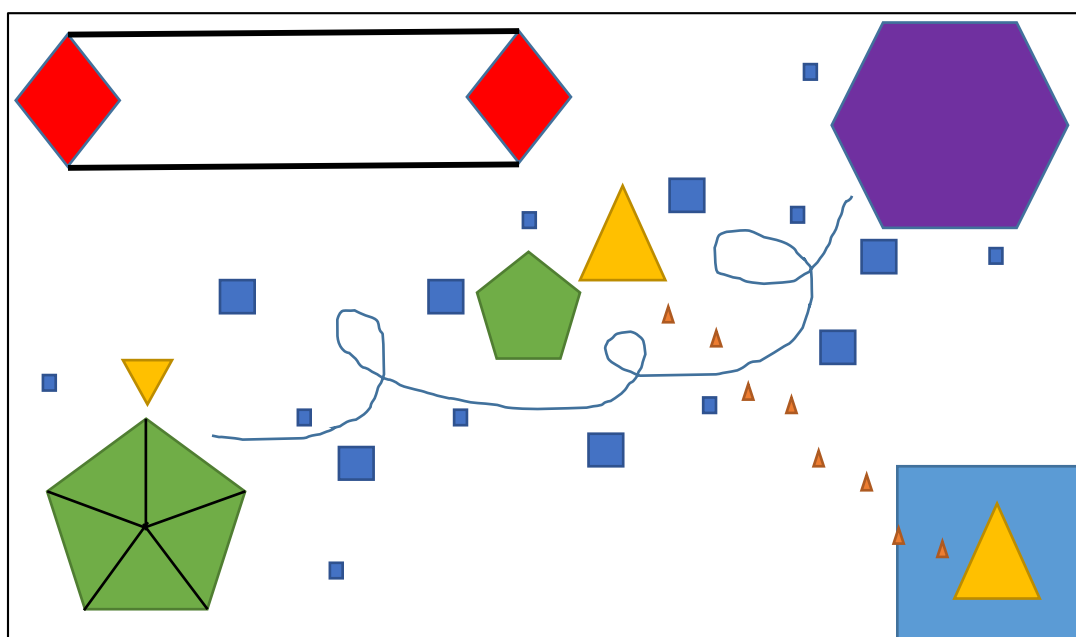


Imagen 11 La nueva figura del pueblo de papel

### 3.7.2 Actividad # 2

Esta segunda actividad se propuso para fortalecer el proceso de visualización geométrica de los estudiantes por medio del reconocimiento de diferentes polígonos y promover la contemplación artística a través de la observación de una obra apoyándose en elementos del arte cómo la creatividad y el color.

Tabla 2 Actividad de Implementación 2

ACTIVIDAD	RECONOCIMIENTO DE POLÍGONOS
MATERIALES REQUERIDOS	Guía de trabajo, plastilina, crayolas, colores, papel recortado, tijeras, pegante.



SUBCATEGORIAS	OBJETIVO
<ul style="list-style-type: none"> <li>• PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS</li> <li>• VOCABULARIO GEOMÉTRICO</li> <li>• COMPARACIÓN DE POLÍGONOS</li> <li>• INSTRUMENTOS DE TRAZO Y MEDIDA</li> <li>• COMPOSICIÓN</li> <li>• COLOR</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desde la visualización geométrica, el estudiante demuestra que puede clasificar algunos polígonos teniendo en cuenta sus elementos, diferenciando algunos cuadriláteros como el cuadrado, el rectángulo y el rombo.</li> <li>• El estudiante emplea la regla y el transportador para verificar las propiedades de los polígonos presentados, permitiéndole clasificarlos.</li> <li>• Desde la Contemplación artística, los estudiantes utilizan diferentes materiales para componer la obra por medio del empleo del color y diversas texturas.</li> </ul>
<b>Fases de aprendizaje</b>	
Fase 1	<i>se entrega a cada uno de los estudiantes la guía de trabajo asignada (VER ANEXO 3), en ella se encuentran una serie de polígonos, que los estudiantes deben clasificar teniendo en cuenta que todos hacen parte de la familia de cuadriláteros, se realizan preguntas orientadoras frente a las figuras que observan y cómo las pueden diferenciar.</i>
Fase 2	<i>Se les indica a los estudiantes que la obra está compuesta por diferentes cuadriláteros y que deben buscar la manera de clasificarlos, asegurándose que se cumplan las características determinadas por ellos mismos mediante la observación.</i>
Fase 3	<i>Se realiza por parte del docente la explicación de cómo se llaman y que características tienen los polígonos presentados, se dan algunas indicaciones sobre cómo verificar sus características.</i>
Fase 4	<i>Se realizan grupos de trabajo en los cuales se busca que intercambien la información recolectada y enfrenten sus respuestas, para dar solución al problema de contar las figuras presentes.</i>
Fase 5	<i>Se afianzan los conocimientos adquiridos y se permite la integración de elementos artístico expresivos, para que cada estudiante utilice diferentes materiales para construir la obra.</i>

### 3.7.3 Actividad # 3

El objetivo general de esta actividad es fortalecer el nivel de reconocimiento geométrico que poseen los estudiantes al manipular y moldear diferentes polígonos.

Tabla 3 Actividad de Implementación 3

ACTIVIDAD	MOLDEANDO POLÍGONOS
MATERIALES REQUERIDOS	Polígonos regulares realizados en cartón, venda para los ojos, plastilina, tablas de amasar, transportador y regla.
SUBCATEGORIAS	OBJETIVO
<ul style="list-style-type: none"> <li>• PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS</li> <li>• VOCABULARIO GEOMÉTRICO</li> <li>• COMPARACIÓN DE POLÍGONOS</li> <li>• COMPOSICIÓN</li> <li>• COLOR</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Emplear el tacto como un elemento que posibilita reconocer algunos polígonos y sus propiedades.</li> <li>• Identificar por medio de algunas preguntas clave el nivel de reconocimiento geométrico de los estudiantes frente a la identificación de los elementos de un polígono.</li> <li>• Potenciar la sensibilidad de los estudiantes por medio de la manipulación de materiales y construcción de figuras.</li> <li>• Acercar a los estudiantes al concepto de teselación con ayuda de fichas geométricas.</li> </ul>

<b>Fases de aprendizaje</b>	
Fase 1	<i>Se presentan a los estudiantes una serie de polígonos que deben identificar por medio del tacto, ya que se hallan con los ojos vendados y deben dar características de este cómo son el números de lados y vértices, aquí se realizaran preguntas sobre lo que perciben los estudiantes y los términos geométricos que emplean para describir la figura.</i>
Fase 2	<i>Se presentan una serie de teselaciones geométricas que incorporan los polígonos trabajados (triángulo, cuadrado, pentágono y hexágono) (VER ANEXO 4), los estudiantes tratan de identificar y definir una teselación y el docente brinda a portes al concepto, se aclara que estas teselaciones deben emplear polígonos regulares, para lo cual se utilizan los materiales de trazo y medida.</i>
Fase 3	<i>Se realiza la explicación sobre las características de una teselación y los elementos a tener en cuenta para elaborar una de ellas.</i>
Fase 4	<i>Se organizan grupos de trabajo a cada uno de ellos se le brindan materiales cómo cartulina, reglas, transportadores, plastilina y se propone que cada uno de ellos debe elaborar una delas teselaciones presentadas, cumpliendo con las condiciones de no sobreponer figuras ni dejar espacios vacíos, luego de realizarla dibujada empleando los materiales de trazo, deben recrearla utilizar elementos plásticos.</i>
Fase 5	<i>En esta fase se propone no solo compartir las obras realizadas entre los grupos, sino que los estudiantes comprueben con ayuda del transportador y la regla si las figuras que se muestran cumplen con las propiedades planteadas y además corroborar que la teselación está bien elaborada. Por otro lado se enfatiza en las texturas empleadas, la composición y el color de la obra, fortaleciendo los elementos de la contemplación artística.</i>

### 3.7.4 Actividad # 4

El objetivo general de esta actividad es profundizar en el grado de análisis y comprensión de los estudiantes frente al concepto de teselación y los movimientos en el plano que se realizan con diferentes polígonos.

Tabla 4 Actividad de Implementación 4

ACTIVIDAD	<b>ROMPECABEZAS TESELADOS</b>
MATERIALES REQUERIDOS	Guías de Trabajo, Fichas de polígonos para armar la teselación
SUBCATEGORIAS	<b>OBJETIVO</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS</li> <li>• VOCABULARIO GEOMÉTRICO</li> <li>• COMPARACIÓN DE POLÍGONOS</li> <li>• MOVIMIENTOS EN EL PLANO</li> <li>• COMPOSICIÓN</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Afianzar en los estudiantes la capacidad de reconocer los movimientos de rotación y traslación de diferentes figuras en el plano.</li> <li>• Reconocer elementos creativos y compositivos que usan los estudiantes para crear diferentes obras teseladas.</li> <li>• Identificar el grado de razonamiento geométrico de los estudiantes para identificar en las obras presentadas transformaciones isométricas (rotaciones y Traslaciones).</li> </ul>
<b>FASES DE APRENDIZAJE</b>	
Fase 1	<i>Esta primera fase busca acercar lo más posible a los estudiantes al tema propuesto, de esta manera se generan una serie de preguntas que permiten reconocer el razonamiento</i>

	<i>que poseen los estudiantes frente a una teselación regular y los polígonos que la conforman, se entregan las guías de trabajo con algunas teselaciones y las fichas de trabajo (polígonos regulares).</i>
Fase 2	<i>Se plantea cómo problema a resolver por parte de los estudiantes el realizar una de las teselaciones presentadas (VER ANEXO 4) en la guía de trabajo, para lo cual se emplean las fichas de algunos polígonos regulares que el docente entregó previamente a los estudiantes; de esta manera se busca enfrentar a los niños a la forma correcta de encajar las diferentes fichas, así pueden comprobar las condiciones de una teselación; de este modo se ayuda a los estudiantes a comprender y descubrieran los movimientos de rotación y traslación que van realizando con cada polígono.</i>
Fase 3	<i>En esta fase se utilizan elementos multimediales, en este caso dos videos informativos y explicativos sobre las teselaciones y sus características, (VER ANEXO 5) en los cuales se presentan a los estudiantes los conceptos de teselación regular e irregular; de igual manera el docente realiza el acompañamiento continuo a los grupos de trabajo en el desarrollo de la actividad propuesta y afianza los conceptos de polígono, vértice, lado, tipos de ángulo, traslación y rotación a medida que supervisa la actividad.</i>
Fase 4	<i>Se propone cómo trabajo libre y creativo la elaboración de una teselación o figura libre que pueda surgir del movimiento de las diferentes fichas de trabajo, esta actividad es dirigida a consolidar el aprendizaje de los estudiantes frente a los conceptos geométricos cómo son las propiedades de los polígonos, los movimientos en plano, las teselaciones y vincula elementos artísticos al permitir que cada grupo combine los colores y cree a partir de la imaginación.</i>
Fase 5	<i>En este momento el docente comprueba los conocimientos aprendidos no solo observando los trabajos realizadas, sino también el modo en que los estudiantes exponen su obras y explican cada uno de sus elementos cómo los polígonos empleados, los posibles movimientos que ejecutan y dando explicación de lo que reconocen que es una teselación y que elementos tener en cuenta para poder elaborar una de ellas. Se busca por parte del docente que los estudiantes tengan la capacidad de definir los polígonos empleados y decir sus características, explicar los elementos que deben tener en cuenta para reconocer una rotación y una traslación cómo por ejemplo que la rotación requiere un punto de giro y un ángulo de rotación.</i>

### 3.7.5 Actividad # 5

El objetivo general de la actividad es afianzar el manejo de los elementos de trazo y dibujo en la construcción de baldosas teseladas y facilitar los elementos creativos que utilizan los estudiantes para recrear su pensamiento.

Tabla 5 Actividad de Implementación 5

ACTIVIDAD	CREACIÓN DE BALDOSAS
MATERIALES REQUERIDOS	Guías de trabajo con ejemplos de baldosas, Papel blanco, cartulina, lápiz, regla, transportador, pintura, tijeras.
SUBCATEGORIAS	OBJETIVO
<ul style="list-style-type: none"> <li>• PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS</li> <li>• VOCABULARIO GEOMÉTRICO</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconocer el manejo de los elementos de trazo y medida en la construcción de baldosas generadoras.</li> <li>• Apreciar los posibles avances demostrados por los estudiantes en su razonamiento geométrico al elaborar baldosas generadoras empleando el método de deformación de un polígono regular.</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>• INSTRUMENTOS DE TRAZO Y MEDIDA</li> <li>• COMPOSICIÓN</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar algunos de los elementos creativos utilizados por los estudiantes para recrear su pensamiento.</li> </ul>
<b>Fases de aprendizaje</b>	
Fase 1	<i>En primer momento se indaga sobre los conocimientos previos de los estudiantes frente al tema de los polígonos y sus características, al igual que por los elementos de trazo y las teselaciones de manera oral; luego se les pide construir un cuadrado de 5 cm de lado con ayuda de los elementos de trazo y medida sobre una cartulina y que señalen sus partes.</i>
Fase 2	<i>El docente presenta a los estudiantes un modelo de baldosa teselada (pez) y un video explicativo de cómo se realiza (ANEXO 6) que se genera del corte por secciones de un cuadrado y el posterior movimiento de las secciones de la figura; luego se comienza un diálogo con los estudiantes sobre cómo se realizó esta figura; posteriormente se muestra una obra teselada generada a partir de una baldosa (hueso) (ANEXO 7), con la cual se propone que los estudiantes de manera oral expliquen su posible construcción.</i>
Fase 3	<i>En este momento de la actividad el docente presenta el procedimiento para la construcción de baldosas, con el método de la deformación por rotación y traslación expuesto por Gutiérrez (Gutiérrez, 1990), de esta forma se direcciona a los estudiantes para que empleen los elementos de trazo y medida para realizar la construcción de su propia baldosa.</i>
Fase 4	<i>Se propone cómo problema geométrico que cada estudiante cree una baldosa generadora de mosaico, siguiendo el método de deformación por rotación o traslación, se asignan los materiales requeridos para el trabajo cómo son cartulina, tijeras, cinta, regla y transportador; en este momento el profesor limita su ayuda y permite que los estudiantes descubran soluciones creativas al problema, comprobando diferentes hipótesis y formas de solución.</i>
Fase 5	<i>Esta fase se propone finalizado el problema geométrico aquí los estudiantes enseñaran el método empleado para crear la baldosa generadora, se muestran los trabajos realizados por cada estudiante; el docente recopila las explicaciones brindadas y da aportes frente al manejo del vocabulario geométrico y explica los pasos elaborados para llegar a obtener estas construcciones.</i>

### 3.7.6 Actividad # 6

El objetivo de la actividad es construir teselaciones regulares a partir de baldosas generadoras, brindando un espacio para la creación colectiva e individual.

Tabla 6 Actividad de Implementación 6

ACTIVIDAD	CONSTRUYENDO TESELACIONES
MATERIALES REQUERIDOS	Molde de Baldosa generadora, medio pliego de cartulina, papel iris, tijeras, pegante, cinta, pintura, pinceles.
SUBCATEGORIAS	OBJETIVO
<ul style="list-style-type: none"> <li>• VOCABULARIO GEOMÉTRICO</li> <li>• COMPOSICIÓN</li> <li>• MOVIMIENTOS EN EL PLANO</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construir teselaciones regulares a partir de baldosas generadoras, brindando un espacio para la creación colectiva e individual.</li> <li>• Reconocer el grado de apropiación de los estudiantes de los diferentes elementos geométricos y artísticos trabajados.</li> <li>• Identificar elementos de composición artística y manejo del color en las obras realizadas por los estudiantes.</li> </ul>
<b>FASES DE APRENDIZAJE</b>	

---

Fase 1	<i>La primera parte de la actividad está dirigida por el docente y orientada a recordar el recorrido realizado por los estudiantes para llegar a construir una baldosa generadora y una teselación, al igual que los conceptos geométricos trabajados en las actividades anteriores, se organizan grupos de trabajo.</i>
Fase 2	<i>Se propone por parte del docente que los estudiantes corroboren que la baldosa generadora realizada cumple con las condiciones para formar una teselación con el método de traslación por deslizamiento (Gutiérrez, 1990) de esta manera la baldosa tuvo que surgir de un polígono regular, debe tener mínimo una deformación por rotación o deslizamiento, y puede ser encajada al trasladarla con un deslizamiento; luego de las baldosas que cumplen la condición escogen una baldosa por grupo.</i>
Fase 3	<i>La explicación del tema y revisión del vocabulario geométrico empleado se realiza de manera constante en la fase una y dos de esta actividad.</i>
Fase 4	<i>Los estudiantes desarrollan el problema de la construcción del teselado, e incorporaron en él elementos propios del arte plástico como son el empleo de diferentes materiales, texturas, colores y la composición de la obra en cuanto a la dirección y posición de cada teselado, de esta manera cada grupo de trabajo tiene la libertad de crear una obra distinta a las demás, generando diálogos al interior del grupo y aclarando los conceptos con los compañeros.</i>
Fase 5	<i>Se propone la socialización de las obras realizadas y la explicación por parte del grupo de cómo fue el proceso de elaboración, desde la construcción de un polígono, sus características, la creación de baldosa, la generación del teselado y el uso de los materiales de trazo y medida; esto permite al docente afianzar los conceptos y aclarar las dudas que quedaron en los estudiantes.</i>

---

## **4. RESULTADOS Y ANALISIS DE LA INFORMACIÓN**

### **4.1 Análisis de la información**

A continuación se presentan los resultados obtenidos en las actividades implementadas en el aula de clase, de esta forma se interpretaron los resultados obtenidos en relación con las categorías planteadas por la investigación cómo fueron la visualización geométrica y la contemplación artística; de igual manera de acuerdo a los resultados presentados en la prueba diagnóstica se clasificaron a los estudiantes en uno de los niveles de Van Hiele cómo se observa en la caracterización de la población, de esta manera se observaron las dificultades presentadas en los aspectos que contempla cada nivel y en qué medida lograron afianzar su razonamiento geométrico y superar las dificultades iniciales. El procedimiento llevado a cabo para la organización de los datos y su posterior análisis fue la triangulación de la información, basado en matrices que apuntaron a reconocer avances de los estudiantes con relación a la visualización geométrica y las subcategorías planteadas y con respecto a la contemplación artística y sus subcategorías de acuerdo al desarrollo y ejecución de cada una de las actividades propuestas. Una vez realizado el test de entrada y haber obtenido un horizonte inicial, se implementaron las actividades planteadas en la investigación, sobre estas se pudieron analizar los siguientes aspectos:

### **4.2 Actividades implementadas**

#### **4.2.1 Actividad 1 El cuento de los polígonos**

La actividad se desarrolló en tres sesiones de trabajo de acuerdo a las temáticas trabajadas, estas se analizan a continuación:

#### **Sesión 1**

La primera de estas sesiones de trabajo propuso la elaboración de moldes en cartulina de cada uno de los polígonos regulares básicos (triángulo, cuadrado, pentágono y hexágono), empleó para ello

los materiales de trazo(regla y transportador), lo cual requirió abordar y explicitar el manejo de estos elementos y sus unidades de medida por parte del docente; de igual forma se analizan y dan a conocer las propiedades de los polígonos regulares presentados, elementos que deben tener en cuenta los estudiantes para su posterior elaboración. Esta actividad fue planteada para fortalecer aspectos del **Nivel 2** de razonamiento geométrico de van hiele explicitado por Gutiérrez:

“Los estudiantes se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal” (Gutierrez & Jaime, 1990)

Las dificultades presentadas por los estudiantes en la sesión 1 de la primera actividad fueron el poco conocimiento de los elementos y propiedades de los polígonos donde el 20 % de los estudiantes lograron definir un polígono de manera correcta, estas repuestas se observan en las observaciones de intervención, cómo un ejemplo de ello se menciona la voz de un estudiante cuando dice: “una figura cerrada formada por líneas rectas que tiene varias partes cómo lados y ángulos”; esto permite observar que existe un acercamiento al tema propuesto, el resto de ellos el 80 % no consiguieron definir el término de polígono, algunos de los estudiantes explicaron el término con frases referentes a otros objetos cómo “es parecido a un triángulo”; un resultado parecido surge cuando se les pide señalar los vértices , ángulos y lados del cuadrado y el triángulo.

A continuación se cita uno de los diálogos iniciales de los estudiantes donde se reconocen las dificultades al reconocer los elementos que constituyen un polígono:

- profesor: Muestra una ficha (cuadrado) ¿qué figura están observando?
- estudiante 1: un cuadrado
- profesor: ¿puedes mencionar algunos de sus elementos o características?
- estudiante 2: tiene 4 lados, es de color azul

- profesor: ¿puedes identificar sus lados y sus ángulos?
- estudiante 1: los lados son las líneas rectas, los ángulos son... estos (señala los vértices de la figura)
- profesor: pueden mencionar ¿qué clase de ángulos tiene este polígono?
- estudiante 2: tiene 4 ángulos puntiagudos
- estudiante 3: tiene ángulos rectos

Sobre los materiales de trazo también se presentaron muchas imprecisiones iniciando por el nombre del transportador, al cual lo denominaron “circulo” o “escuadra”; sobre las unidades de medida el 20% de los participantes identificaron que el transportador utiliza la medida en grados y se usa para medir los ángulos, sobre la regla el 75 % de los estudiantes distinguen los centímetros y milímetros en ella, pero son imprecisos en explicar cómo se emplea y ubica de manera correcta para realizar las medidas; de esta manera se presentó que algunos estudiantes, el 20% colocaban la regla al revés, impidiendo la medición de las semirectas, un porcentaje más elevado el 40% realiza lo mismo con el transportador; otra dificultad presentada por los estudiantes fue la lateralidad ya que al darse indicaciones para ubicar la regla al lado derecho o izquierdo del material de trabajo los niños la ubicaban al lado contrario. Al finalizar la intervención el 80 % de la población explica cómo utilizaron la regla y el transportador para elaborar las figuras y emplean en su descripción las unidades de medida, grados y ángulos; el resto de ellos el 20 % sólo menciona que utilizaron la regla y el transportador, sin explicar cómo los emplearon para la construcción.

Frente a esta categoría de instrumentos de trazo se cita un dialogo realizado a un estudiante que logro realizar la tarea propuesta y que permite reconocer el avance frente a las unidades de medida y empleo correcto de estos materiales:

- profesor: ¿puedes Enséñame como hiciste para realizar la figura?



- estudiante 1: “Cogí el transportador, lo ubique y lo empecé a medir hasta 120 y luego los unía con la regla...”
- profesor: muy bien ¿Y luego?, ¿Cómo hiciste esta línea? (señalando uno de los lados superiores de la figura)
- estudiante 1: “Cogí el transportador así “(ubica el transportador en el vértice indicado) “y luego volví a medir hasta 120 y así”.

Después de llevar a cabo la actividad 1 se pudo reconocer que en lo referido a los instrumentos de trazo y medida el empleo directo y manipulación de los materiales de trazo permitió la familiarización de los estudiantes con estos implementos y corregir su uso, lo que pone en evidencia que solo la teoría de clase no es suficiente para que los niños comprendan la manera correcta de usar los implementos y su función en construcciones geométricas.

Sobre la categoría de las propiedades de los polígonos se evidenció después de implementar la actividad 1 que los estudiantes mejoraron el reconocimiento de las partes de los polígonos, ya que al iniciar la construcción el 33% de los estudiantes reconocía y ubicaba correctamente elementos como lados, ángulos, vértices siguiendo las instrucciones dadas de manera correcta; el resto de estudiantes requirió un mayor apoyo y explicación de cada paso a seguir y de los elementos que conforman los polígonos, al finalizar la actividad y proponer la fase de orientación libre la mayoría de los estudiantes logran elaborar correctamente el hexágono propuesto, sólo el 27 % de los participantes no lograron realizar un polígono regular, se equivocaron en el uso del transportador realizando errores como colocarlo al revés impidiendo la medición, no ubicar el punto inicial del transportador sobre el segmento correcto de la figura, medir en dirección contraria a donde se deseaba trazar el ángulo, generando fallos en la elaboración del polígono.

Las imágenes 12 y 13 muestran a los estudiantes construyendo los polígonos regulares empleando para ello los materiales de trazo la regla y el transportador, lo que permite evidenciar la superación de dificultades con estos instrumentos, realizando un uso adecuado de ellos para trazar rectas y ángulos de diferentes medidas; de igual manera se afianzan los conceptos de ángulos, vértices y lados de cada figura al poder identificarlas y resaltarlas en cada molde realizado.



*Imagen 12 Construcción de polígonos*



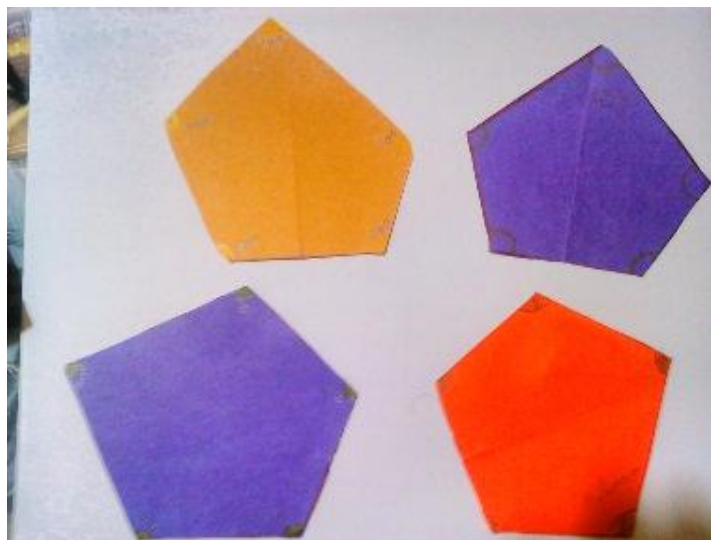
*Imagen 13 Construcción de polígonos*

Sobre la categoría de comparación de polígonos se pudo observar que el 93% de los estudiantes identificaron los polígonos mal elaborados y pudieron reconocer los ángulos, lados y vértices que conforman los polígonos, estos mismos estudiantes se aventuran a explicar de dónde proviene el nombre de cada polígono presentado; el estudiante que no logro identificar los polígonos regulares nombra a los vértices como “verticales” y todavía no hace conjeturas sobre el nombre de los polígonos al identificar el número de lados y ángulos.

Al finalizar la sesión propuesta el docente reúne a los estudiantes y realiza la exposición de trabajos a medida que se muestran los diferentes moldes realizados, el docente investigador realiza preguntas dirigidas a abordar los conocimientos trabajados, aclarando dudas y cerrando de esta manera la sesión; de esta forma surge algunos diálogos que permiten dar cuenta de la apropiación del tema por parte de los estudiantes:

- profesor: deja a un lado este molde y toma otro, ¿Qué figura es esta?
- estudiante 2: “Un cuadrado”
- profesor: ¿Por qué será un cuadrado?
- estudiante 2: “Porque tiene cuatro lados”
- estudiante 3: “y tiene 4 ángulos”
- profesor: ¿cuántos ángulos tiene un cuadrado?
- estudiante 4: “cuatro... en cada esquina” (señala con el dedo las esquinas de la figura)
- estudiante 5: “tiene ángulos rectos”
- profesor: ¿Cuánto mide un ángulo recto?
- estudiante 3: “¿8 grados?”
- estudiante 2: “¿15?”
- estudiante 4: “5 centímetros”
- estudiante 5: “90 grados”
- estudiante 3: “además tiene 4 verticales”
- estudiante 5: “no, no son verticales son vértices”

La imagen 14 muestra las figuras seleccionados por los estudiantes como polígonos regulares mal ejecutados y sobre los cuales explican los posibles fallos presentados en su elaboración, cómo se puede reconocer en el dialogo citado a continuación:



*Imagen 14 Moldes mal contruidos*

- estudiante 1: Este pentágono quedo torcido porque el niño no midió bien con la regla, este lado quedo más largo.
- estudiante 2: el pentágono me quedó mal hecho, me parece que me confundí midiendo los ángulos, se me torció el transportador.
- estudiante 3: mi figura quedó torcida porque corte por la línea que no era, me equivoque y después el profe me explicó pero no borre la primera línea y corte por donde no era.
- estudiante 4: ese hexágono quedó mal hecho no es un polígono regular, sus lados y ángulos no son iguales.
- estudiante 4: “profe mi triangulo no está con todos los lados iguales, me quedo torcido, no me sirve” (el niño se observa midiendo con la regla cada uno de los lados)
- estudiante 3: “profe mi pentágono no quedo como era esta chueco, los ángulos no son iguales” ( el estudiante tiene en la mano el transportador y mide varios de los ángulos de la figura)
- estudiante 5: “mi cuadrado quedo mal recortado tiene los lados mordidos”

A pesar de las imprecisiones que van surgiendo se pudo observar cómo los estudiantes se van familiarizando con el lenguaje geométrico y con el uso adecuado de los elementos de trazo, se logra al

final de la sesión que todos elaboren sus polígonos y que ellos mismos se dieran cuenta de cuáles de estos no fueron bien contruidos, explicando sus respuestas. Esto puso en evidencia que el 60% de los estudiantes, lograron emplear un vocabulario geométrico más acertado, lo que permite identificar términos como “semirecta, ángulos, vértices” utilizados para describir los polígonos.

## **Sesión 2**

Después de llevar a cabo la sesión 2 de la actividad 1 se observa que con relación a la categoría de movimientos en el plano, existe un diálogo constante de los estudiantes y un intercambio de ideas sobre la mejor manera de llevar a cabo el ejercicio de teselar el plano con polígonos regulares, el 80 % de los estudiantes emplean los conceptos de rotación y traslación para explicar los movimientos que se ejecutan, de igual manera explican cómo tienen en cuenta la posición de la figura y la comparación de los giros de los vértices para identificar si realizan una rotación con los polígonos; el 20 % de los estudiantes no reconocen bien los movimientos realizados con los polígonos a todos les denominan traslación, por lo cual requieren del docente nueva explicación y ejemplo, se aborda la explicación indicando que deben comparar los vértices de la figura y su ubicación final para determinar si está realiza una rotación o una traslación, de esta manera logran identificar de mejor manera estos movimientos. Los estudiantes llegaron a la conclusión después de colocar varios polígonos, que el mismo polígono utilizado (triángulo) al ejecutar una rotación podría cumplir la regla de teselar el plano, siguiendo de nuevo la traslación horizontal para completar el ejercicio.

Los diálogos sugieren un mejor manejo del lenguaje geométrico por parte de los estudiantes y la búsqueda de soluciones diversas a un problema planteado, se observa que el 60 % de los estudiantes se esfuerzan por utilizar un vocabulario geométrico adecuado y comprenden los movimientos de rotación y traslación en la actividad propuesta, el 40 % de los estudiantes siguen explicando los movimientos de manera no formal con frases como:

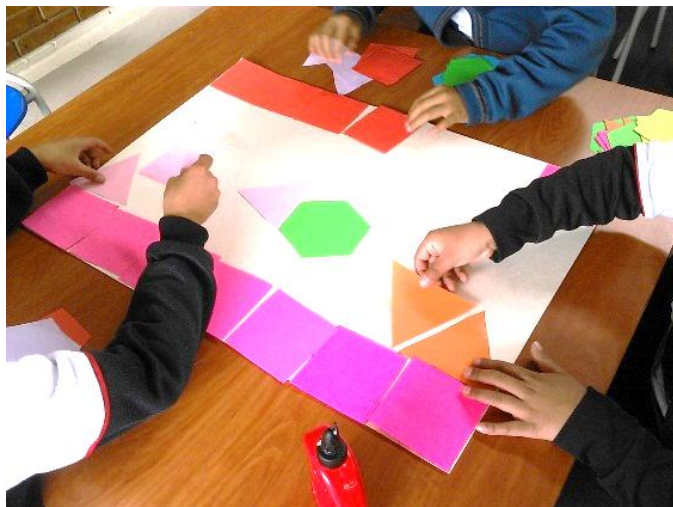
- estudiante 1: “moví la figura hacia arriba”

- estudiante 2: “le di la vuelta al triángulo”

Por lo cual el docente emplea más tiempo y ejemplos no solo de manera gráfica sino también con figuras y objetos concretos como fichas y moldes de polígonos con estos estudiantes, corrigiendo el empleo de los términos utilizados.

En la imagen 15 se puede observar cómo los estudiantes realizan los movimientos de rotación y traslación de los diferentes polígonos y generan un diálogo para reconocer la mejor manera de teselar el plano. En la imagen 16 y 17 se puede identificar cómo los estudiantes encuentran que el cuadrado en traslación y el triángulo en rotación pueden teselar el plano de manera uniforme y los emplean para cubrir el plano, se cita el diálogo de los estudiantes que permite observar todos estos elementos:

- Estudiante 1: “Para teselar vamos a colocar solo cuadrados, es más fácil”
- Estudiante 2: “No, queda muy simple, mejor combinemos los triángulos y pentágonos”
- Estudiante 3: “Pero no ve que no tienen la misma forma y los ángulos son diferentes, no creo que se pueda.”
- Estudiante 4: “Intentemos, mire, colocamos un triángulo, por un lado plano y le ponemos otro al lado.”
- Estudiante 1: “Haaa, si, no quedaron espacios; lo que no vamos a poder colocar son los pentágonos, no encajan, quedan unos espacios en blanco.”



*Imagen 15 Teselando el plano*

Otros diálogos sugieren que se comienzan a encontrar relaciones entre las figuras para cumplir con el objetivo:

- profesor: ¿Por qué creen que les quedan espacios en blanco?
- estudiante 1: “Porque nos faltan fichas”
- estudiante 2: “ya rotamos y trasladamos algunos pentágonos y no nos sirven”
- estudiante 3: “los hexágonos son muy grandes y no encajan, necesitamos otra figura”
- profesor: ¿Qué polígono creen que les hacen falta?
- estudiante 2: “Unos triángulos, pero no los equiláteros”
- profesor: ¿si no tenemos más triángulos y los pentágonos no encajan, que otra figura podríamos usar?
- estudiante 3: “Unos cuadrados, pero no nos alcanzan”
- estudiante 1: “Pidámosle prestados a los niños del lado, y se los cambiamos por los pentágonos y hexágonos.”



*Imagen 17 Teselando el plano*



*Imagen 16 Teselando el plano*

### **Sesión 3**

En esta sesión se presentaron dificultades como el no entendimiento de algunas indicaciones debido al uso del lenguaje geométrico, por esta razón se deben leer varias veces la instrucción para que los estudiantes entiendan que figura deben dibujar y más aún, la posición o movimiento que debe realizar.

En la categoría de movimientos en el plano se observa que los estudiantes presentan confusión en la lateralidad, los estudiantes no reconocen fácilmente lado derecho e izquierdo, se debe pedir constantemente: que levanten la mano derecha para ubicar la dirección correcta o que tomen como referencia un punto específico del plano que están empleando; en el momento de trabajar en grupo se reconocen diálogos que permiten observar cómo los estudiantes confrontan sus ideas y aclaran dudas frente a los polígonos empleados, de igual manera se reconoce cómo encuentran en el color y en la composición artística elementos importantes para plasmar sus gustos y preferencias.

Al realizar la socialización de obras los estudiantes nombraron algunas propiedades de los polígonos trabajados como su cantidad de lados, ángulos o medida de sus ángulos, lo cual facilitó reconocer el grado de apropiación frente a la temática propuesta al identificar los diferentes polígonos a dibujar y ejecutar con ellos algunos movimientos de rotación y traslación, esto sirvió para identificar dificultades en cuanto al reconocimiento de los polígonos al igual que algunos movimientos en el plano



y su posible ejecución, de esta misma forma analizar los elementos que desde la instrucción del maestro presentaban dificultad para los estudiantes. A continuación la imagen 18 muestra el producto final esperado luego de leer el cuento y dos ejemplos de los dibujos realizados por los estudiantes imágenes 19 y 20, donde se evidencian algunas dificultades para reconocer los polígonos empleados y otras falencias relacionadas con lateralidad y dirección de los movimientos.

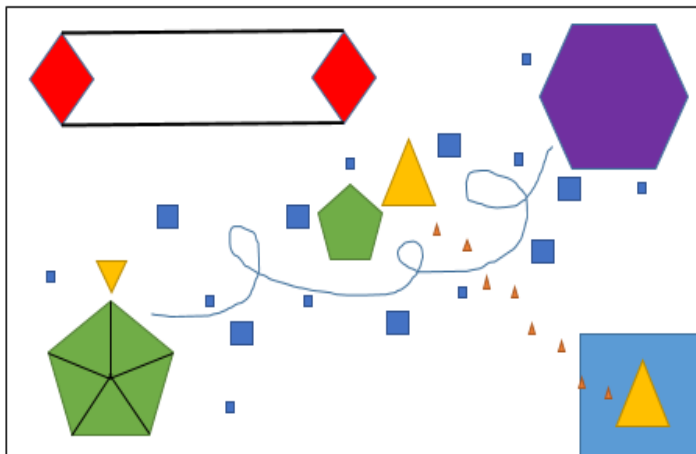


Imagen 18 Dibujo esperado



Imagen 19 Dibujo realizado por estudiantes 1

Se cita un diálogo que permite observar la apropiación de los estudiantes frente al tema, cuando responden a las preguntas del profesor que indaga sobre las características de los polígonos trabajados:

- estudiante 1: “los polígonos tienen lados rectos”
- estudiante 2: “también tienen ángulos”
- profesor: ¿Cómo podemos reconocer si estas figuras son polígonos regulares?
- estudiante 3: “porque sus lados y ángulos miden lo mismo”
- estudiante 4: “sí, los podemos medirlos con regla y transportador”
- estudiante 1: “los ángulos del triángulo miden 60°”
- profesor: ¿qué movimientos en el plano pueden realizar con estos polígonos?
- estudiante 3: “podemos trasladarlos, así” (toma un cuaderno y muestra con un movimiento horizontal como entiende la traslación)

- estudiante 2: “y también se pueden rotar”
- estudiante 4: “sí, cuando le damos la vuelta” (el niño con el esfero en la mano describe la rotación)



*Imagen 20 Dibujo realizado por estudiantes 2*

#### **4.2.2 Actividad 2 Reconociendo polígonos**

Después de llevar a cabo la implementación de la actividad se pudo analizar los resultados obtenidos de la siguiente manera: frente a la categoría de visualización geométrica se observa que en el desarrollo de la actividad el 47% de los estudiantes, logran identificar y definir claramente los polígonos presentados en la guía de trabajo, nombrando entre ellos los cuadrados, rectángulos, rombos y nombran entre sus propiedades que son cuadriláteros, otras propiedades que los estudiantes encuentran son los elementos que conforman los polígonos mencionan entre estos los ángulos, lados y vértices; el 63% de los estudiantes, nombran las figuras en general cómo polígonos identificando los cuadrados y rectángulos, pero no tienen claro los componentes de estos para su descripción.

En el aspecto referido a la comparación entre polígonos se identifica que al iniciar la actividad sólo el 7 % de los estudiantes, identifica que un cuadrado es un paralelogramo y brinda cómo razones para sustentar su respuesta que esta figura debe tener dos pares de lados paralelos además de poder clasificar las figuras presentadas en trapecios y trapezoides, explicando cómo tiene en cuenta los lados paralelos de estas figuras para su identificación, el resto de los estudiantes no logra clasificar

claramente las figuras presentadas entre los paralelogramos, los trapecios y trapezoides, ni reconoce claramente estos conceptos, la mayor dificultad se presentó al diferenciar los trapecios y los trapezoides, ya que la similitud de los términos geométricos genera confusión entre uno y otro por parte de los estudiantes.

Se cita a continuación las voces de los estudiantes frente al concepto de paralelogramo:

- profesor: ¿Qué figuras pueden reconocer en la guía de trabajo?
- estudiante 1: “yo veo cuadrados, rectángulos y.... rombos”
- estudiante 2: “los cuadrados están teselando la guía y los otros están en desorden”
- profesor: ¿qué características en común pueden tener estas figuras?
- estudiante 3: “todos son polígonos, porque tienen líneas rectas, angulas y vértices”
- estudiante 2: “son cuadriláteros todos tienen cuatro lados”
- profesor: ¿de estos cuadriláteros cuál será un paralelogramo? (el profesor pega un ejemplo de cada cuadrilátero en el tablero)
- estudiante 1: “el primero es el paralelogramo”
- estudiante 2: “no el tercero es el”
- profesor: El primero es el paralelogramo bien, y ¿cómo podemos definirlo?
- estudiante 1: “un polígono que tiene dos pares de lados paralelos”
- estudiante 3: “es una figura geométrica”
- estudiante 4: “tiene cuatro lados”

El docente en su intervención lleva a cabo la explicación de la temática, expone algunos ejemplos de cada polígono y permite que por medio de la observación de estas los estudiantes las comparen y den sus aportes frente a las diferencias y características de cada una de ellas. La explicación que brindó el docente y la muestra de las figuras correspondientes a los diferentes cuadriláteros no

garantizó el aprendizaje por parte de los estudiantes, ya que después de la explicación y observar los ejemplos aún se presenta mucha confusión para distinguir los cuadriláteros propuestos, muestra de ello se reconoce al realizarla actividad, pues los estudiantes no clasifican de manera correcta todas las figuras y al explicar las razones de su clasificación estas no corresponden, de esta manera se observa que el 47% de los estudiantes, consiguió realizar correctamente la clasificación y explicación de los cuadriláteros; entre las dificultades que se presentan en el resto de los estudiantes se encuentran la confusión en los conceptos geométricos de trapezoide y trapecio al igual que la no diferenciación de sus propiedades, el impedimento para identificar los cuadriláteros entre una serie de polígonos superpuestos.

Para solventar las confusiones presentadas por los estudiantes frente a los conceptos de paralelogramo, trapecio y trapezoide el docente realiza una explicación de manera individual a medida que los estudiantes desarrollan la actividad lo que facilita en cierta medida un mejor reconocimiento y clasificación de los polígonos presentados, de igual manera el apoyo de los demás estudiantes aporta notablemente a entender mejor los conceptos presentados. Se puede observar cómo los estudiantes van fortaleciendo su razonamiento geométrico sobre los tipos de cuadriláteros y sus características; sus explicaciones cada vez son más apropiadas en cuanto al manejo del vocabulario geométrico, propiedades y clasificación de polígonos, ya que logran reconocer las líneas paralelas de las figuras y con estas logran identificar las diferencias. Algunos estudiantes ven la necesidad de medir las figuras con la regla y el transportador para reconocer de manera clara sus características, la clasificación de los cuadriláteros después de la explicación permitió diferenciarlas más fácilmente, reconociendo visualmente sus características, el 73% de los participantes lograron diferenciar las figuras propuestas; se pudo reconocer cómo el manejo de los instrumentos de trazo ya representa una posibilidad en los estudiantes para llevar a cabo tareas geométricas como la clasificación de los polígonos, esto permite no solo enfatizar la función que cumplen estos instrumentos, sino también practicar su uso.

---

Se identifica en el desarrollo de la actividad cómo el empleo del vocabulario geométrico por parte de los estudiantes se emplea de manera más espontánea; en los diálogos presentados por los participantes para explicar las clasificaciones de los polígonos y sus características emplean conceptos como líneas paralelas, lados, ángulos, polígonos, paralelogramos, trapecios y trapezoides, de tal manera que incluso al realizar intervenciones sin utilizar estos términos los mismos estudiantes corrigen a sus compañeros y le explican los conceptos que se deben emplear para explicar las diferentes propiedades.

Al realizar el componente artístico de la actividad en la cual los estudiantes utilizan diferentes materiales para realizar la composición creativa de la obra se observa cómo el 53% de ellos utilizan en su proceso creativo diferentes materiales, combinando texturas y formas con papel, el 47% de los participantes optan por emplear otros materiales plásticos como son los colores y marcadores, durante la elaboración de la obra los estudiantes resaltan en un primer momento todas las figuras que no se encuentran ubicadas de manera regular en la cuadrícula es decir todos los cuadriláteros, rombos, rectángulos cuadros que están en una posición diferente, lo último que los estudiantes deciden rellenar es el fondo de la obra que se encuentra teselado en cuadrados regulares. Al realizar la exposición de trabajos y el diálogo final con los estudiantes se pueden reconocer aspectos relevantes como los mencionados en las observaciones de intervención, en las que se aprecia la motivación de los estudiantes tanto en la participación como en la elaboración de las actividades, de igual manera los participantes identifican que las obras presentadas se destacan por su colorido y creatividad ya que ninguna se parece a las demás.

Uno de los diálogos de los estudiantes sugiere:

- estudiante 1: “a mí me gusta el trabajo de mi compañero por que utilizo muchas texturas, utilizo, papel crepe, hojas iris, plastilina, miga de tajalápiz y además con el papel crepe hizo formas diferentes”.

- estudiante 2: “las obras están muy bonitas porque tienen colores vivos y claros, se diferencian todas los polígonos”

- estudiante 3: “esta obra (señala una de las presentadas) no me gustó porque el niño no trabajo bien, la dejo sin terminar y está sucia”

Las imágenes 21 y 22 presentan la clasificación de los paralelogramos que realizaron los estudiantes al trabajar en la guía, de igual manera se presenta cómo emplean el material de trabajo para diferenciar los cuadriláteros.



Imagen 22 Reconociendo polígonos

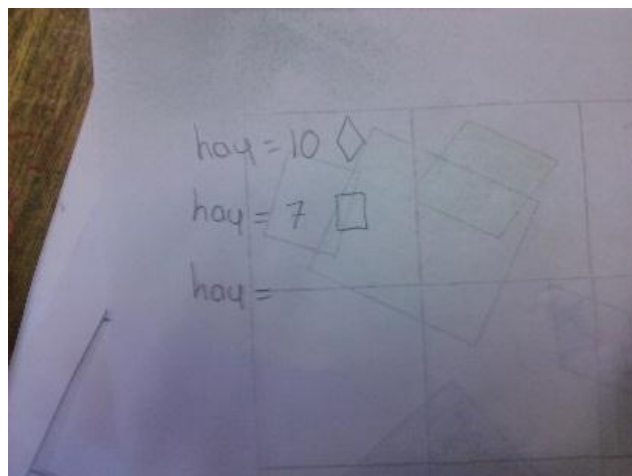


Imagen 21 Reconociendo polígonos

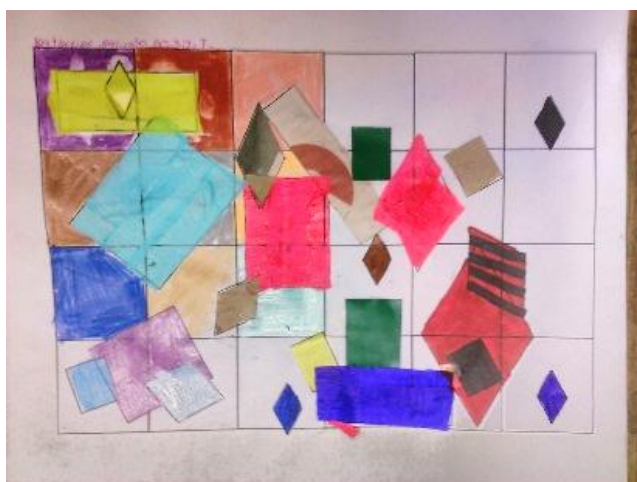
Las imágenes 24 y 25 presentan avances del desarrollo de la actividad, en la cual los estudiantes emplean materiales como colores, marcadores, papel para crear sus composiciones artísticas.



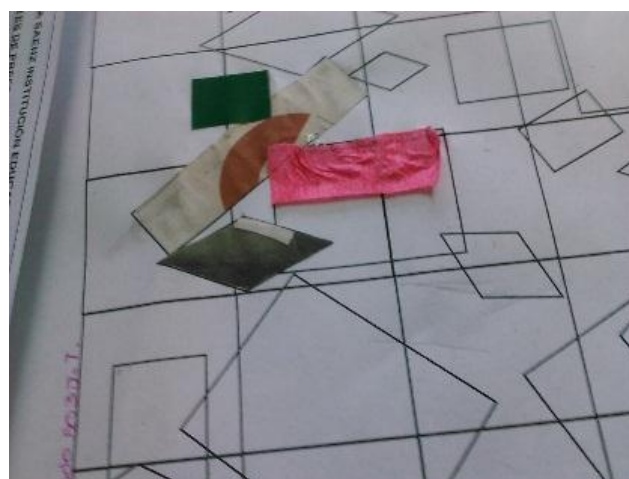
*Imagen 25 Reconociendo polígonos*



*Imagen 26 Reconociendo polígonos*



*Imagen 23 decorando polígonos*



*Imagen 24 decorando los polígonos*

#### **4.2.2 Actividad 3 Moldeando polígonos**

La actividad plantea en un primer momento presentar algunas teselaciones a los estudiantes de esta manera poder abordar con ellos el proceso de visualización geométrica, de tal forma que los participantes puedan dar cuenta del reconocimiento de los polígonos allí presentados y de los movimientos que pueden ejecutar estas figuras para teselar el plano; en la categoría de las propiedades de los polígonos

se puede reconocer que la totalidad de los estudiantes puede reconocer los polígonos triángulo, cuadrado, pentágono y hexágono, realizando un correcto conteo de figuras y reconociéndolas a pesar de su posición invertida o inclinada; al preguntarles sobre cómo identifican y diferencian cada polígono, mencionan cómo elemento principal el conteo de lados y el 33 % de los participantes mencionan que ya no cuentan los lados, sino que al observar la figura la reconocen inmediatamente, lo que permite afianzar que el proceso de visualización geométrica se está consolidando, ya que recurren a las imágenes mentales para identificar los objetos geométricos.

Con respecto a la categoría de los movimientos en el plano, el 73% de los estudiantes explican con claridad cómo los polígonos que conforman el teselado realizan traslaciones y rotaciones en cada situación para completar la obra, al tomarse una de las figuras cómo inicial pueden mencionar cuáles han rotado y trasladado su posición además de dar indicaciones concretas de la dirección a la que se realiza el movimiento, arriba, abajo, diagonal derecha, etc. El resto de los estudiantes aún requiere apoyo del docente para explicar los movimientos y el apoyo de los compañeros para explicar el movimiento realizado por las figuras.

El manejo del lenguaje por parte de los estudiantes es mucho más claro, se identifica que el 73% de los estudiantes, se encuentra en la capacidad de emplear los conceptos geométricos de rotación, traslación, teselación, polígono para explicar cómo está conformada la teselación y los movimientos en el plano que realizan los diferentes polígonos para completar la obra, los 4 estudiantes que aún presentan dificultad lo hacen en el manejo de los conceptos de rotación y traslación.

A continuación se cita un diálogo realizado en clase que puede brindar aportes frente al manejo del lenguaje de los estudiantes:

- profesor: ¿Qué procedimiento utilizaron para moldear los polígonos?



- estudiante 1: “los aplanábamos y luego los mediamos con la regla y cortábamos la plastilina”
- profesor: ¿cómo hicieron para saber si eran polígonos regulares?
- estudiante 1: “primero debíamos mirar si eran regulares, midiendo sus lados y ángulos”
- estudiante 2: “porque todos sus lados y ángulos debían ser iguales”
- estudiante 3: “si, todos los ángulos de un polígono debían ser iguales agudos, rectos y...”
- estudiante 4: “obtusos”
- profesor: ¿Qué movimiento en el plano realizaron con los polígonos para poder formar la teselación?
- estudiante 4: “los movimientos de rotación y traslación”
- estudiante 2: “la rotación es cuando tomamos un polígono y lo giramos sobre un punto”
- estudiante 3: “si, tomamos un vértice y giramos la figura”
- profesor: y ¿Qué será entonces el movimiento de traslación?
- estudiante 1: “ya no rotamos la figura, sino que la llevamos de un lado al otro sin girarla”
- estudiante 2: “si tenemos que mantener cómo la dirección de la figura y cambiarla de lugar”

El empleo y uso de los materiales de trazo y medida fue fundamental en la actividad pues los estudiantes reconocen que la elaboración de polígonos regulares requiere cumplir con algunas propiedades y para ello deben emplear medida de lados y ángulos, se reconoce cómo el 100% de los participantes utiliza de manera adecuada estos instrumentos lo que permite realizar los moldes de manera adecuada, además el empleo de estos instrumentos se realiza de manera espontánea, ya que el docente no puso cómo condición el empleo de estos, fue la decisión de los estudiantes emplear estos instrumentos en la elaboración de los polígonos.

En cuanto a la categoría de contemplación artística, se observa que el empleo de la plastilina para moldear los diferentes polígonos es un elemento motivador para los estudiantes, lo que permite que estén

más atentos a las explicaciones y empleen los materiales de trazo y medida para la elaboración de las teselaciones, se observa en la intervención que todos los participantes, están dispuestos a manipular la plastilina y seguir las instrucciones del docente, esta actividad brindó aportes significativos a los aspectos sensibles y expresivos del arte, pues los estudiantes comprenden las formas geométricas a través del tacto y refuerzan las características propias de cada polígono al elaborar sus elementos. La imagen 27 muestra la elaboración de un triángulo en plastilina que es una de las baldosas que emplean los estudiantes para la posterior construcción de la obra teselada.



*Imagen 29 Moldeando polígonos*



*Imagen 27 Modelando Polígonos*



*Imagen 28 Moldeando Polígonos*

Se observa cómo el problema planteado requiere no solo conocimientos geométricos sino también artísticos, que permiten que los estudiantes experimenten diferentes formas de moldear la plastilina y combinar sus colores, se observó no solo motivación y participación de la actividad sino mucha creatividad; las imágenes 28 y 29 presentan en el desarrollo de la actividad diferentes formas de resolver

el problema presentado, en la imagen 29 los estudiantes teselan el plano y dibujan la teselación, luego la decoran de manera creativa creando formas con la plastilina, la imagen 30 muestra que los estudiantes decidieron hacer los moldes de los polígonos de manera separada y luego los incorporaron a la obra, en la imagen 31 el procedimiento fue parecido pero los estudiantes deciden esparcir la plastilina y combinar colores,



*Imagen 30 Moldeando polígonos*

#### **4.2.3 Actividad 4 Rompecabezas teselados**

En el desarrollo de la actividad se puede reconocer cómo el empleo de ayudas multimedia en este caso videos e imágenes (ver anexo 5), favorecen en los estudiantes el profundizar la visualización geométrica lo que les permite comparar diferentes polígonos, permitiéndoles identificar patrones en las teselaciones, de esta manera desde su propio uso del lenguaje geométrico intentan definir una teselación cuando mencionan: “Es cómo el piso, son cuadrados o polígonos regulares que se repite muchas veces”, “además hay teselaciones regulares e irregulares”, de esta manera se encuentra que el 73% de los estudiantes, tienen claridad frente a lo que es una teselación y encuentran que existen unas figuras geométricas que permiten generarlas.

Se cita un dialogo que permite reconocer los avances frente al concepto de teselación:

- profesor: después de ver los videos y el ejemplo que allí se observaron ¿qué podemos decir que es una teselación?
- estudiante 1: “Es como el piso, son cuadrados, un polígono regular que se repite muchas veces”
- estudiante 2: “es un polígono regular que se copia varias veces y se va trasladando”
- estudiante 3: “además hay teselaciones regulares e irregulares”
- estudiante 4: “y también debemos recordar que no pueden quedar espacios en blanco”

En cuanto a las propiedades y comparación de los polígonos se identifica que todos los estudiantes pueden reconocer los polígonos presentados en la guía de trabajo, indicando su nombre de acuerdo a la cantidad de lados que este poseen, 13 de ellos pueden además brindar características cómo los ángulos que lo conforman, la ubicación de los vértices y se aventuran a explicar cómo pueden realizar las teselaciones presentadas.



*Imagen 32 Armandó teselaciones*



*Imagen 31 Armandó Teselaciones*

En relación a los movimientos en el plano los estudiantes comienzan a explicar los movimientos que ejecuta cada una de las figuras en la conformación de una teselación, de esta manera construyen teselados y explican con un vocabulario geométrico apropiado su elaboración; en la imagen 31 la estudiante construye una teselación y explica con sus palabras cómo reconoce la rotación que ejecuta un triángulo y argumenta: “en el primer triángulo la base esta horizontal y uno de sus ángulos está hacia arriba y ahora en el segundo triángulo ese mismo ángulo está hacia abajo, porque giro sobre uno de sus ángulos”.

En la imagen 32 el estudiante reconoce los movimientos de rotación y traslación que ejecuta el triángulo e identifica un patrón a seguir en la teselación y menciona: “puedo teselar todo el plano si se repiten la misma combinación de figuras muchas veces, trasladándola de un lado a otro”



*Imagen 33 Construyendo teselaciones*

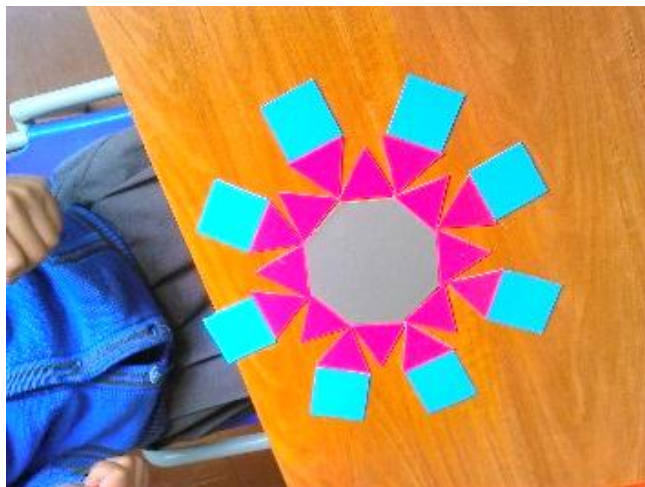
En el manejo del lenguaje geométrico se identifica que todos los estudiantes emplean conceptos como polígonos, ángulos, lados, rotación y traslación para explicar cómo está compuesto una teselación y dar cuenta de su elaboración; esto permite reconocer un mayor grado de apropiación y razonamiento geométrico, ya que mencionan características de los polígonos para diferenciarlos y ya no los comparan

con figuras cotidianas que era una de las características del nivel 1. Sobre la explicación de cómo conformar una teselación uno de los diálogos de los estudiantes menciona:

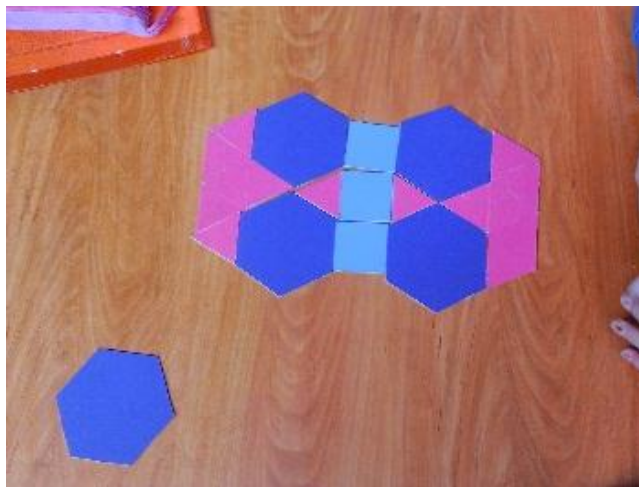
- estudiante 1: “se necesitan polígonos regulares para que se pueden encajar con otros y formar una teselaciones”
- estudiante 2: “pero toca reconocer cuales nos sirven, porque no todos encajan para hacer teselaciones”
- estudiante 3: “si depende de los ángulos y el tamaño de la figura”
- estudiante 4: “podemos tomar varios polígonos y compararlos a ver con cuales podemos teselar el plano, porque no pueden quedar espacios vacíos”

De esta manera comienzan a comprender que deben existir unas condiciones para que la teselación efectivamente se cumpla. La imagen 34 muestra la teselación que construyó el estudiante al mismo tiempo que explica a sus compañeros cómo la efectuó, lo que se evidencia en el diálogo anterior.

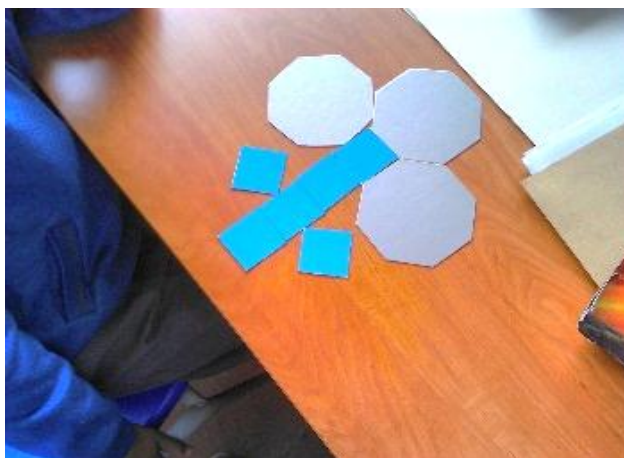
Con referencia a la contemplación artística se da un momento de composición libre en la cual los estudiantes pueden crear sus propias obras utilizando las fichas presentadas y en esta misma composición logran combinar los colores para resaltar diferentes aspectos de su elaboración, en este momento surgen diversidad de creaciones en las cuales los estudiantes logran explicar su construcción empleando los conceptos geométricos de rotación y traslación al igual que resaltar similitudes entre figuras, ritmos de la obra y dar aportes cómo: “me gusta el sol (imagen 35), porque parece que los polígonos estuvieran en movimiento”, “a mí me gusta esta teselación (imagen 36) porque se ve más estable y fuerte, me gusta cómo resaltan los hexágonos”. En las imágenes 35, 36 y 37 se observan resultados del proceso de composición artística elaborados por los estudiantes.



*Imagen 34 Construcción libre*



*Imagen 35 Construcción libre*



*Imagen 36 Construcción libre*

La socialización de las obras permite reconocer cómo los estudiantes argumentan si las creaciones cumplían o no con las condiciones de un teselado, el 86 % de los estudiantes, brindan aportes cómo:

- estudiante 2: “un teselado es ocupar un espacio asignado con diferentes polígonos”
- estudiante 1: “donde no se superponen las figuras”
- estudiante 3: “ni quedan espacios en blanco”

El resto de los estudiantes solo mencionaron que un teselado consistía en “utilizar polígonos en una superficie para llenarla”; por otro lado los estudiantes explican con los movimientos de rotación y traslación empleados para su creación, de esta forma el 80 % ellos, explican la rotación cómo

- estudiante 1: “la rotación es la inclinación de la figura original sobre un punto”

Los estudiantes además señalan el punto de giro empleado en las figuras para explicar los ejemplos dados por ellos mismos, además de mencionar que para la traslación “la figura no se debe girar”, el otro 20% explican la traslación cómo “mover de un sitio a otro la figura” y para la rotación señalan el movimiento con las fichas sin llegar a una explicación concreta. El empleo de las teselaciones en la integración de la contemplación artística y la visualización geométrica ayudó a los estudiantes a integrar elementos de ambos pensamientos, de esta manera los estudiantes adquirieron la habilidad para reconocer las baldosas generadoras de un mosaico de acuerdo a las características que presenta e identificar sus movimientos en el plano teniendo en cuenta elementos cómo la ubicación de sus vértices e inclinación del objeto.

Las imágenes 38, 39 y 40 presentan algunas de las obras de creación libre elaboradas por los estudiantes y las cuales permitieron que ellos apropiaran de mejor manera los conceptos de rotación, traslación y teselación.

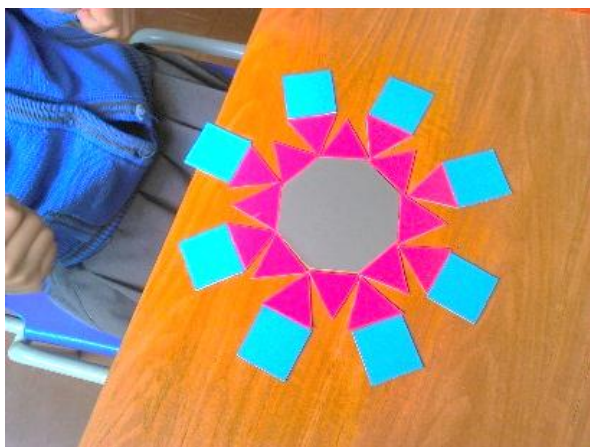


Imagen 38 Construcción libre

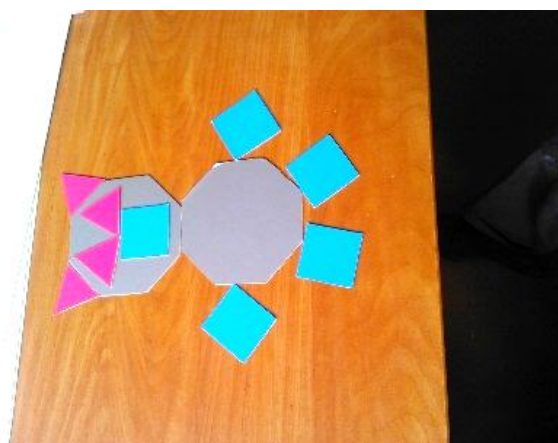


Imagen 37 Construcción libre

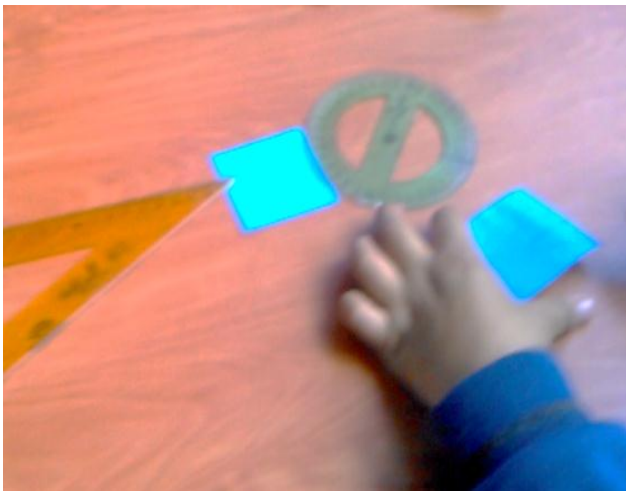




*Imagen 39 Construcción libre*

#### **4.2.4 Actividad 5 Creación de baldosas**

Al llevar a cabo la implementación se pueden analizar los siguientes resultados: con relación al manejo de los instrumentos de trazo se encuentra que la mayoría de los estudiantes manejan de adecuadamente la regla y el transportador 87% de los estudiantes, demuestran la capacidad de realizar la actividad sin necesidad del apoyo del docente, solo siguiendo las instrucciones de las medidas de los ángulos y los lados para construir un cuadrado, el 13% de los estudiantes aún no ubican bien el transportador, requieren de nuevo la dirección del profesor para medir los ángulos y la longitud de las semirectas para cada polígono, las imágenes 40 y 41 permiten observar el manejo de la regla y el transportador en la construcción de un cuadrado que servirá para crear baldosas generadoras.



*Imagen 40 Construcción de baldosas generadoras*



*Imagen 41 Construcción de baldosas generadoras*

El manejo del lenguaje por parte de los estudiantes es adecuado y lo emplean para explicar cómo se elabora una baldosa generadora, en el ejemplo de la baldosa del pez utilizan conceptos como polígono regular, deformación, giro, rotación, ángulos, entre otros, demostrando comprender de mejor manera estos elementos geométricos existentes, algunos diálogos de los estudiantes refieren:

- estudiante 1: “esta baldosa se realizó con un cuadrado”
- estudiante 2: “se le cortó al cuadrado el ángulo superior derecho”
- estudiante 3: “luego se trasladaron las partes cortadas hacia abajo sin rotar”.

Después de llevar a cabo la actividad 5, al 92% de los estudiantes se les facilitó entender el concepto geométrico de deformación por giro y por traslación explicando luego este método de construcción para crear las baldosas, se reconoce que el 8% de los estudiantes continua presentando dificultades para comprender y explicar la elaboración de la baldosa, aún no manejan un vocabulario geométrico que les permita explicar los conceptos utilizados en la construcción de la baldosa, sin embargo el docente retoma la explicación utilizando un modelo en plastilina y la ayuda de los otros estudiantes para explicar los movimientos y la creación de este molde, luego de este último aporte a los estudiantes con dificultades solo un estudiante continua con deficiencias para explicar el método.

El empleo de materiales adecuados favorece la creación individual, los estudiantes se muestran motivados a la creación de diferentes baldosas a partir del cuadrado y elaboran diferentes moldes de manera creativa sin necesidad de copiar los moldes de los demás, se reconocen en esta etapa que el 71% de los estudiantes lograron elaborar las baldosas correctamente construyendo baldosas que sirven para teselar el plano, el 20 % de ellos no construyeron bien la baldosa, pues se limitaron a recortarle secciones pero éstas no las trasladaron ni rotaron, sino que las eliminaron, por lo tanto las baldosas no sirvieron para el propósito, cómo lo muestra la imagen 42; por otro lado el 9% de los estudiantes no

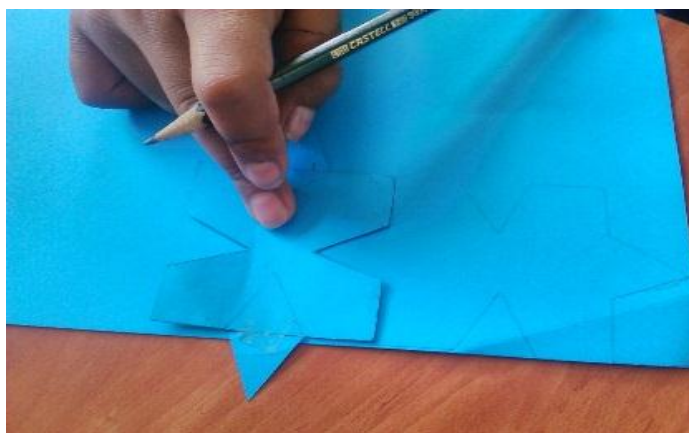
utilizaron ningún método para la construcción, dibujaron en el cuadrado figuras geométricas que no correspondían cómo se observa en la imagen 43, por otro lado la imagen 44 presenta una baldosa generadora que cumple con el método de deformación y con la cual el estudiante verifica su utilidad copiando el molde en una hoja, construyendo la teselación.



*Imagen 44 Baldosas generadoras*



*Imagen 43 Baldosas generadoras*



*Imagen 42 Baldosas generadoras*

Sobre la baldosa generadora los estudiantes demuestran la comprensión del método de construcción con algunos diálogos cómo el siguiente:

- estudiante 1: “realizamos primero un cuadrado, le recortamos algunas partes para deformarla y estas las trasladamos de lugar, se pegaron con cinta y luego la fui calcando y trasladando en la hoja muchas veces”

- estudiante 2: “yo realice un polígono regular, que es el cuadrado que mide 5cm por cada lado y tiene ángulos rectos, luego para hacer la baldosa, recorte algunas formas geométricas y las traslade, las pegue y comencé a calcarla muchas veces en la hoja”

Este tipo de explicaciones permiten reconocer un manejo apropiado del lenguaje y una comprensión del método de construcción.

#### **4.2.5 Actividad 6 Construyendo teselaciones**

Al finalizar la actividad se pudo reconocer cómo en lo manejo del lenguaje los estudiantes demuestran apropiación de los conceptos geométricos y los utilizan de manera correcta para explicar el trabajo realizado, sobre el concepto de teselaciones se cita las siguientes repuestas que mencionan:

- estudiante 1: “son unas baldosas o formas que se repiten muchas veces”

- estudiante 2: “para hacerlas debemos ir trasladando y rotando las piezas, hasta llenar todo el espacio”

Otras repuestas de los estudiantes sobre qué se debe tener en cuenta para hacer una teselación mencionan:

- estudiante 1: “debemos tener primero un polígono regular y realizar con el algunas deformaciones para crear la baldosa generadora, luego se repite muchas veces en el plano”.

Sobre la definición de polígono regular los estudiantes argumentan:

- estudiante 2: “son figuras geométricas cerradas, conformadas por líneas rectas, que además tienen sus lados y ángulos de la misma medida”

- estudiante 3: “Para saber si es un polígono regular debemos usar la regla y el transportador y medirlo”

Cabe destacar que uno de los estudiantes que se ha venido destacando por su bajo nivel de razonamiento geométrico, ya que constantemente requiere apoyo adicional para comprender y ejecutar de manera adecuada las actividades propuestas, demuestra en sus respuestas que ya tiene una apropiación del concepto de polígono y sus partes, menciona sobre estos conceptos:

- estudiante 3: “un polígono es cómo el cuadrado, tiene los lados, ángulos y vértices de la misma medida”.

En lo relativo a la visualización geométrica el 92% de los estudiantes se encuentran en la capacidad de reconocer los polígonos regulares utilizados para generar las baldosas, de igual manera utilizan aspectos relacionados con la comparación de polígonos al identificar las deformaciones que se han realizado al polígono inicial, frente a esto los estudiantes argumentan:

- estudiante 4: “para hacer la baldosa generadora lo que hice fue un cuadrado, donde tuve que medir con el transportador ángulos de  $90^\circ$  y los lados de 5cm, luego con la tijera corte cómo una montaña y un triángulo para deformarlo, los traslade a los lados contrarios, allí se pegó con cinta y listo”

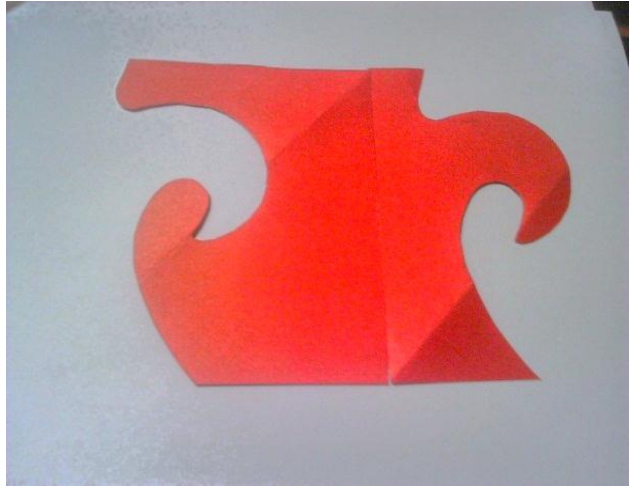
Esta primera baldosa generadora se puede apreciar en la imagen 45, para la explicación de otra baldosa la estudiante argumenta:

- estudiante 2: “este molde de baldosa es todo raro; hice una línea curva que me pareció cómo una hoja en la mitad del cuadrado y luego lo traslade, y lo chévere es que si encaja”

El molde realizado por la estudiante se puede apreciar en la imagen 46.



*Imagen 46 Baldosas generadoras*



*Imagen 45 Baldosas generadoras*

Esta fase permite integrar de manera contundente elementos plásticos ya que una vez calcados los moldes y verificada la manera de construir la teselación empleando el método de traslación por desplazamiento, los estudiantes dedicaron su atención a emplear diferentes materiales plásticos y colores, encontrando en una forma básicas múltiples figuras y objetos desarrollando con ellos elementos creativos, de composición y color cómo se observa a continuación. Las imágenes 47, 48 y 49 muestran el proceso creativo de los estudiantes desde crear la teselación calcando una baldosa generadora (ver imagen 47), hasta su construcción individual (imagen 48) y su posterior encaje para teselar el plano (imagen 49).



*Imagen 48 Construcción de teselados*



*Imagen 47 Construcción de teselados*

Al finalizar el proceso, los estudiantes expusieron sus obras a los demás compañeros y sustentaron algunos elementos básicos en su elaboración cómo los elementos plásticos que emplearon (los colores, materiales, etc.), explicaron los elementos geométricos que utilizaron cómo el polígono a partir del cual se creó la baldosa generadora y su método de construcción, los movimientos que realizó la figura en el plano y si tiene algún significado específico su obra (sentimiento, pensamiento, etc.), aunque se observa que por ser una construcción colectiva, cada baldosa es un medio expresivo de color y pensamiento, de allí su riqueza compositiva.

En las imágenes 50, 51 y 52 se observa una teselación propiamente dicha, siguiendo el modelo de creación de baldosas por deformación y la construcción de teselación por traslación horizontal, de igual manera se puede apreciar los elementos creativos y compositivos empleados por los estudiantes en cada baldosa.



*Imagen 51 Teselaciones*



*Imagen 50 Teselaciones*



*Imagen 52 Teselaciones*

### **4.3 Resultados**

Luego de analizar los datos recopilados a través de las intervenciones de aula, se pueden hallar algunos resultados que brindan soporte a la propuesta de investigación y que dejan ver la pertinencia de la misma, entre estos resultados se pueden mencionar los siguientes:

La estrategia de integración curricular planteada en la investigación facilitó a los estudiantes la comprensión de algunos conceptos geométricos como fueron los polígonos regulares, los movimientos de rotación y traslación y el empleo de los materiales de trazo en su construcción, ya que sus diferentes componentes apuntaron a descubrir los elementos geométrico-espaciales que conformaban una obra, permitiendo que los estudiantes aplicaran sus conocimientos geométricos al interpretar una obra y reconocer su composición.

Por otro lado, en las diferentes actividades de intervención llevadas a cabo se aplicaron elementos artísticos como la contemplación de algunas obras teseladas, esto permitió reconocer cómo estas obras estaban conformadas por diferentes elementos geométricos como fueron las baldosas y que estas ejecutaban algunos movimientos en el plano. Por otro lado la dimensión de transformación



simbólica desde el arte se evidenció en las experiencias plásticas presentadas a los estudiantes por medio de la manipulación de diferentes materiales como el papel, color, plastilina para la creación de sus obras, lo que permitió llevar a la práctica con ayuda de los elementos de trazo y medida los conocimientos adquiridos en cuanto a las propiedades de los polígonos, como son la cantidad de lados, la medida de los mismos y la medida de sus ángulos.

En cuanto a la reflexión y valoración de una obra, los estudiantes se observaron más perceptivos a reconocer el trabajo y creación artística de los compañeros, entendiendo que una obra tiene en su interior elementos conceptuales, intencionales y creativos, que requiere de un trabajo y una elaboración, es aquí donde los conceptos geométricos cobran relevancia ayudando a entender de mejor manera la composición de la obra; esto les permitió dar aportes importantes frente a lo que veían y el cómo se componía una obra de arte teselada, elementos visualizados en la fase de integración en donde se socializaron las obras y actividades realizadas. En el aspecto motivacional los estudiantes manifestaron el gusto de asistir a clase para compartir con los compañeros, trabajar con diferentes materiales plásticos y aprender sobre las temáticas propuestas; esto les permitió demostrar una adecuada disciplina y respeto en clase, valorando en sí mismos y en los demás los momentos de creación y trabajo individual, al igual que los momentos de trabajo grupal y socialización con los compañeros.

La investigación llevada a cabo en el grado 503 de la Jornada Tarde de la I.E.D. Manuelita Sáenz permitió al docente investigador recopilar una serie de evidencias sobre cómo por medio de actividades secuenciadas, planteadas desde la integración curricular entre la geometría y el arte, se puede facilitar el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes, abordando de esta manera las propiedades y características de los polígonos regulares; El diseño de estas actividades permitió por medio de la manipulación de diferentes materiales plásticos adquirir conceptos teóricos de la

geometría al igual que mantener un ambiente creativo y motivante para el aprendizaje en el aula de clase. De igual manera el manipular los polígonos y recrearlos con materiales plásticos, permitió a los estudiantes el desarrollo de habilidades para el manejo de los materiales de trazo como la regla y el transportador, al igual que la comprensión y uso efectivo de unidades de longitud y medida angular, empleando estas para la creación de polígonos regulares; igualmente la creación de baldosas permitió llevar a la práctica los conceptos de rotación y traslación, lo que facilitó y fortaleció la comprensión de los movimientos de rotación y traslación en el plano.

El empleo de las teselaciones en la integración de la contemplación artística y la visualización geométrica ayudó a los estudiantes a integrar elementos de ambos pensamientos, de esta manera los estudiantes adquirieron la habilidad para reconocer las baldosas generadoras de un mosaico y sus movimientos en el plano, de esta forma se pudo observar en la actividad #4, cómo el 80% de los estudiantes intervenidos estuvo en la capacidad de reconocer los polígonos que conforman una teselación conformada por polígonos regulares y reconocer además los movimientos de rotación y traslación que ejecutaron estas figuras. De esta manera se puede identificar el avance de nivel de razonamiento ya que “los estudiantes se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas” (Gutiérrez & Jaime, 1990, p. 308)

Sobre la identificación del sistema generador de baldosas, se observó en la actividad #6 cómo el 92% de los estudiantes estuvo en la capacidad de incorporar en este proceso todos los elementos geométricos referidos al reconocimiento de los elementos de un polígono como son sus lados, vértices, ángulos, el empleo de las unidades de medida e instrumentos de trazo en su construcción, de esta manera identificaron en una baldosa presentada sus características como número de lados, vértices y ángulos, de igual manera emplearon los métodos de deformación por rotación de  $90^\circ$  y traslación para explicar la

elaboración de las baldosas presentadas, llevando a cabo el procedimiento de construcción de baldosas presentado por Gutiérrez (1990).

El empleo de las teselaciones como estrategia didáctica facilitó integrar los conceptos geométricos de los polígonos regulares y el uso adecuado de los instrumentos de trazo y medida, lo que permitió integrar al mismo tiempo la creatividad de los estudiantes como se observó en la actividad #5 donde el 71% de los estudiantes lograron construir sus baldosas generadoras de mosaicos empleando elementos geométricos como fueron los polígonos y algunas deformaciones geométricas de manera creativa elaborando baldosas diferentes y funcionales para construir una teselación. El empleo de las teselaciones para el desarrollo de la dimensión contemplativa del arte permitió fortalecer la creatividad y la valoración de la creatividad del otro, brindó el espacio adecuado para que los estudiantes a partir de una misma baldosa encontraran diferentes soluciones a su expresión creativa encontrando diferentes elementos en cada molde; de igual manera la integración de las baldosas individuales en una obra teselada, les permitió reconocer el valor de la diversidad y creatividad al construir una obra como se observa en la actividad #6, consiguiendo diversas obras de exposición.

Todos estos elementos dieron fundamento a los estudiantes para entender una obra de arte y profundizar en el proceso reflexivo frente a ella, aspecto primordial al que apunta la educación artística, brindando elementos de juicio para que los estudiantes valoran en la elaboración de una obra no solo a partir de su gusto personal del color y la composición, sino ver que cada obra tiene un contenido, una intención y un mensaje, aspecto que se fortaleció al asistir a una exposición artística donde aplicaron los elementos adquiridos para observar las obras expuestas de otra manera, haciendo comparaciones con sus propias creaciones.

Se pudo corroborar por medio de la intervención realizada como los postulados de los Van Hiele referidos a que la edad del estudiante no garantiza el paso de un nivel a otro y que este depende

más de la enseñanza recibida (Gutiérrez, 1990) tiene validez; ya que la edad y el ciclo escolar donde se encontraron los estudiantes seleccionados, no coincidía con su nivel de razonamiento geométrico, cómo lo evidenció el test de entrada, donde se encontró que la mayoría de respuestas, el 75% de ellas hacen referencia al nivel 1 de Van Hiele. A la luz de los niveles de Van Hiele propuestos para la investigación, se pudieron establecer algunos avances que permitieron evidenciar el paso de la mayoría de los estudiantes del nivel 1 al nivel 2; de esta forma, en cuanto al reconocer propiedades de algunos polígonos regulares se pudo observar cómo el 93% de los estudiantes en la actividad # 1 estaban en la capacidad de identificar un polígono irregular entre varios regulares y explicar con sus propias palabras que elemento lo diferenciaba de un polígono regular.

El 73 % de los estudiantes en la actividad # 2, identifican los lados, ángulos y vértices de cada polígono y los tienen en cuenta para su clasificación, además de emplear la regla y el transportador para verificar estas propiedades que les permitirán clasificar los polígonos. En la actividad #1 sesión 2 se pudo reconocer cómo el 80 % de los estudiantes emplean los conceptos de rotación y traslación para explicar los movimientos que se realizan con los polígonos, de igual manera explican cómo tienen en cuenta la posición de la figura y la comparación de los giros de los vértices para identificar si están haciendo una rotación con los polígonos. En esta misma sesión de trabajo se observa cómo el 60% de los estudiantes se esfuerzan por utilizar un lenguaje geométrico adecuado para intercambiar ideas con los demás compañeros, de igual manera utilizan un vocabulario más técnico para referirse a los movimientos de rotación y traslación de las diferentes figuras, de igual manera en las actividades # 4, 5 y 6 los diálogos presentados por los estudiantes sugieren una mayor comprensión geométrica, pues los estudiantes emplean conceptos como medida en grados, ángulos, vértices, rotaciones, traslaciones, deformación por traslación entre otros. Conceptos que son entendidos por los demás en los momentos de socialización.

Es importante reconocer cómo este avance de un nivel a otro no se dio de igual manera para todos los estudiantes, ya que dos de ellos al finalizar solamente lograron identificar los elementos que conforman los polígonos, continuaron presentando equivocaciones en el reconocimiento de los movimientos de rotación y traslación, y su empleo de vocabulario geométrico es muy escaso; por otra parte cinco de los estudiantes se encuentran en un nivel muy superior al resto, demostrando un mejor razonamiento geométrico que les permite no solo emplear un vocabulario geométrico más elaborado sino además, dar cuenta de cómo se construye una baldosa generadora, cómo surge a partir de un polígono regular y además demostraron la habilidad de construir dichas baldosas de manera individual con los elementos de trazo y medida, las cuales fueron empleadas como molde para las obras finales.

Se reconocen algunos elementos de la dimensión contemplativa del arte y la visualización geométrica que emplean los estudiantes cuando se encuentran frente a una obra, como son el reconocimiento de polígonos, simetrías, ritmos, movimientos de los objetos en el plano y secuencialidades que hacen parte de la estructura de la obra, empleando para ello no solo elementos perceptivos para describir lo que observan sino que además emplean su razonamiento geométrico para reconocer los polígonos regulares y los movimientos de rotación y traslación en el plano; de este modo, los estudiantes que se encontraban en el nivel 1 de razonamiento geométrico el 75% al comenzar la investigación, no podían captar los elementos de composición de una obra artística, es decir que su percepción no iba más allá de percibir colores de la obra y reconocer elementos como casas, cometas, etc. Esto se pudo corroborar al analizar las obras de arte teselado, donde los estudiantes describen las obras basados en los colores y formas que le son familiares, dos de ellos correspondientes al 13% después de la intervención realizada continúan sin presentar mayor avance en este tema identificando algunos polígonos. Por otro lado los estudiantes que avanzaron al nivel dos, fueron capaces no solo de distinguir patrones de colores y ser sensibles a estos, sino además, de describir la

obra cómo un conjunto de polígonos que realizan un movimiento en el plano, de igual manera la descripción de la obra ya no la realizan nombrando objetos familiares, si no los polígonos que conforman dichos objetos; de igual modo estos estudiantes pudieron determinar cómo ciertas figuras (hueso, pez) en la Intervención 5 proceden de la deformación de un polígono regular y se atreven a plantear nuevas figuras y deformaciones a partir de los polígonos cómo se observó en la Actividad final.

Desde la dimensión de la transformación simbólica se observó cómo el avance en los niveles de razonamiento geométrico, le permite al estudiante tener una mayor gama de posibilidades expresivas desde el uso de elementos de trazo, en la elaboración de polígonos para crear sus obras de arte, así cómo en la resolución de problemas gráficos cómo se analizó en la actividad No 1. De esta forma se observa cómo el avance en el nivel de razonamiento geométrico favorece de igual manera las dimensiones de la experiencia artística en los estudiantes, brindando mayores elementos para la comprensión de una obra, y su elaboración, permitiendo un proceso contemplativo más intenso, una reflexión más profunda y una valoración más objetiva de las obras de arte, al comprender los elementos compositivos que la fundamentan.

Durante la puesta en marcha de la propuesta de investigación, se pudo reconocer cómo existen algunos factores que pueden dificultar la adquisición de conceptos y las habilidades en el razonamiento geométrico de los estudiantes en el aula de clase; de esta manera aspectos cómo la formación y perfil del docente afectan de manera muy fuerte las prácticas de aula, direccionando las didácticas y metodologías de clase hacia el activismo e implementación de un plan de estudios en ocasiones ajeno a la realidad del aula, cómo fue puesto en evidencia en el test de entrada. Por otro lado se evidencian cómo el poco desarrollo de habilidades geométricas en la escuela ya sea por la falta de recursos materiales o didácticos permite que los estudiantes adquieran vacíos y dificultades no sólo referidas al

manejo de los instrumentos de trazo y medida, sino también al reconocimiento de polígonos, adquisición de conceptos geométricos y mantengan en ocasiones un pobre lenguaje geométrico, elementos que dificultan el desarrollo de las actividades planteadas por el docente en el aula de clase.

Se reconoció gracias a la implementación de las actividades y la propuesta investigativa que los estudiantes requieren de la escuela y de sus docentes mucha más preparación en la asignatura de geometría, pues hace falta implementar una metodología que permita a los estudiantes involucrarse con los materiales de trazo, manipular dichos elementos y aprender los conceptos nuevos gracias a la experimentación.

#### **4.4 Exposición de obras**

Cómo propuesta final del proceso se realizó una muestra artística con las obras de arte elaboradas, momento que fue supremamente enriquecedor para los estudiantes al afianzar su autoestima y aprendizaje de las temáticas tratadas; la propuesta fue Inscrita en el FAE (Festival Artístico Escolar 2015) donde fue seleccionada por sus elementos integradores entre el arte y la geometría como una propuesta importante para dar a conocer a nivel Distrital, lo que conllevó a una exposición en la Biblioteca El Tintal en el mes de septiembre y Octubre del 2015 al igual que la visita de los estudiantes a esta prestigiosa biblioteca y el reconocimiento por medio de diplomas y recordatorios a los estudiantes y al docente.

## 5. CONCLUSIONES

La integración curricular presentó para el maestro una posibilidad muy efectiva a la hora de abordar nuevos conocimientos geométricos en el aula de clase con los estudiantes de grado quinto; se pudo apreciar cómo en la implementación de las diferentes actividades de aula, la dimensión contemplativa del arte y la manipulación de materiales plásticos motivó a los estudiantes al desarrollo de habilidades que fortalecieron su razonamiento geométrico, por medio de la manipulación de elementos concretos que ayudaron a llevar a la práctica los conceptos de propiedades de los polígonos regulares y sus movimientos en el plano, esto se fortaleció con la implementación de los materiales de trazo para la construcción de estos polígonos. La integración de estos elementos ayudó a solventar las dificultades demostradas por los estudiantes en su razonamiento geométrico al igual que profundizar en los conceptos y habilidades geométricas propuestas para grado quinto en los estándares curriculares del ministerio de educación; de igual manera permitió al docente aplicar sus conocimientos de artes plásticas en la clase de geometría y avanzar en el entendimiento de esta asignatura.

La dimensión contemplativa del arte brinda un apoyo significativo en la enseñanza de la geometría, puesto que la identificación de elementos compositivos como el reconocimiento de objetos, simetrías, ritmos y estructuras dentro de una obra, requiere disponer por parte de los estudiantes de conocimientos geométricos sobre las propiedades de los polígonos, esto les permite visualizar objetos geométricos por medio de la comparación e identificación de sus características, componerlos y descomponerlos para identificar la estructura de la obra, esto se observa cuando el estudiante tiene la capacidad de reconocer el origen geométrico de una baldosa generadora, identificando sus lados, ángulos y la deformación que esta puede presentar, obligando al empleo y aplicación de los conocimientos geométricos.



Para identificar estructuras y ritmos en las teselaciones el estudiantes debe tener también la capacidad de identificar las propiedades de los objetos geométricos de tal forma que le permita visualizar semejanzas entre ángulos, lados y las propiedades de las polígonos encontrando semejanzas con las cuales pueda identificar a la vez movimientos de rotación y traslación en el plano, esta relación de conocimientos geométricos y habilidad contemplativa se percibe cómo un puente integrador entre el arte y la geometría, que se potencia por medio de la creación de obras teseladas ya que en ellas el estudiante debe emplear las propiedades de los polígonos para integrarlos en la obra y esto sólo lo puede realizar si emplea de manera adecuada los materiales de trazo e identifica los diferentes movimientos que puede ejecutar con las figuras en el plano. En la medida que se práctica la contemplación de las obras los estudiantes evocan sus conocimientos geométricos esto les permite una interpretación más detallada de la obra, ya que sus impresiones van más allá de elementos emotivos para concretarse en elementos estructurales y conceptuales; de esta manera se evidencia un avance en la contemplación artística de los estudiantes, ya que al iniciar la propuesta los niños no poseían los conocimientos necesarios para identificar la composición de la obra ni para describir con claridad los objetos que las conformaban, se limitaban a nombrar el color de la obra y su gusto por ella, sin realizar un análisis o reconocimiento más detallado cómo lo realizan ahora.

En el desarrollo e implementación de estrategias didácticas que integran elementos del arte plástico para el desarrollo del razonamiento geométrico, es importante emplear técnicas cómo el dibujo, la pintura y moldeado de la plastilina, que permiten vincular el trabajo con los instrumentos de trazo y con ellos profundizar el estudio sobre los polígonos, las unidades de medida y los movimientos en el plano.

Las teselaciones se pueden emplear cómo una herramienta poderosa en el aula de clase que permite integrar elementos contemplativos del arte plástico al igual que desarrollar el razonamiento geométrico de los estudiantes, permitiéndoles solventar las dificultades observadas en el aprendizaje de

la geometría, de esta manera las actividades propuestas permitieron reconocer el avance de nivel en el razonamiento geométrico de los estudiantes de acuerdo al modelo de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1990), pasando de nivel 1 en su etapa inicial a nivel 2 de esta manera los estudiantes pueden ahora identificar los diferentes polígonos regulares y describirlos mencionando sus propiedades, pueden de igual manera mencionar la importancia del uso de los materiales de trazo y dibujo para encontrar semejanzas o diferencias entre estos polígonos e identifican los movimientos de rotación y traslación que ejecutan las figuras sobre el plano.

El desarrollo de la investigación junto con el diseño e implementación de las actividades de intervención permitieron al docente investigador profundizar sus conocimientos frente al empleo del lenguaje plástico como herramienta para facilitar el aprendizaje de los estudiantes en el aula de clase, brindándole herramientas para sugerir posteriores integraciones curriculares entre el arte y otras áreas del conocimiento; de igual manera la propuesta obligó al docente a indagar y estudiar elementos de la didáctica de la geometría, lo que le permitió ahondar en los conocimientos geométricos específicos y desarrollar aspectos propios del razonamiento geométrico que al iniciar la propuesta no consideraba y con las cuales adquirió herramientas para fortalecer el desarrollo geométrico en sus clases.

## 6. RECOMENDACIONES

El proceso investigativo fue supremamente enriquecedor tanto para el docente investigador, cómo para el campo de la educación artística y la geometría en la educación, sin embargo se presentaron algunos retos importantes a valorar y tener en cuenta en futuras investigaciones, el primero de ellos referido a los elementos teóricos que fundamentan y permiten reconocer un avance en el aprendizaje de los estudiantes, en este caso se emplearon los niveles de Van Hiele, que permiten tener elementos claros de cómo se visualiza el aprendizaje de la geometría en los estudiantes, pero que al llevarlo a otra asignatura se deberán reconocer nuevos elementos teóricos propios de cada área del conocimiento.

La investigación abre el camino para identificar elementos teóricos y metodológicos que fundamenten y expliquen cómo se desarrolla y organiza el pensamiento en cuanto a la manipulación de los elementos de trazo y dibujo, ya que se encontraron muy pocos referentes teóricos y trabajos de investigación direccionados a este aspecto.

Desde la práctica y educación del arte plástico en la escuela, se brinda la posibilidad de seguir investigando cómo reconocer los elementos creativos de los niños en sus obras de arte, al igual que cómo identificar estos elementos creativos en la integración de diversos materiales y en la implementación de colores y formas, para ello se puede recurrir a los teóricos de la educación artística cómo Víctor Lowenfeld (1980), Howard Gardner (1994), Gil Tovar (2002), aunque se debe ampliar el campo a elementos de la psicología del arte y del desarrollo.

Un elemento de gran valor que en ocasiones no toma suficiente fuerza en las aulas de clase es la posibilidad de realizar exposiciones y encuentros de intercambio con otros estudiantes y colegios, que permitan afianzar los conocimientos de los estudiantes y tener un referente frente a sus propios trabajos y creaciones, creando comunidades de investigación, cultura y educación.

En términos pedagógicos se evidenció la necesidad del docente y de todo aquel encargado del área de la geometría en la escuela, de investigar sobre aquellas dificultades que presentan los estudiantes para adquirir conocimientos y habilidades geométricas, puesto que el abordar estas dificultades en el aula se requiere plantear una serie de actividades y planes que faciliten a todos los estudiantes estos conocimientos, y de igual manera brindar espacios donde por medio de la manipulación los estudiantes pueden poner en práctica los conceptos adquiridos y trabajar con los instrumentos propios de la geometría.

En cuanto al proceso investigativo es necesario para futuras intervenciones cerrar un poco el campo de acción ya que en la investigación se abordaron conceptos generales que se abordan en un semestre de educación formal, lo que dificultó llevar un registro minucioso de todas las variables surgidas y de cómo evaluar los avances presentados; por otro lado es importante plantear un test de salida que permita poner a la vista más fácilmente los avances que presentaron los estudiantes frente al razonamiento geométrico.

## 7. REFLEXIÓN PEDAGÓGICA

La investigación ha cerrado su campo de visión pues en un principio se pretendía abordar el pensamiento numérico desde el arte, realizándose para ello una serie de actividades que facilitarían la adquisición de conceptos de valor posicional y notación a través de la teoría del color y su interpretación, pero al encontrar poca documentación teórica sobre el tema, además de dificultades metodológicas y pedagógicas, se decide abordar otra temática más afín y más estudiada cómo es el pensamiento geométrico; a pesar de ello la experiencia dejó cómo resultado la construcción de material pedagógico que ha facilitado la escritura de números y su ubicación de valor posicional.

Para el docente investigador el desarrollo tanto teórico cómo práctico de la propuesta se presenta cómo un reto pues lo ha llevado a documentarse bastante sobre el aprendizaje de la geometría, el desarrollo del pensamiento geométrico con la teoría de Van Hiele, en el mismo pensamiento matemático, entender cómo se divide este componente desde el ministerio de educación y las últimas tendencias educativas, para poder acercarse a lo que se pretende con la investigación; ya que el hecho de ser especialista el área artística no le brinda elementos suficientes para entender cómo se enseña y cómo se aprende la geometría en la escuela.

Desde el área artística ha permitido que el investigador adquiera una nueva visión de la importancia del arte en la educación y cómo esta puede influenciar positivamente a los estudiantes, facilitando su aprendizaje y desarrollo del pensamiento en otras áreas del conocimiento; buscando de esta manera nuevas estrategias pedagógicas, artistas de referencia y obras para enriquecer el desarrollo de sus clases.

La integración curricular es un elemento importante a tener en cuenta en la planeación de aula, ya que por medio de ella asignaturas cómo la geometría y el arte pueden tomar mayor peso y

relevancia en el currículo, brindando espacios de encuentro y complementación con otras asignaturas; permitiendo llevar a cabo un proceso más continuo y de mayor profundidad en las temáticas previstas para el grado; por otro lado el integrar los elementos lúdicos y plásticos de la educación artística, enriquece las experiencias de aula y motiva a los estudiantes a aprender de manera más agradable y significativa.

Para el docente investigador el proceso desarrollado ha sido supremamente enriquecedor, ya que le ha permitido comprender la importancia de investigar en el aula de clase, al igual que la necesidad de adquirir elementos teóricos que permitan orientar la clase teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes y revisar diferentes estrategias pedagógicas que le permitan ayudar a superar las problemáticas de los estudiantes; también ha obtenido elementos importantes para realizar los registros de clase y analizarlos. Antes de iniciar el proceso de investigación el docente no conocía los procesos y estrategias pedagógicas empleadas en la enseñanza de la geometría, por lo cual la investigación le permitió profundizar en esta temática y emplear los elementos adquiridos para potenciar sus clases y proponer actividades innovadoras. El investigador ha comprendido de mejor manera el papel del docente en el aula, cómo promotor de procesos de aprendizaje, que emplea todas las herramientas a su disposición para que los estudiantes se encuentren motivados e interesados por su desarrollo académico.

## 8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Angel, M., Jimenez, W., Rojas, S., Zambrano, N., & Mora, C. (2006). *teselados en el club de Matemáticas. Memorias XVIII encuentro de geometría y VI de Aritmética*, (p. 15-21). Bogotá, Colombia.
- Barrantes, H. (2013). Escher y la simetría. *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (págs. 1-12). Costa Rica. Ministerio de Educación.
- Castellanos, M. & Obando, J. (2011). *Errores y dificultades en procesos de representación*. Villavicencio, Colombia. Universidad de los llanos.
- Colombia Aprende, R. E. (2010). *Orientaciones pedagógicas para la educación artística básica y media*. Bogota, Colombia. Ministerio de Educación.
- Dewey, J. (2008). *El arte cómo experiencia*. Barcelona, España. Paidos.
- Enriquez, P. (2004). *Modalidades y Discusiones en torno a la noción de docente investigador*. Cordova, España: REDUC.
- Ernest, P. (1991). *La filosofía de las matemáticas*. United States. The Falmer Press.
- Friedrich Schiller (1999). *Cartas a la educación Estética del hombre*. Barcelona, España. Antrophos.
- Farfán & Ariza, L. F. (2002). *La Geometría cómo medio de desarrollo perceptivo y espacial dentro del campo Artístico. Trabajo de Grado*. Chia, Colombia. Universidad de la Sabana.
- Fouz, F., & De Donosti, (2005). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. Teoría y Práctica*. España. Virual.
- Fouz, F. (2006). *Test geométrico aplicando el modelo de Van Hiele*. Revista Sigma No 28, (p.33-57). España, matematika aldizkaria.
- Fouz, F. (2013). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. Un paseo por la Geometría*, (p. 67-81). España, matematika aldizkaria.
- Franchi, L. & Henández, Ana. (2003). *Tipología de los errores en el área de la Geometría plana*. (p.63-71). Merida, Venezuela. Educere
- Franchi, L. & Henández, Ana. (2004). *Tipología de los errores en el área de la Geometría plana. Parte II*. (p. 196- 204). Merida, Venezuela. Educere
- Gardner, H. (1994). *Educación artística y Desarrollo Humano*. España. Paidos.
- Gardner, H. (1996). *Inteligencias Múltiples la Teoría en la Práctica*. Estados unidos. Paidos.
- Gennari, M. (1997). *La educación Estética*. Barcelona, España. Paidos.
- Gil Tovar, F. (2002). *Introducción al Arte*. Bogotá, Colombia: Plazas y Jánés editores.
- Goodman, N. (1976). *Lenguaje of Arts*. Barcelona, Version española: Seix Barral, segunda edición, tercera reimpresión.

- Gutierrez & Jaime. (1987). *Traslaciones, giros y simetrías en el plano*. Valencia, España: Artes graficas Soler S.A.
- Gutierrez, A. (1990). *los cubrimientos de MC escher cómo material didactico*. Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Gutierrez, A., & Jaime, A. (1990). *una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele*. En Linares, & Sánchez, M.V., Teoría y práctica de la educación matemática (págs. 295-384). Sevilla, Linares. Sánchez, M.V.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2012). *Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria*. Valencia, España. Universidad de Valencia.
- Hernandez R. , Fernández C. , Baptista P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México DF, México. Mc Graw Hill.
- Herrera, Montes, & Cruz & Vargas, V. C. (2010). *Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje*. En ASOCOLME, memoria 11º, encuentro colombiano de matemática educativa (págs. 422- 430). Bogota, Colombia. cengage learning.
- Kandinsky, V. (1996). *Punto y Línea sobre el plano, contribución al análisis de los elementos pictóricos*. España: Páidos.
- Lowenfeld, V. (1980). *Desarrollo de la Capacidad Creadora*. Buenos Aires, Argentina. Kapeluz.
- Marín Viadel, R. (2011). *Las investigaciones en Educación Artística, metodologías artísticas de investigación en educación*, (p. 271-285). Porto Alegre, Brasil. Educación
- Mejía Palomino, M. F. (2013). *El Estudio de las teselaciones Para La Enseñanza de la Geometría Transformacional*. Memorias XVIII encuentro de Geometría y VI de Aritmética, (p.175-182). Bogotá, Colombia. cengage learning.
- Ministerio De Educación Nacional (1994). *Ley General de Educación 115 de 1994*. Bogotá, Colombia. Ministerio de educación.
- Ministerio De Educación Nacional (2000). *Lineamientos Curriculares en Educación Artística*. Bogotá, Colombia. Magisterio.
- Ministerio De Educación Nacional (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Bogotá, Colombia. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio De Educación Nacional (2005). *Comprender las pruebas saber*. Bogotá, Colombia. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio De Educación Nacional (2006). *Estandares Básicos de Competencias en matemáticas*. Bogota, Colombia. Ministerio de Educación.
- Ministerio De Educación Nacional (2010). *Orientaciones Pedagógicas para la Educación Artística Básica y Media*. Bogotá: Ministerio de Educación.



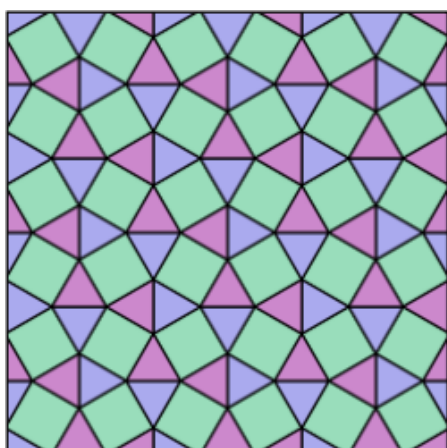
- Ministerio De Educación Nacional. (2010). *Orientaciones Pedagógicas para la Educación Artística Básica y Media*. Bogotá, Colombia. MEN.
- Migueléz, M. (2000). *La Investigación-Acción en el aula*. Agenda Académica, volumen 7, (p. 27-39). España, Agenda Académica.
- Palacios, S. D. (Mayo de 2007). *Enseñanza de simetrías matemáticas a través del arte: propuesta para promover un estudio integral*. Trabajo de Grado. Caracas, Venezuela. Universidad Central de Venezuela.
- Read, H. (1955). *Educación por el Arte*. Barcelona, España. Paidós.
- Schattschneider, D. (2010). *The Mathematical Side*. NOTICES OF THE AMS, Volume 57, number 6, (p.706-718). United States. Notices of the ams.
- Spravkin, M. (1997). *Enseñar Plástica en la escuela: conceptos, supuestos y cuestiones*. En M. Spravkin, *Artes y escuela : aspectos curriculares y didácticos de la educación artística* (págs. 93-132). Buenos Aires, Argentina. Paidós.
- Uniminuto. (2003). *Una Aproximación al Énfasis en Educación Artística*. Bogotá, Colombia. Facultad de educación, Uniminuto.
- Universidad Minuto de Dios (2003). *Educación Artística*. Bogotá, Colombia: UNIMINUTO.
- Vargas & Gamboa. (2013). *El Modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría*. UNICIENCIA, Vol 27, (p.74- 94). Costa Rica. Uniciencia

## ANEXOS

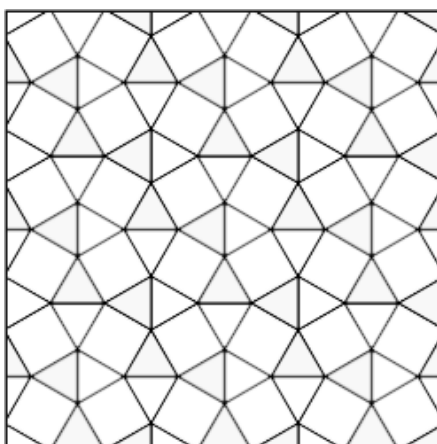
### Anexo 1 - Prueba diagnóstica

*Formato Test de Entrada*

**Obra 1**



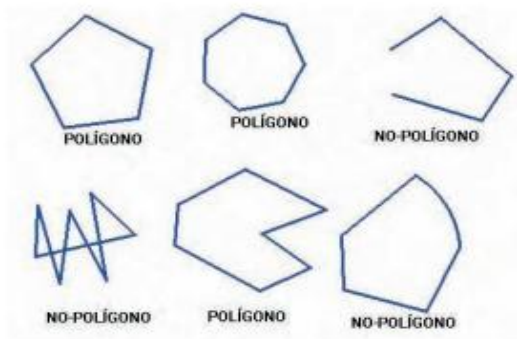
**Obra 2**



Observa la teselación y luego responde:

1. Los polígonos que conforman el teselado son:
  - a. Sólo Triángulo
  - b. Sólo Cuadrado
  - c. Sólo Rombos
  - d. Triángulos y cuadrados
  
2. La cantidad total de triángulos y cuadrados completos, respectivamente son:
  - a. 60 triángulos y 36 cuadrados
  - b. 55 triángulos y 40 cuadrados
  - c. 60 triángulos y 30 cuadrados
  - d. 40 cuadrados y 30 triángulos

3. Escribe de acuerdo a la imagen de abajo que es un polígono: (Fouz F. , 2006)



Por lo tanto un polígono es:

---



---



---



---

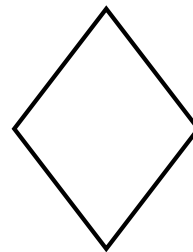
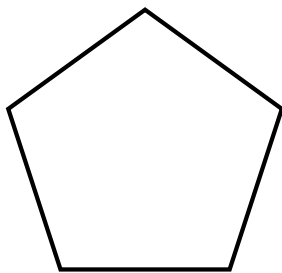


---



---

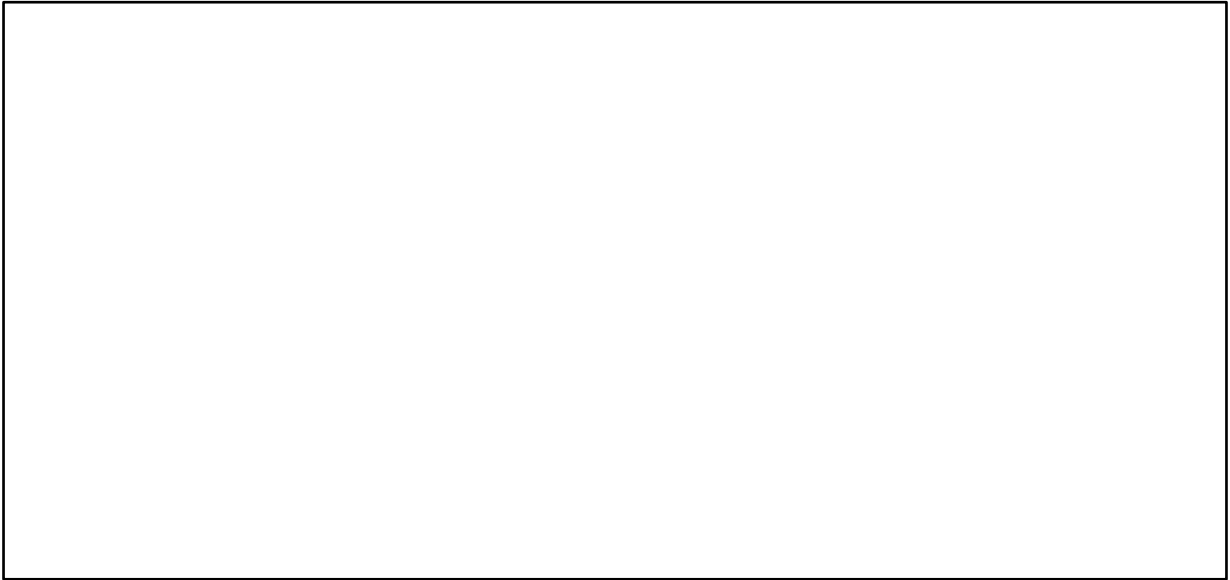
4. Observa la Obra #1, ten en cuenta el triángulo 1 y realiza lo siguiente:
  - a. Escribe una T a los triángulos que partiendo de la posición 1 realizaron una traslación a su posición actual.
  - b. Escribe una R a los triángulos que partiendo de la posición 1 realizaron una rotación a su posición actual.
5. Observa la obra y colorea con rojo 5 ángulos rectos que encuentres
6. Observa la obra y colorea con verde 5 ángulos agudos que encuentres
7. Observa las siguientes figuras, ¿cuáles figuras geométricas consideras que conforman este objeto? Dibújalas, en su interior.



8. Escribe el nombre de cada polígono del punto anterior y algunas de sus características, puedes utilizar la regla y transportador para encontrarlas:

- a. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- b. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

9. Ahora utiliza las figuras para crear una obra nueva; utiliza el espacio asignado



10. ¿Cuál de las siguientes respuestas, referidas a la figura de la derecha, NO ES CORRECTA? (Fouz F. , 2006)



- a. Es un paralelogramo.
  - b. Es un rombo.
  - c. Es un cuadrado.
  - d. Es un cuadrilátero.
11. Si trazamos la diagonal de un cuadrado... ¿qué afirmación NO ES CIERTA? (Fouz F. , 2006)
- a. Lo divido en dos triángulos iguales.
  - b. Lo divido en dos triángulos isósceles.
  - c. Lo divido en dos triángulos rectángulos.
  - d. Lo divido en dos triángulos de igual área.
  - e. alguna de las anteriores respuestas tiene que ser falsa.
12. Si pudieras cambiar los colores de la obra, cuales emplearías:
- a. Colores primarios
  - b. Colores secundarios
  - c. Todos los colores
  - d. Blanco y negro

13. Colorea creativamente la obra # 2
14. Comparando las dos obras (la original y la creada), puedes afirmar que: (puedes marcar varias opciones):
- a. La primera es más alegre que la segunda.
  - b. La segunda es más llamativa que la primera.
  - c. La primera genera más emoción que la segunda.
  - d. La segunda es más cálida e impactante.
15. ¿Puedes colocarle un nombre a la primera y segunda obra, de acuerdo a lo que ves en ellas?, escríbelo:
- a. Obra 1 : \_\_\_\_\_
  - b. Obra 2 : \_\_\_\_\_
16. Teniendo en cuenta las dos obras (1 y 2), Podríamos afirmar que:
- a. Una obra de arte contiene ideas o pensamientos del autor.
  - b. El color es importante para representar las ideas.
  - c. No dan ninguna sensación y no tienen un orden establecido.
  - d. Se da un buen uso del espacio de trabajo.

## Anexo 2 - Actividad 1 “el cuento de los polígonos”

### La nueva figura del pueblo de papel

Érase una vez en el pueblo de papel, un sitio muy pacífico, lleno de grandes espacios verdes, azules, morados y amarillos un pequeño triángulo que se encontraba en la esquina inferior derecha del pueblo(dibujar...), desde allí se dedicaba a contemplar todo lo que hacían los demás habitantes sin ser observado, ya que se encontraba en medio de un gran cuadrado que lo ocultaba de los demás.

(Dibujar...)

Cierta día a la hora del almuerzo observo sorprendido cómo en el centro del pueblo un nuevo habitante con cinco vértices estaba siendo la atracción del momento (dibujar...), esta era una nueva figura que él no conocía, sus cinco lados le llamaban tanto la atención que decidió acercarse y hablar con él , de esta forma el triángulo fue caminando hacia el centro hasta quedar al lado superior derecho de este nuevo amigo, pero no sin dejar tras él un rastro de pequeños pasos en forma de triángulo que marcaban su recorrido (dibujar...)

Desde la esquina superior izquierda del pueblo , el rombo que era una figura totalmente orgullosa , porque constantemente decía que parecía una piedra preciosa; se sorprendido por su extraño comportamiento, decidió dar un gran salto hacia la derecha para observar mejor (dibujar...) de esta traslación quedaron pintadas en el pueblo dos líneas horizontales que salían desprendidas del vértice superior e inferior de la figura(dibujar...); de tal modo que quedo exactamente en el vértice superior del pentágono(dibujar...), permitiéndole observar y escuchar todo lo que dijera el triángulo a su nuevo amigo.

El triángulo le dijo al pentágono que era una figura muy divertida y que le parecía un conocido o un familiar que ya había visto antes, que más bien era cómo un antiguo primo, el pentágono lo miró desconcertado y de un momento a otro dijo:

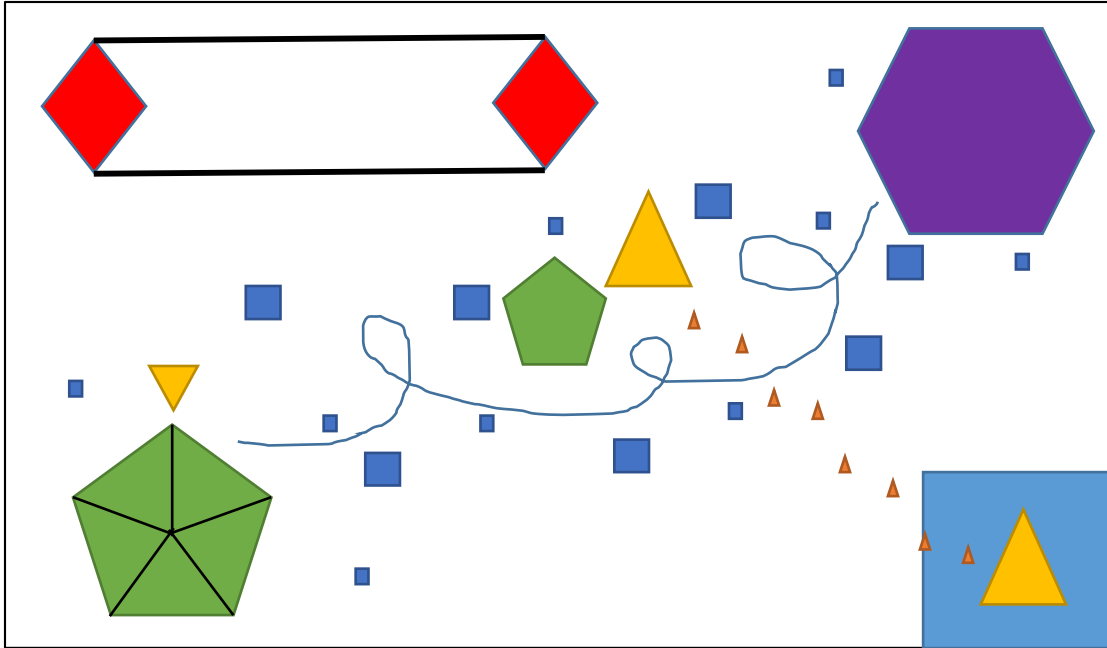
- Tal vez tienes razón y nos conocemos de antes porque para mí los triángulos son polígonos muy especiales tanto que llevo varios en mi corazón, te los mostraré.

El pentágono decidió trasladarse a la esquina inferior izquierda, donde se hizo más grande, allí cerró los ojos y abrió su corazón separándose con líneas rectas que unieron sus vértices con su centro. Separándose inmediatamente en 5 triángulos de diferentes colores, de los colores del arco iris. (Dibujar...); El triángulo que en ese momento se hizo pequeño del susto, se roto y coloco de cabeza sobre el vértice superior del nuevo pentágono dividido(dibujar...), abriendo los ojos sorprendido por lo que había sucedido, vio entonces cómo todos los triángulos que allí se encontraban tenían características únicas, cómo el amor, la amistad, el compañerismo, el valor y la responsabilidad; decidió darle entonces un regalo al pentágono y le dijo:

Desde hoy también una parte de mi irá contigo para ir llenando de bondades tu corazón, yo te regalaré el equilibrio y con eso quedarás mucho más estable.

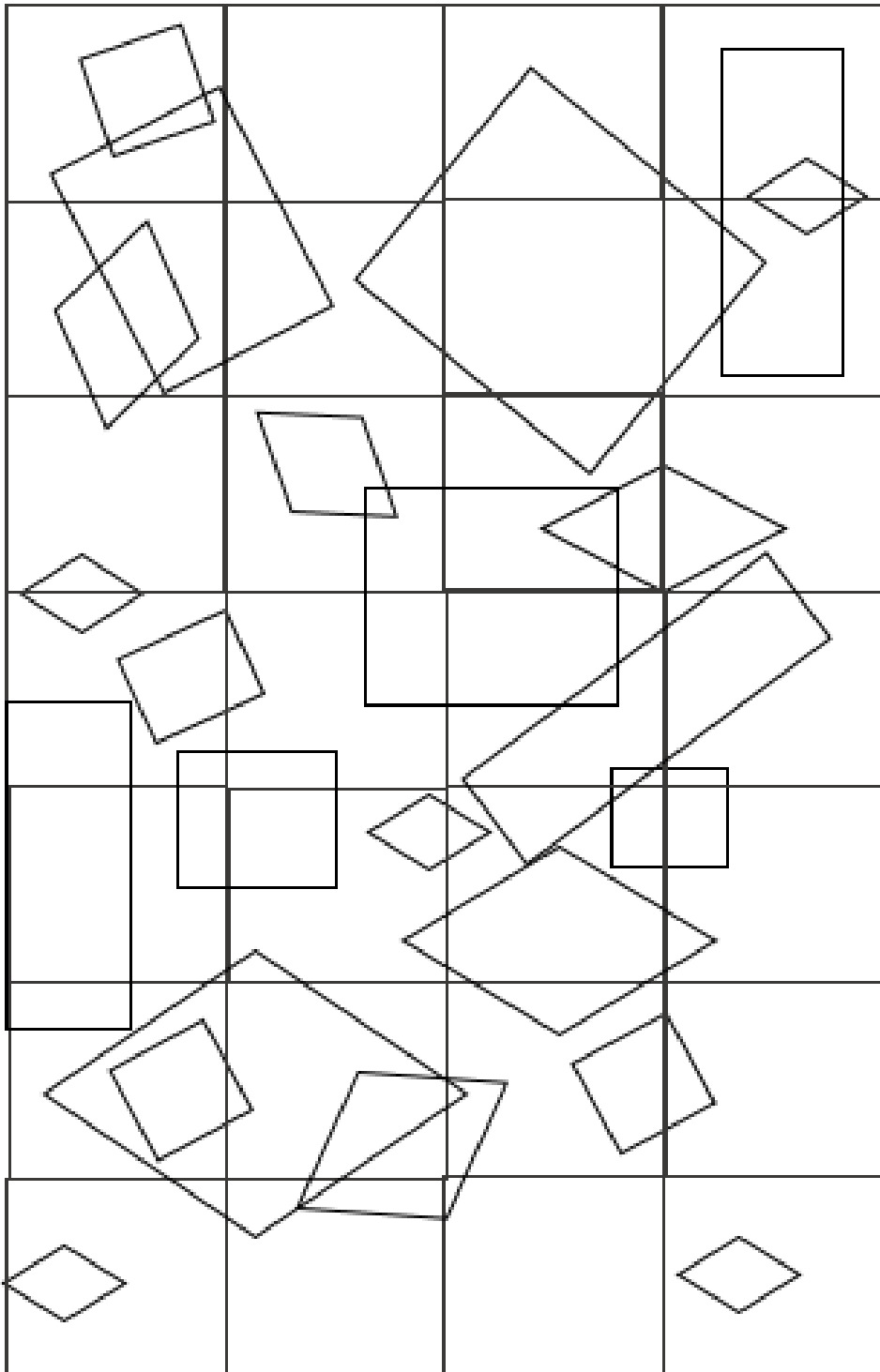
Las dos figuras se abrazaron y giraron de una forma sorprendente de tal manera que dibujaron un caracol estirado hasta la esquina superior derecha del pueblo de papel, dejando regados por todo el camino pequeños cuadrados de colores que adornaron el pueblo(dibujar...), ahora se encontraba en la esquina superior derecha un nuevo polígono de seis lados y seis vértices, al que toda la comunidad del pueblo de papel saludo emocionada, era esta figura el nuevo poblador “el hexágono” que tenía en su interior seis pequeños triángulos. (Dibujar...)

Después de realizado el cuento se espera cómo resultado esperado el siguiente ejemplo:

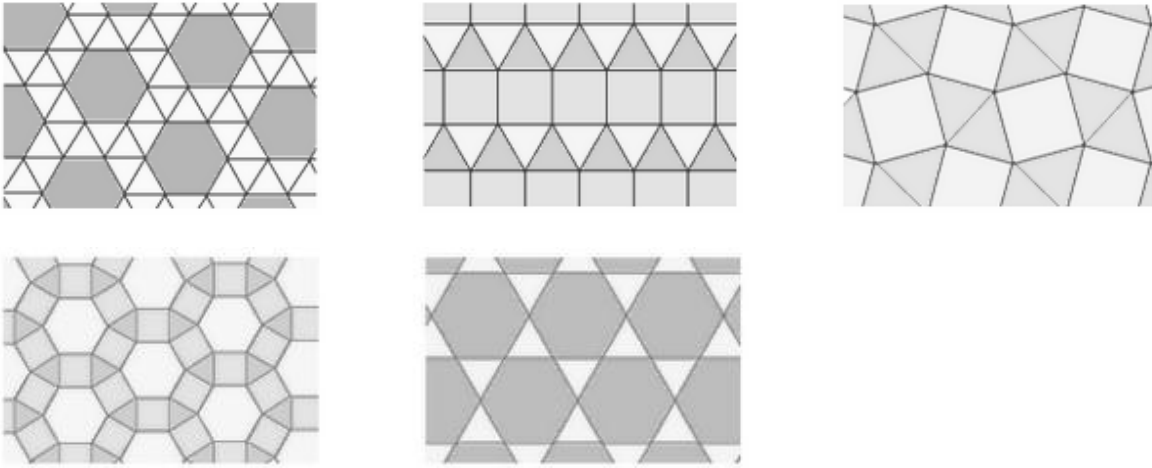




Anexo 3 - Actividad 2 “guía de trabajo”



### Anexo 4 – Actividad 3 “ejemplos de teselados”



### Anexo 5 – Actividad 4 “¿qué es una teselación?”

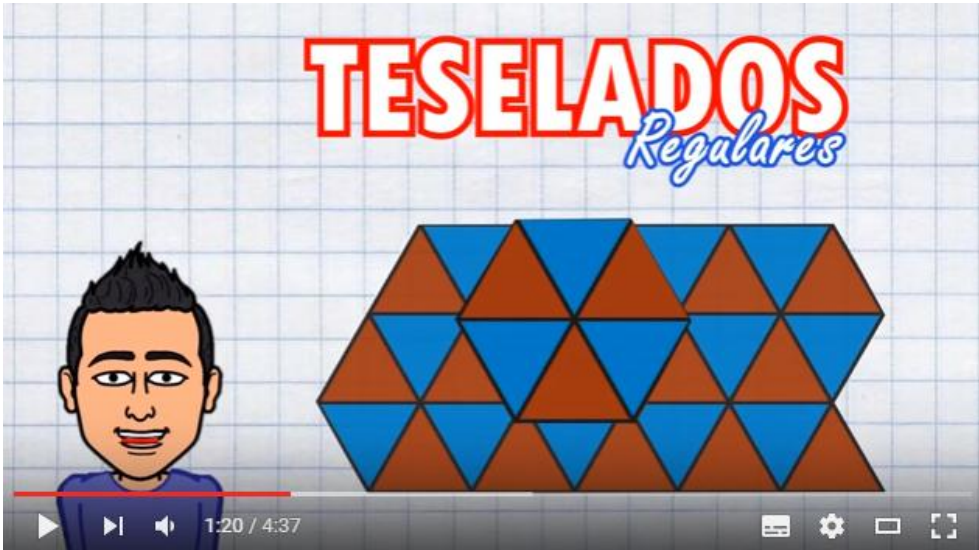
- Video 1 ¿Qué es una teselación?



Jacinto,G. (Gaby Jacinto). (2015, Mayo 17) ¿Qué es una teselación?. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=zmr3BRk04S4>

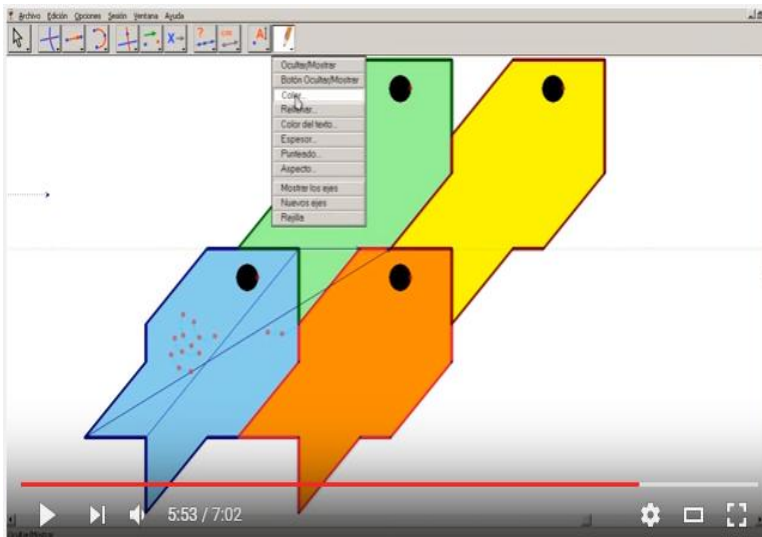
## Anexo 6 – Actividad 5 “teselaciones”

- Video 2 Teselados súper fácil



Carreon, D. (Daniel Carreón). (2014, Julio 15) TESELADOS Súper Fácil. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=6rfcIeSXgQ0>

### Teselado de peces

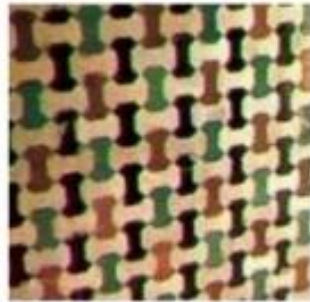


Elizalde, A. (Andrés, Elizalde). (2011, Septiembre 3) Cabri- Ejercicio 11- Teselado (peces). Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=1ilx2HTzr3k>

## Anexo 7 – Construcción de baldosa generadora “hueso”

# La Alhambra de Granada

*hueso*



*Detalles de los Mosaicos de la Alhambra de Granada (2016), recuperado de:*

<http://blog.educastur.es/conkdeplastika/category/3%C2%BA-eso/>

## Anexo 8 – Formato de observaciones de intervención

Observaciones de Intervención #

Lugar:

Grado:

Hora:

Fecha:

Asignatura:

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD

Objetivo General:

Objetivos Específicos:

Desarrollo de la propuesta:

Notas descriptivas:

Pre- categorías: aspectos o elementos que conforman el objeto de observación, son foco de interés

### CATEGORIAS DE ANALISIS

PENSAMIENTO GEOMETRICO	Reconocimiento de figuras y sus características	
	Seguimiento de Instrucciones	
	Manejo de los Instrumentos de Dibujo y Trazo	
PENSAMIENTO ARTÍSTICO	Contemplación	
	Creatividad	
	Juicio Valoretivo	
	Motivación	

Notas metodológicas:

ANEXO 1

## Anexo 9 - Registro fotográfico

### Actividad 1 “El cuento de los polígonos”

Trabajo de Aula: elaboración de moldes con polígonos regulares:

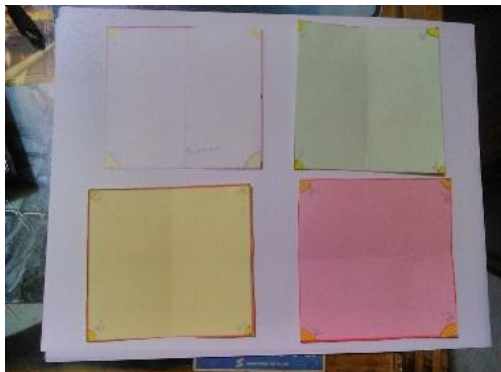


Imagen 53 Elaboración de polígonos

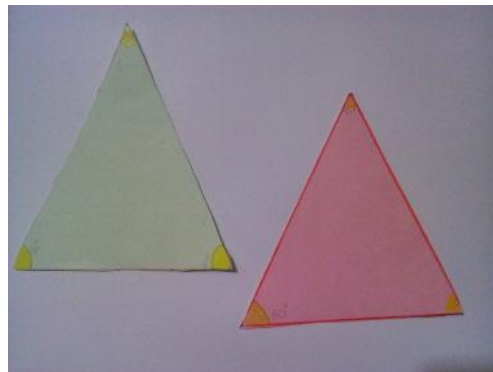


Imagen 56 Elaboración de polígonos

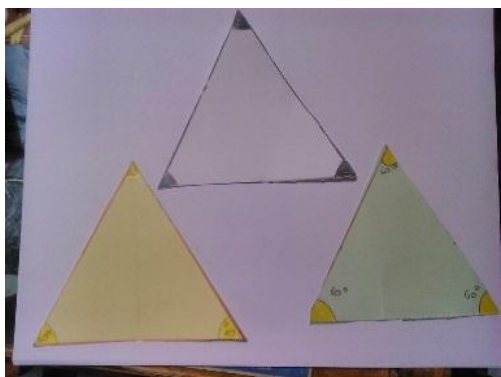


Imagen 54 Elaboración de polígonos



Imagen 57 Elaboración de polígonos



Imagen 55 Elaboración de polígonos

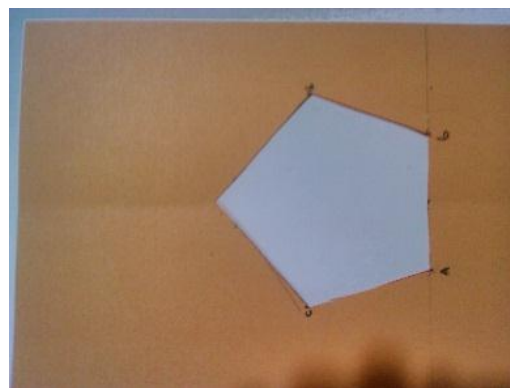
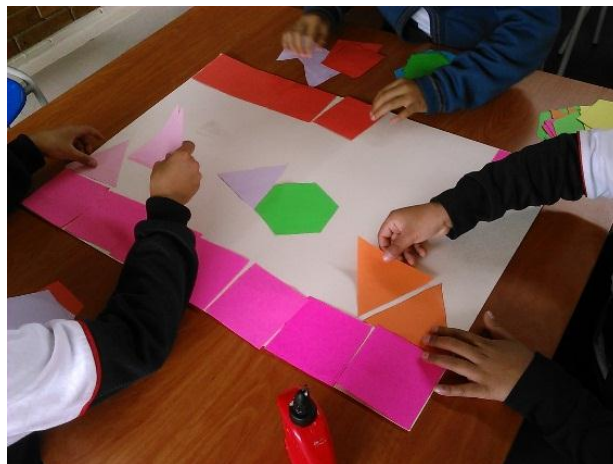


Imagen 58 Elaboración de polígonos

## Trabajo de Aula: Cubrimiento del plano



*Imagen 59 Cubrimiento del plano*



*Imagen 61 Cubrimiento del plano*



*Imagen 60 Cubrimiento del plano*



*Imagen 62 Cubrimiento del plano*

Trabajo de Aula: "dibujando el cuento"



Imagen 63 dibujando el cuento



Imagen 66 dibujando el cuento



Imagen 64 dibujando el cuento



Imagen 67 dibujando el cuento



Imagen 65 dibujando el cuento

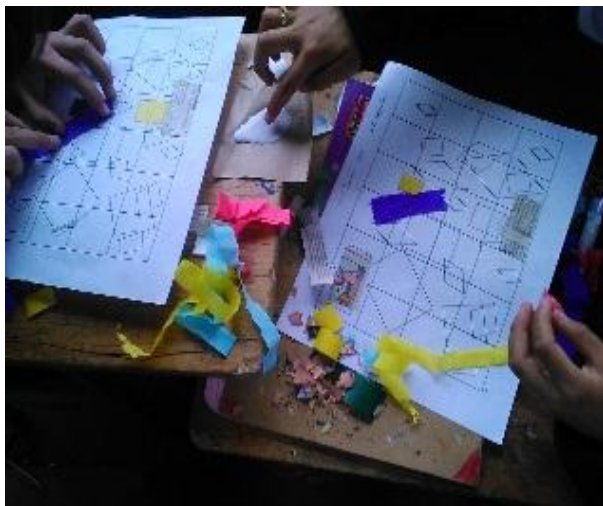


Imagen 68 dibujando el cuento

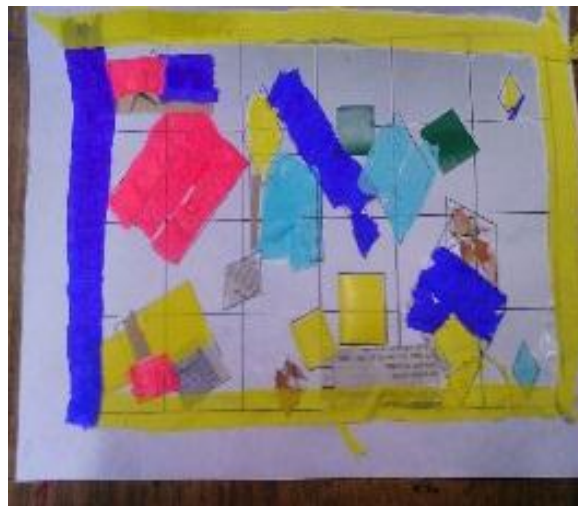


## Actividad 2 “Reconociendo polígonos”

Trabajo de aula:



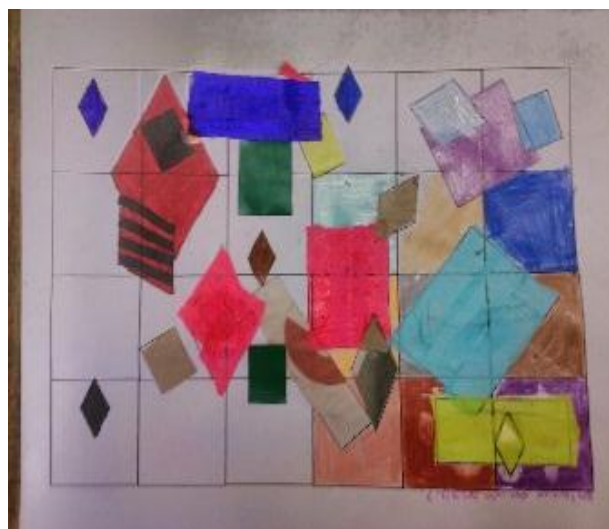
*Imagen 69 Reconociendo polígonos*



*Imagen 71 Reconociendo polígonos*



*Imagen 70 Reconociendo polígonos*



*Imagen 72 Reconociendo polígonos*



Imagen 73 Reconociendo polígonos

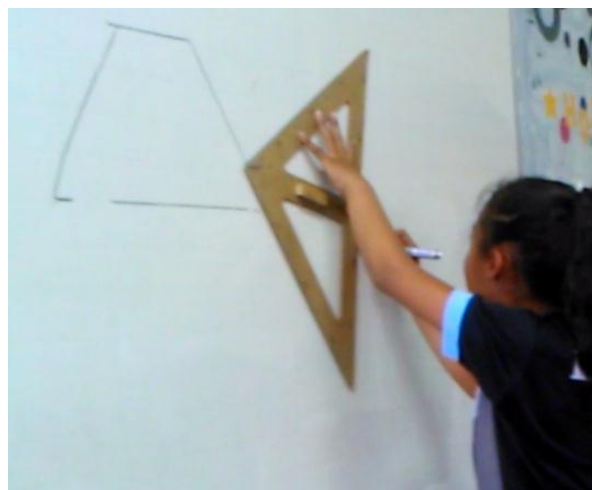


Imagen 75 Reconociendo polígonos

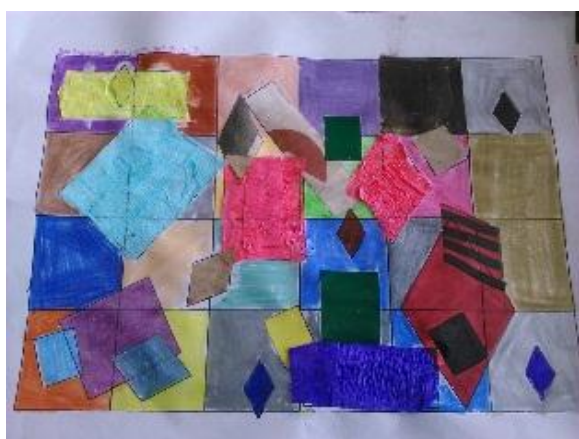


Imagen 74 Reconociendo polígonos

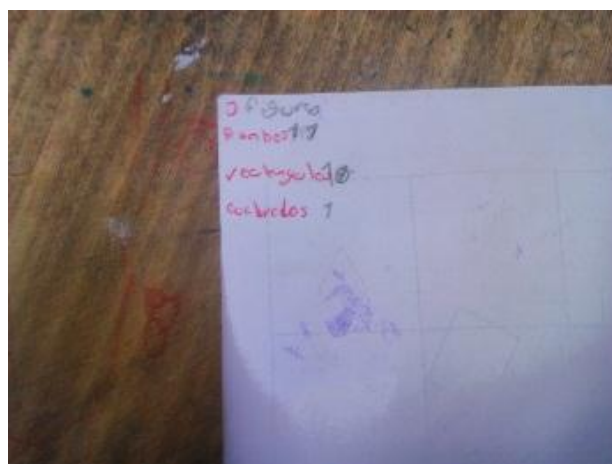
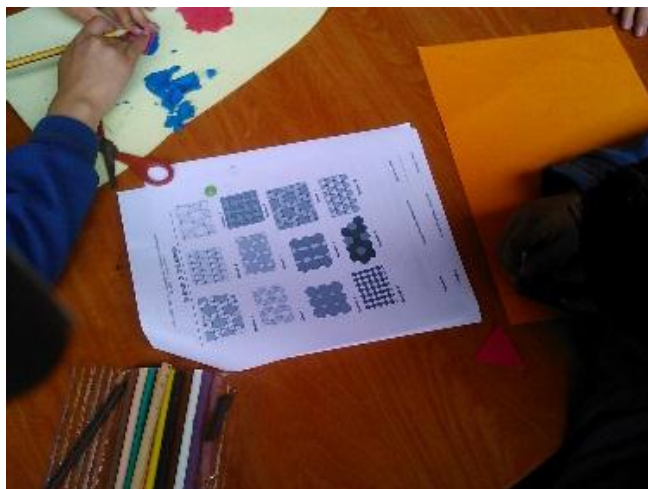


Imagen 76 Reconociendo polígonos

### Actividad 3 “Moldeando polígonos”

Trabajo de Aula



*Imagen 77 Moldeando polígonos*



*Imagen 79 Moldeando polígonos*



*Imagen 78 Moldeando polígonos*



*Imagen 80 Moldeando polígonos*



*Imagen 81 Moldeando polígonos*



*Imagen 84 Moldeando polígonos*



*Imagen 82 Moldeando polígonos*



*Imagen 85 Moldeando polígonos*



*Imagen 83 Moldeando polígonos*



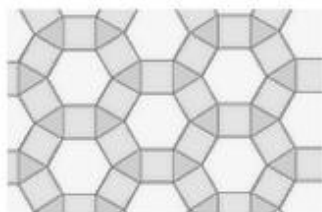
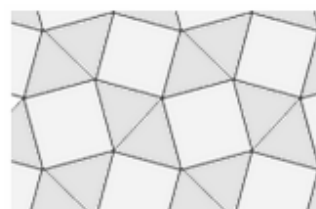
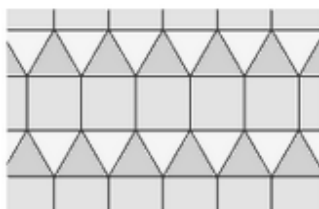
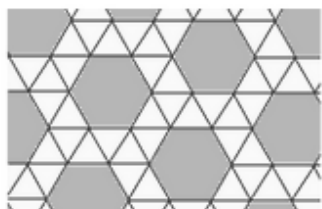
*Imagen 86 Moldeando polígonos*



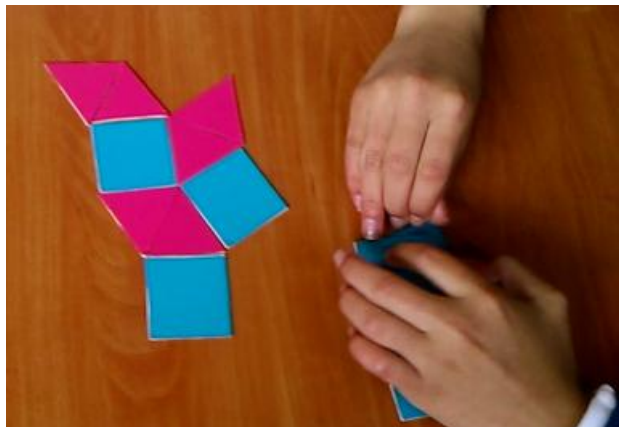
*Imagen 87 Moldeando polígonos*

#### **Actividad 4 - Rompecabezas teselados**

##### **Guía de trabajo**



## Trabajo de Aula



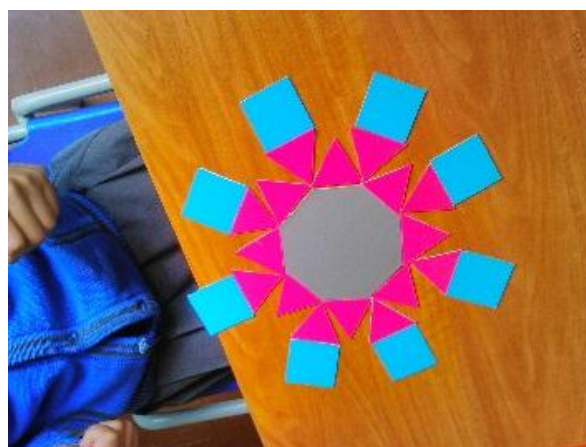
*Imagen 88 Rompecabezas teselado*



*Imagen 91 Moldeando polígonos*



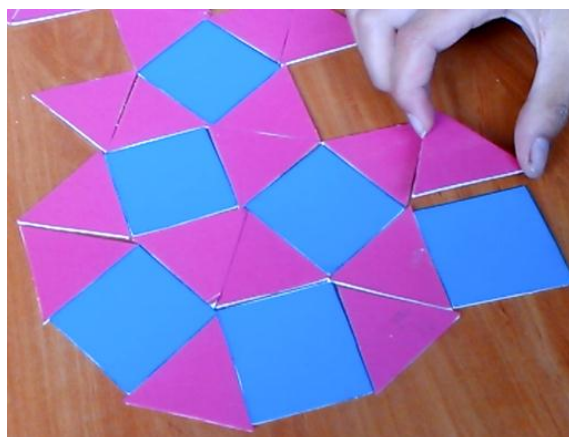
*Imagen 89 Rompecabezas teselados*



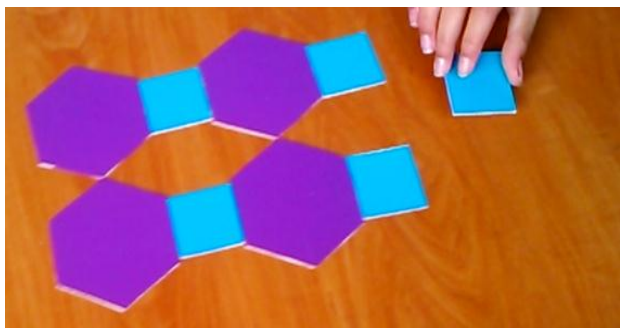
*Imagen 92 Moldeando polígonos*



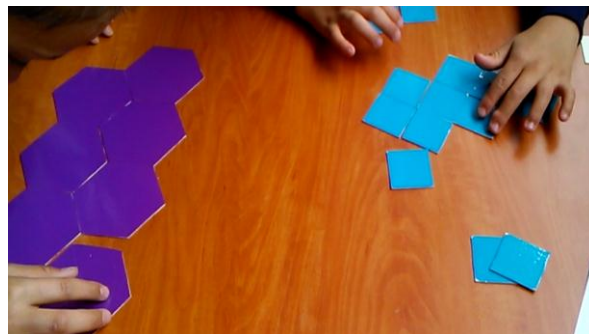
*Imagen 90 Moldeando polígonos*



*Imagen 93 Moldeando polígonos*



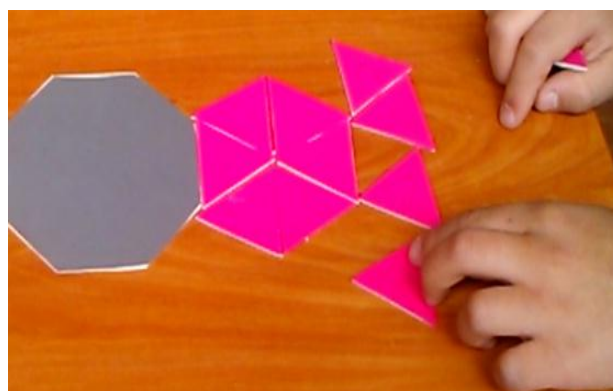
*Imagen 94 Rompecabezas teselados*



*Imagen 96 Rompecabezas teselado*



*Imagen 95 Rompecabezas teselado*



*Imagen 97 Rompecabezas teselado*

## **Actividad 5 “Creación de baldosas”**

### *Trabajo de Aula*



*Imagen 98 Creación de baldosas*



*Imagen 99 Creación de baldosas*



Imagen 100 Creación de baldosas



Imagen 101 Creación de baldosas

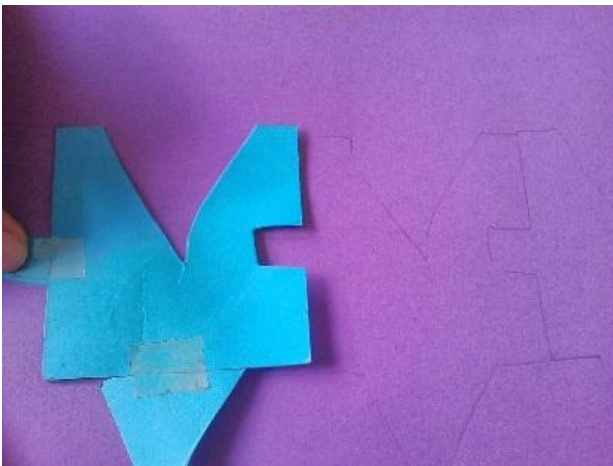


Imagen 102 Creación de baldosas

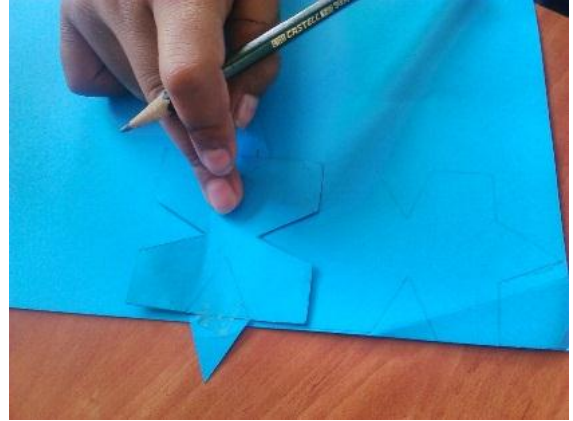


Imagen 103 Creación de baldosas



Imagen 104 Creación de baldosas



Imagen 105 Creación de baldosas



### Actividad 6 “Construyendo teselaciones”

Trabajo de Aula

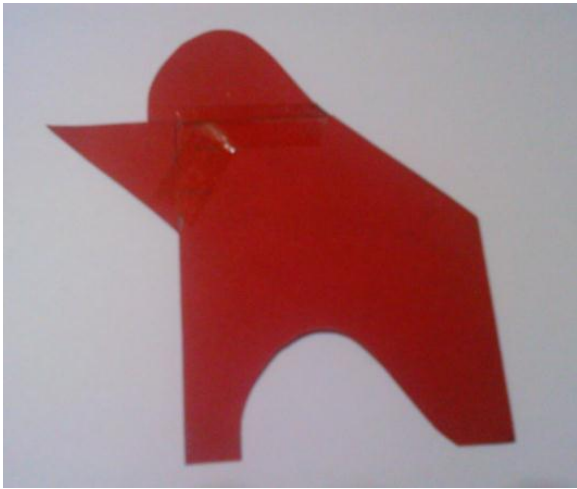


Imagen 106 Construyendo teselaciones



Imagen 108 Construyendo teselaciones

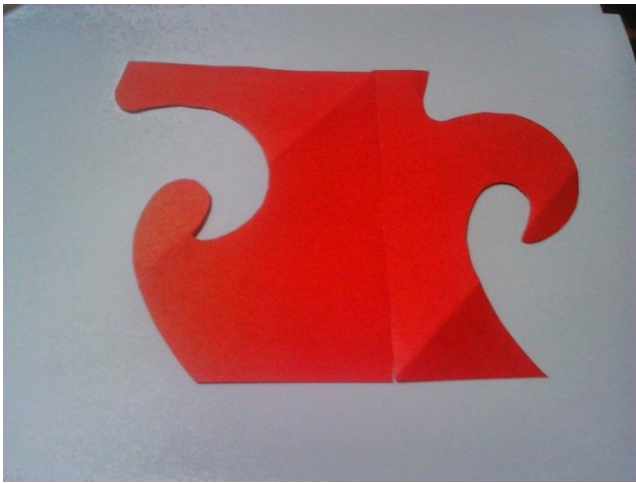


Imagen 107 Construyendo teselaciones

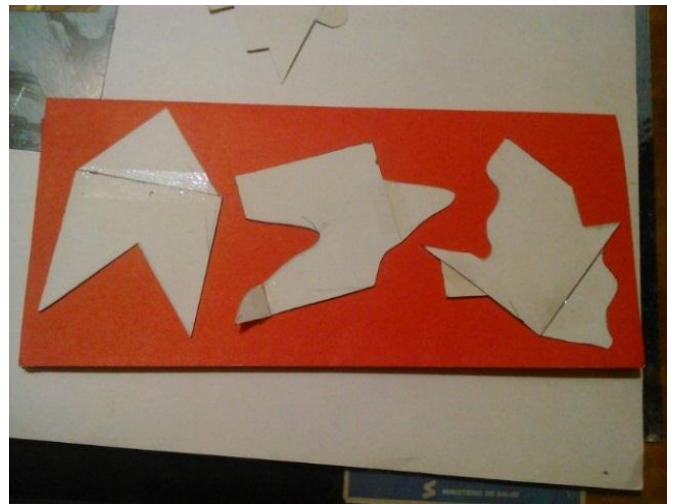


Imagen 109 Construyendo teselaciones

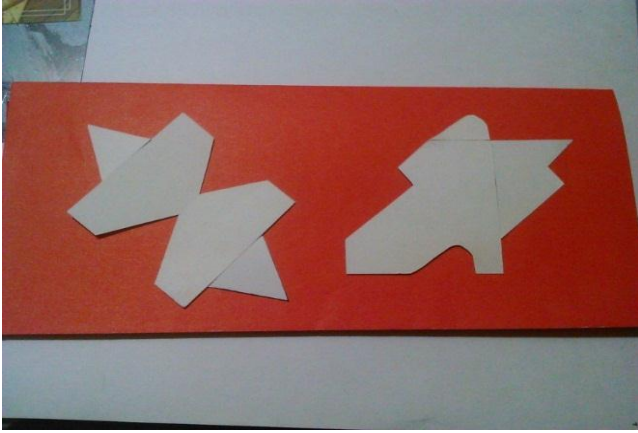


Imagen 110 Construyendo teselaciones



Imagen 113 Construyendo teselaciones

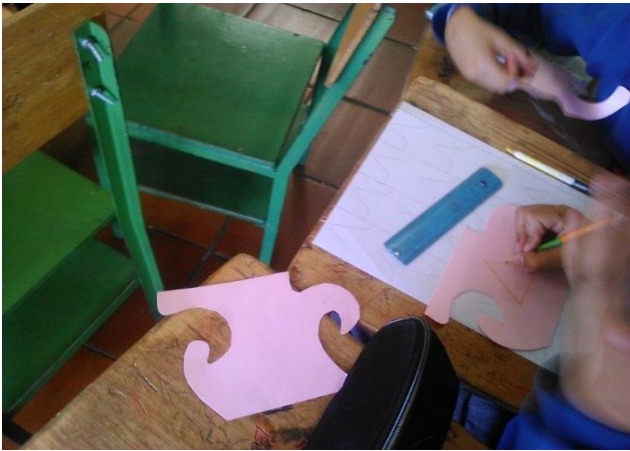


Imagen 111 Construyendo teselaciones

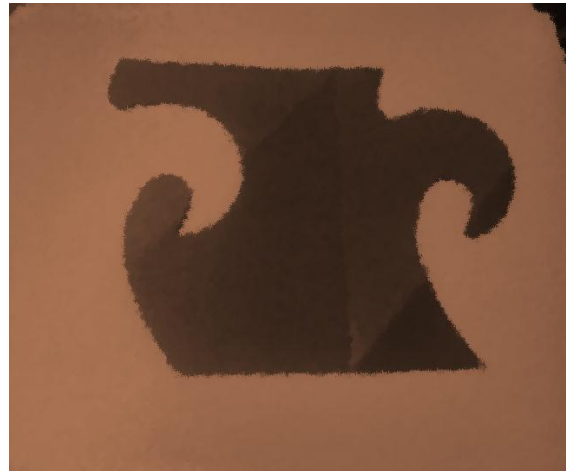


Imagen 114 Construyendo teselaciones



Imagen 112 Construyendo teselaciones



Imagen 115 Construyendo teselaciones



*Imagen 116 Construyendo teselaciones*



*Imagen 117 Construyendo teselaciones*

## Exposición de arte

### Obras finales realizadas por los estudiantes:



*Imagen 118 Creación de los estudiantes*

### *Teselación 1: creación de los estudiantes*



*Imagen 119 Creación de los estudiantes*

*Teselación 2: creación de los estudiantes*



*Imagen 120 Creación de los estudiantes*

*Teselación 3: creación de los estudiantes*



*Imagen 121 Creación de los estudiantes*

*Obra Geométrica sobre el cuento de los polígonos: creación colectiva*

### **Exposición de trabajos en festival artístico escolar**



*Exposición de  
Teselaciones en  
Festival Artístico  
Escolar 2015*

*Montaje final  
Festival Artístico  
Escolar 2.015*

*Imagen 122 Exposición de trabajos*



*Imagen 123 Exposición de trabajos*

## Folleto promocional



## FESTIVAL ARTÍSTICO ESCOLAR FAE 2015

### Exposición permanente de muestras plásticas

El Festival Artístico Escolar es el escenario por excelencia de la Secretaría de Educación del Distrito - SED, que presenta a la ciudad los procesos, prácticas, reflexiones y las experiencias significativas que hacen parte de las apuestas pedagógicas en Educación Artística y Cultural de las y los docentes de colegios oficiales de la ciudad.

La Dirección de Educación Preescolar y Básica en desarrollo del proyecto Fortalecimiento Académico y su componente Escuela - Ciudad-Escuela, realiza el Festival Artístico Escolar FAE como una acción para el fortalecimiento del arte en el marco de la jornada educativa completa "Currículo para la Excelencia Académica y la Formación Integral".

El FAE no solo hace un reconocimiento al enorme talento e iniciativas lideradas por las y los docentes; también busca fortalecer los procesos artísticos escolares y propiciar el intercambio de experiencias entre, niños, niñas y jóvenes en la producción y expresión de los diferentes lenguajes que dan cuenta de su potencial creativo, crítico y cultural; es por eso que el Festival, es una de las expresiones artísticas más importantes del ámbito escolar, en el propósito de la administración distrital "Bogotá Humana" por garantizar una educación pública de calidad.

En el marco del FAE presentamos las experiencias significativas en artes plásticas del 28 de Septiembre al 14 de Octubre en el espacio expositivo de la Biblioteca Pública El Tintal Manuel Zapata Olivella.

#### EXPOSICIONES

- Colegio Francisco de Paula Santander (IED),  
Docente Gladys Angélica Rodríguez.
- Colegio Heladia Mejía (IED),  
Docente Zully Esperanza Aldana Sáenz.
- Colegio Almirante Padilla (IED),  
Docente Miller Riascos Cabrera.
- Colegio Agustín Fernández,  
Docente Ruth Albarracín Barreto.
- Colegio Integrada la Candelaria (IED),  
Docente Cesar Augusto Duarte Vergara.
- Colegio Tibabuyes Universal (IED),  
Docente Henry Machado Avila.
- Colegio Kennedy (IED),  
Docente María Cristina Sánchez González.
- Colegio El Porvenir (IED),  
Docente Nora Constanza Romero Troncoso.
- Colegio Manuelita Sáenz (IED),  
Docente Manuel Alfonso Sierra Granados.
- Colegio Diego Montaña Cuellar (IED),  
Docente Adriana Mercedes Valbuena Villamil.
- Colegio General Gustavo Rojas Pinilla (IED),  
Docentes José Luis Rodríguez Gómez y  
Ana María Salamanca.
- Colegio Paulo Freire (IED),  
Docente Juan Manuel Martí Palomo.
- Colegio los Comuneros Oswaldo Guayazamin (IED),  
Docentes Edith Vernaza Vargas y Oswaldo Rocha.
- Colegio Luis López de Mesa (IED),  
Docente Mauricio Pineda Ramírez.



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN - SECRETARÍA DE CULTURA, RECREACIÓN Y DEPORTE

## Anexo 10 – Visita al museo

*Visita de los estudiantes al Museo*



*Imagen 126 Visita al museo*



*Imagen 125 Visita al museo*





*Imagen 127 Visita al museo*



*Imagen 128 Visita al museo*



*Imagen 129 Visita al museo*



*Imagen 130 Visita al museo*