¿QUÉ SE ENTIENDE DE LO QUE SE QUIERE PREGUNTAR?

ANDRÉS FELIPE PEÑA ARBOLEDA
OSWALDO CAMILO CARMONA RODRIGUEZ

UNIVERSIDAD DE LA SABANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
JUNIO DE 2015

¿QUÉ SE ENTIENDE DE LO QUE SE QUIERE PREGUNTAR?

ANDRÉS FELIPE PEÑA ARBOLEDA
OSWALDO CAMILO CARMONA RODRIGUEZ

ASESOR
ALEJANDRO ANGULO ESCAMILLA

UNIVERSIDAD DE LA SABANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
JUNIO DE 2015

Contenido

Índice de Tablas y gráficas

Resumen

Los resultados estudiantiles de la prueba de matemáticas perteneciente al examen estatal SABER 11 diseñado por el ICFES, son fuente de discusión y análisis pedagógico dentro de las instituciones educativas al igual que aquellos preocupados por la evaluación de la educación. Describir las razones del rendimiento de los estudiantes en este tipo de evaluaciones invita a pensar sobre los aspectos (conceptuales, estructurales y metodológicos) que son considerados por ellos al momento de responder preguntas asociadas al examen, así; el trabajo investigativo centra su premisa en determinar y caracterizar fenómenos de índole pedagógico, relacionando la Didáctica de la Matemática como marco referencial, alrededor de los razonamientos que realiza los estudiantes en el ejercicio de elegir una opción de respuesta para diferentes ítems planteados por el ICFES. La metodología de investigación posee un enfoque mixto, enlazando cuantitativa y cualitativamente los resultados de la implementación dentro del aula. Las conclusiones abarcan análisis de métodos de solución, rastreo de errores usuales y niveles de argumentación frente a la elección de respuestas respecto a la población de grado once de dos colegios distritales en Bogotá.

Palabras clave: Análisis didáctico, preguntas cerradas, instrumentos de evaluación, pruebas, resolución de problemas.

Abstract

Math results from state exam “SABER 11” designed by ICFES are sources of discussion and pedagogical analysis inside of educational institutes and people interested in educational evaluation. To describe reasons for students' understanding in these types of evaluations point out about aspects (conceptual, structural and methodological) considered by students when they are answering questions of the exam, thus; this research work focuses on identifying and describing pedagogical phenomena using the relationship between Didactic of Mathematics and students’ reasoning when they choose answer options for distinct questions presented by "ICFES". The research methodology has a mixed approach, linking quantitative and qualitative results of the implementation in the classroom. The conclusions of this work, cover methods, tracking of coming mistakes and different argumentation levels choosing answers by people of eleventh grade from two public schools at Bogota.

Keywords: Didactics analysis, closed questions, evaluation instruments, tests, solving problems.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo muestra la investigación, de carácter pedagógico, realizada entre el segundo semestre de 2014 y el primer semestre de 2015 donde a través de diferentes fases metodológicas se implementó una propuesta de intervención en el aula, que consistió en el análisis previo de 10 preguntas del examen SABER 11 pertenecientes a la prueba de matemáticas del componente numérico-variacional, para luego ser mediadas en el aula de clase por medio de 5 estrategias de aplicación, cada una con intencionalidades diferentes que pudieron dar evidencia de algunos aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos que los estudiantes de once de dos colegios oficiales de Bogotá tuvieron en cuenta para dar respuesta a las mismas.

La investigación contiene los análisis a posteriori, producto de la sistematización de información cualitativa y cuantitativa, al describir y caracterizar accionares de los estudiantes frente a este tipo de preguntas presentadas en diferentes formatos, que contribuyeron al alcance de los objetivos propuestos, el límite de las pretensiones del trabajo investigativo y el englobe de las conclusiones. Al igual, se incluye las reflexiones profesionales sobre el quehacer docente adheridas a la implementación de este tipo de dinámicas dentro del aula de clase frente a la contextualización, comprensión y preparación de los estudiantes a este tipo de pruebas estatales.

El trabajo investigativo tuvo un enfoque metodológico mixto y una gran cohesión teórica con la Didáctica de la Matemática; además se resalta las generosas características que tiene la *visibilización del pensamiento* dentro de los procesos de recolección de información y su eventual tratamiento analítico.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. JUSTIFICACIÓN

La implementación de preguntas con estructura similar a las diseñadas por el ICFES para su examen SABER 11 se ha convertido en práctica metodológica recurrente del docente dentro del aula de clase, quien busca preparar a los estudiantes para el momento de su presentación. No obstante, detenerse en los análisis previos de las preguntas al momento de someterlas con los estudiantes y, en la interpretación y significado de los resultados que arrojen las respuestas, podrá ofrecer insumos de investigación, donde se cohesionan estrategias de resolución de los estudiantes, rastreo de errores de interpretación de las preguntas, razones de escogencia de las opciones de respuesta y alcances (*perímetro conceptual*) de las preguntas; lo anterior implicará realizar, de forma exhaustiva, la descripción del andamiaje o estructura de cada una de ellas, considerando el análisis de múltiples variables con base en construcciones teóricas aportadas por la Didáctica de la Matemática o por el ICFES.

Así; y tomando en consideración los resultados históricos en este examen para las instituciones educativas INEM de Kennedy y Gran Yomasa, resulta importante generar un trabajo de investigación que pretenda caracterizar aspectos conceptuales, de forma y método que utilizan los estudiantes al momento de responder preguntas parametrizadas y liberadas por el ICFES; a través de un análisis cuidadoso de cada una, para confrontar y contrastar lo que se prevé en un *análisis didáctico* previo y lo que arrojan los resultados de su implementación en el aula; de modo que el producto teórico de la investigación pueda describir estos procesos y sentar algunas conclusiones sobre tales dinámicas de trabajo; lo anteriormente dicho se extiende a saber:

- Análisis de algunas preguntas relativas al componente numérico variacional liberadas por el ICFES en relación con errores, dificultades, estrategias, y representaciones asociadas al perímetro conceptual de la pregunta.
- Deducción de posibles causas del rendimiento en la prueba de matemáticas del examen SABER 11 por parte de los estudiantes de las dos instituciones mencionadas.
- Construcción de relativo conocimiento alrededor de las estrategias de resolución y errores por parte de los estudiantes durante la implementación de este tipo de preguntas.
- Análisis de los alcances, ventajas y desventajas, en términos pedagógicos, de la implementación consciente, intencional y planificada de preguntas diseñadas bajo los parámetros de la prueba de matemáticas del examen SABER 11.

Traslapado a lo anterior se encuentran los diagnósticos realizados en las poblaciones objetivo que comprenden la aplicación de la prueba de Matemáticas del examen SABER 11 de 2012 liberada por el ICFES y los comparativos de los resultados obtenidos en la prueba de matemáticas en ambas instituciones educativas en los años 2012 y 2013, que vienen a resaltar la importancia de la investigación en la comunidad docente como referente de entendimiento de las consideraciones que tienen los estudiantes al solucionar este tipo de pruebas.

1.2. Pregunta/Preguntas de investigación:

Pregunta General

¿Qué aspectos, conceptuales, estructurales y metodológicos, considera el estudiante al momento de responder preguntas relativas al componente numérico variacional diseñadas bajo los parámetros de las pruebas SABER?

Preguntas Específicas

- *¿Cómo se puede caracterizar una pregunta relativa al componente numérico variacional en función de aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos?*
- *¿Qué conceptos aplica y considera relevantes el estudiante cuando responde una pregunta tipo SABER 11?*
- *¿De qué manera comprende el estudiante una pregunta tipo SABER 11? ¿Es comprensible la pregunta? ¿Es claro el tipo de respuesta que debe generar?*
- *¿Cuáles son algunos caminos estratégicos (específicos para cada pregunta) empleados por los estudiantes para intentar dar respuesta a una pregunta tipo SABER 11?*

En coherencia con las anteriores preguntas se definen los objetivos de la investigación:

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

- Caracterizar los aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos que los estudiantes consideran al responder preguntas diseñadas bajo los parámetros de las pruebas SABER 11, para generar una propuesta pedagógica basada en la implementación de éstas y, establecer posibles causas de los rendimientos que han presentado las poblaciones objetivo.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Caracterizar los desempeños de las instituciones educativas en relación con la prueba SABER matemáticas 2013.
- Construir una propuesta para analizar desde una perspectiva didáctica ítems de la prueba de matemáticas del examen SABER 11 entorno a aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos a través del diseño de un instrumento específico.
- Identificar los conceptos que aplican los estudiantes en la solución de las preguntas seleccionadas.
- Establecer los indicios de índole estructural que den cuenta de la comprensión de una pregunta por parte de los estudiantes frente al proceso de solución de preguntas tipo SABER 11.
- Evidenciar las heurísticas (Schoenfeld, 1985) que desarrollan los estudiantes en torno a la solución de las preguntas seleccionadas.
- Establecer argumentos que reflejen y delimiten aspectos a considerar dentro de la preparación de los estudiantes para la aplicación de este tipo de pruebas, respaldados por resultados sistematizados de manera cuantitativa y cualitativa.
- Constituir razones de carácter pedagógico que explique en qué medida la aplicación de preguntas bajo los parámetros de las pruebas SABER en el aula de clase de matemáticas, puede constituirse como una propuesta metodológica que arroje resultados e indicadores de procesos de enseñanza aprendizaje y su capacidad para fortalecerlos.

1.4. Contextos institucionales

Es de gran importancia contextualizar el marco operacional donde se lleva a cabo el trabajo investigativo, esto como antesala de la aplicación y el análisis de resultados de los pilotajes y pruebas que se realicen allí.

En Colombia, el ICFES es la entidad especializada en ofrecer servicios de evaluación de la educación en todos sus niveles, y en particular apoya al Ministerio de Educación Nacional en la realización de los exámenes de Estado y en adelantar investigaciones sobre los factores que inciden en la calidad educativa, para ofrecer información pertinente y oportuna que contribuya al mejoramiento de la calidad de la educación, es decir que adelantar la investigación y asociar los eventuales resultados con la información que otorga el ICFES estará coadyuvando a los principios de cualquier ejercicio educativo y pedagógico que se suscita al interior de una institución educativa, y particularmente en el aula de clase de matemáticas, encerrados en la mejora constante de los procesos de enseñanza aprendizaje.

1.4.1. Colegio INEM de Kennedy

Población/Contexto

Guzmán y Ghitis (2012) definen contexto como: "*Un espacio simbólico compartido, que se expresa por medio del lenguaje, de símbolos, de costumbres, de hábitos, de rutinas, que influyen directamente en las personas. Contribuye a configurar pensamientos, ideas, afectos, concepciones, representaciones sociales, cultura. Es el marco que da sentido a las acciones y a la interpretación de las experiencias de vida"*, en ese sentido el contexto "*inemita*" se refleja en la influencia del colegio sobre la comunidad e incluso sobre la localidad, es tal que se ha llegado a hablar de una cultura *inemita*, el aporte en términos de egresados y la cobertura ofrecida es tan amplia que hablar del INEM de Kennedy es hablar de diversidad y grandeza.

El modelo de educación ofrecido mediante modalidades hace que al interior del colegio se generen unas subculturas propias de cada modalidad, así es común identificar estudiantes de acuerdo a las particularidades de cada modalidad, por ejemplo, aquellos estudiantes de la modalidad de educación física y recreación son por lo general deportistas con grandes habilidades físicas.

El espacio geográfico que ofrece el colegio es muy rico en zonas verdes y de recreación, permitiendo a los estudiantes el desarrollo habilidades físicas, de esparcimiento y recreación, pero también es un punto débil en términos de control pues para el estudiante es fácil evadir los espacios académicos del colegio, es por eso que se hace un fuerte énfasis en la autonomía y responsabilidad del estudiante en las direcciones de curso.

La Institución Educativa Distrital INEM Francisco de Paula Santander está ubicada en la localidad octava (Kennedy) de Bogotá compartiendo la UPZ Kennedy central con once instituciones más, y es quizá el colegio con mayor extensión geográfica y población estudiantil de la capital; después de 44 años la planta física del colegio está siendo sometida a una reestructuración considerable, un conjunto de edificios modernos que garantizan una mayor cobertura y atención a necesidades especiales para algunos miembros de la comunidad está por terminar de construirse. El INEM Francisco de Paula Santander cuenta con cerca de 5000 estudiantes distribuidos en dos jornadas, ofreciendo educación técnico-diversificada en 16 modalidades diferentes.

La investigación está centrada en un grupo de estudiantes del grado décimo en 2014, y undécimo en el año 2015, estudiantes con edad entre 14 y 18 años y razón aproximada 1 a 1 entre hombres y mujeres cuyo rendimiento académico es en promedio básico-medio, grupo al que se acompaña en los procesos de aprendizaje en los años 2014 y 2015.

El colegio tiene 6200 estudiantes matriculados en las jornadas tarde y mañana, clasificados en 177 cursos con un promedio de 34-38 estudiantes por cada uno, por otro lado la planta docente está conformada por 268 docentes distribuidos para preescolar, primaria y bachillerato en ambas jornadas.

1.4.2. Colegio Gran Yomasa

Considerar la condición principiante de la Institución Educativa Distrital Gran Yomasa frente a la presentación de la prueba estatal SABER 11 dada su primera promoción de bachilleres para el año 2012, podrá considerarse como una posible causa de los resultados por debajo de la media nacional en el área de matemáticas, sumado a la aparente falta de compromiso de los estudiantes con su preparación y disposición frente a este tipo de actividades, así, augurar una mejoría inmediata resulta poco prometedor; sin embargo proporcionar herramientas y describir condiciones de la población en el curso de esta investigación, servirá de aliciente en la puesta en marcha de planes de contingencia basados en resultados sistematizados con conclusiones de carácter cuantitativo y cualitativo.

Población/Contexto

El conjunto de condiciones que describe el entorno docente son un cúmulo de información importante que recoge las intenciones investigativas del mismo; sitúa de forma contextualizada a sujetos externos que puedan realizar lectura de sus dinámicas pedagogías para que exista un entendimiento y mayor contemplación hacía el trabajo enmarcado en la investigación.

Toda población y su contexto contienen aspectos que pueden considerarse común denominador dentro de la descripción de estos y los ambientes escolares; sin embargo, cada uno corresponde a particularidades propias que establecen la necesaria diferenciación entre uno y otro. Construir una caracterización completa del contexto implica tener en cuenta múltiples dimensiones que no establecerán de manera exacta la recreación de las relaciones provenientes en una institución educativa, siendo entonces propósito el resaltar las condiciones y variables que obedezcan al mapeo específico de ésta.

El colegio Gran Yomasa se encuentra asociado a la UPZ de nombre homólogo, actualmente se encuentra en restructuración de planta física dado que durante 33 años no había sufrido ninguna mejora sobresaliente, esto debido a las condiciones y cobertura distintas de aquella época; ahora, bajo las nuevas políticas de la Secretaría de Educación de Bogotá, la institución ha hecho parte de la lista principal de adecuaciones arquitectónicas.

Por otro lado, el colegio es quien lidera junto a otros dos pertenecientes a esta UPZ, la atención y cobertura de estudiantes con necesidades especiales, siendo especialista en estudiantes de baja visión y ciegos; así mismo, el centro educativo ha representado a la localidad de Usme en el carnaval de Distrito en los años 2011 y 2012, liderazgo del área de Artes en la jornada tarde, esfuerzos que han merecido reconocimientos locales y distritales.

Esta institución es considera de las de más baja cobertura en términos de cantidad de estudiantes, todo mediado por su planta física, de modo que se ha continuado un trabajo bastante familiar donde el control puede considerarse sencillo, dado que la población escolar viene de la base (preescolar). Hasta el año 2012 se tuvo la primera promoción de bachilleres, pues sólo hasta ese año se pudo ampliar un poco la estructura física. Antes, sólo graduaban hasta la básica, de modo que la inyección de proyectos y recursos humanos se ha visto en crecimiento, dada la novedad educativa que presenta actualmente la institución. Lo anterior viene a responder al carácter, antes mencionado, de familiaridad entre el barrio (sector) y el colegio, pues al manejar una población tan pequeña es muy fácil el continuar seguimientos académicos y disciplinarios, tratando de mantenerse una armonía entre las necesidades y expectativas de la comunidad y el colegio.

Por segundo año (2012 y 2013) se han presentado las pruebas SABER 11, con categorización MEDIO, teniéndose muy poca información histórica en este tipo de pruebas; esta característica resulta de gran relevancia para el análisis de información previa a la que hubiese lugar. Así, el análisis y recolección de información es con base a un muestreo pequeño con características definibles y que cumplen con un bagaje asociado a docentes quienes los han acompañado la mayoría de años escolares en su primaria, básica y media-vocacional.

La investigación se centra en la población de 2014 para el grado décimo y, en 2015, en grado undécimo, estudiantes entre 14 y 17 años con aproximadamente una razón 1 a 1 entre hombres y mujeres, quienes en promedio tiene rendimiento académico medio-alto y he orientado su acompañamiento desde el área de matemáticas durante los últimos 2 años.

El colegio tiene 487 estudiantes matriculados para la jornada tarde, distribuidos en 14 grupos (uno por cada grado de preescolar a once, a excepción de primero y sexto con 2 grupos) con un promedio de 34-35 estudiantes por cada uno, por su lado, la planta docente está constituida por 20 profesores, 2 de educación especial para niños ciegos o con baja visión, 8 de primaria y 10 de bachillerato.

Principales problemáticas de las poblaciones objeto:

A continuación se presentan las principales problemáticas que la descripción de las poblaciones objetivo arrojan, teniendo como base el conceso de las condiciones de cada una y las lecturas de orden investigativo, didáctico y pedagógico que actores activos de estas comunidades, como lo somos, podemos definir que:

Pruebas de estado SABER 11: Durante los dos años en que se han presentado las pruebas SABER 11 los resultados han demostrado un promedio por debajo de la media nacional, específicamente en las pruebas de matemáticas, es el caso de la IED Gran Yomasa. Para el INEM Kennedy la jornada tarde ha presentado un histórico en los últimos cinco años bajo la categoría ALTO en las pruebas SABER 11, durante los dos últimos años se observa un promedio ligeramente por encima de la media nacional en las pruebas de matemáticas, pero por debajo de la media distrital.

Orientación profesional: Los estudiantes no demuestran de manera directa sus intereses y convicciones acerca de su crecimiento futuro, donde se evidencie sus expectativas y se intente desde el colectivo docente la orientación en el proceso de desarrollo vocacional frente a las dinámicas sociales y, cómo enfrentar las necesidades y demandas de la vida después del colegio. En el INEM Kennedy pese a la elección de modalidad es muy frecuente encontrar estudiantes que expresan incomodidad y desagrado por su modalidad, esto se da en parte por la falta de orientación hacia la elección de esta y por la alta demanda que presentan algunas de forma específica.

Bajo rendimiento académico: Los resultados que se muestran periodo a periodo dentro de las instituciones no son alentadores, se ha demostrado una desmejora continua sobretodo en el grado que para 2014 será undécimo, pues influencia de orden social ha producido resultados muy heterogéneos que distan de la comunión o comportamiento similar, no atípico, de los estudiantes de un mismo grado y grupo.

Aptitud lectora: Las características que definen a los estudiantes pertenecientes a las poblaciones en cuestión, en sus habilidades lectoras y comprensivas son bajas, donde se ha podido describir, al igual que en la mayoría de cursos, competencias básicas donde los estudiantes poseen poca capacidad de generar reflexiones frente a la comprensión de lectura, así; dicho espectro influirá en el desarrollo de otras aptitudes, especialmente matemáticas, donde confluyen estas habilidades y responden de algún modo los bajos resultados en los diferentes sistemas de evaluación interna y externa.

Uso e interpretación de la pregunta: Dentro de nuestra experiencia docente podemos inferir que, los estudiantes no reconocen el objetivo (qué busca) de las preguntas que diseñadas bajo los parámetros de las pruebas SABER 11, luego no determinan qué se pregunta, qué se pide, esto debido a múltiples variables que pueden caracterizarse por la poca familiaridad en la comunidad educativa con las políticas, propósitos e interés de este tipo de pruebas. De igual modo, se ha podido evidenciar luego de conversaciones académicas dentro del seno de los grupos de trabajo docente, como estos a su vez no distinguen ni manejan de manera óptima esta prueba, pues no han tenido un acercamiento crítico y reflexivo donde pueda analizarse varios aspectos alrededor de esta.

Desarrollar entonces un trabajo con estudiantes, en un primer momento, de grado décimo y luego undécimo de estas instituciones educativas, donde se diseñen preguntas con los requerimientos específicos brindados por el ICFES o tomados de la base de datos que ofrece la misma entidad, y se haga necesario dar respuesta a varios de los cuestionamientos sugeridos anteriormente, pueda generar algunos argumentos y desarrollos conceptuales en los estudiantes y docentes para la implementación de una forma de trabajo consciente, donde prime la comprensión de la pregunta como una apuesta de intervención en el aula emergente de mejora en los resultados de las pruebas SABER, caracterizándose así dificultades, debilidades y fortalezas en este tipo de implementaciones pedagógicas.

En la constante caracterización de las poblaciones objeto se realizan dos diagnósticos diferentes en cada una, relacionados en el siguiente apartado del trabajo; en una institución (INEM de Kennedy) se aplica en su totalidad la prueba de matemáticas del año 2012, mientras, en la otra institución (Gran Yomasa) se implementa una par de preguntas con un formato diseñado previamente, que busca formular cuestionamientos alrededor de las comprensiones que puedan tener los estudiantes sobre estas.

1.5. Diagnósticos – Análisis de resultados (Exámenes SABER 11 2012/2013)

Para enmarcar la propuesta de trabajo investigativo se realizó una prueba diagnóstico en la institución educativa INEM Kennedy tomando como referencia la prueba de matemáticas perteneciente al cuadernillo del examen SABER 11 (2012-1) que sirve como ejemplo de preguntas para la contextualización libre de los estudiantes con el tipo de evaluación dispuesta por el ICFES.

En la IED Gran Yomasa se realizó un análisis estadístico del histórico de la población en la presentación del examen saber 11, lo que permitió caracterizar la institución en relación a su desempeño en la prueba y establecer comparativos entre las dos jornadas, las diferentes áreas evaluadas así como los componentes y competencias propios del examen de matemáticas. Considerando el tamaño de la población de la IED INEM Kennedy que en relación con la IED Gran Yomasa es significativamente más amplia (24cursos vs 2cursos) se tomó la decisión de omitir el análisis y diagnóstico para la primera dado que la información necesaria para la elaboración de éste implicaría el manejo y la recolección de un extenso número de datos cuyo acceso no fue posible por motivos circunstanciales de la institución.

1.5.1. Diagnóstico/Resultados SABER 11 (2013) INEM de Kennedy

La apertura del trabajo con los estudiantes en pro de la investigación se dio a partir de la implementación de una prueba tipo ICFES, para dicha implementación se destinó el tiempo de la clase de matemáticas del día (2 horas). Se dio a conocer al grupo de estudiantes los objetivos del trabajo de investigación y las implicaciones que este tiene en el desarrollo de las futuras sesiones de clase, así como la conveniencia del mismo en términos de sus posibles desempeños en las pruebas estatales. Los objetivos de la implementación son: iniciar a los estudiantes en la resolución de preguntas tipo ICFES, la posible identificación de dificultades y limitaciones en el desarrollo de este tipo de pruebas y caracterizar el desempeño del curso frente a la prueba.

Se desarrolló la prueba durante el tiempo estimado para la solución de la misma enfatizando en la importancia de la honestidad para el satisfactorio proceso de investigación, los estudiantes abordaron la prueba de manera individual en un lapso no mayor a dos horas y registraron sus respuestas en un formato especial diseñado con este objetivo, y que servirá de insumo para el análisis de los resultados obtenidos.

Sobre los resultados encontrados: 32 de los 39 estudiantes del curso desarrollaron la prueba, 24 es el número de preguntas que constituyen, el mayor número de preguntas acertadas por parte de un estudiante fue 15 mientras el menor fue 4, el promedio del grupo respecto al total de preguntas acertadas es 8,96, el siguiente grafico describe dichos resultados:

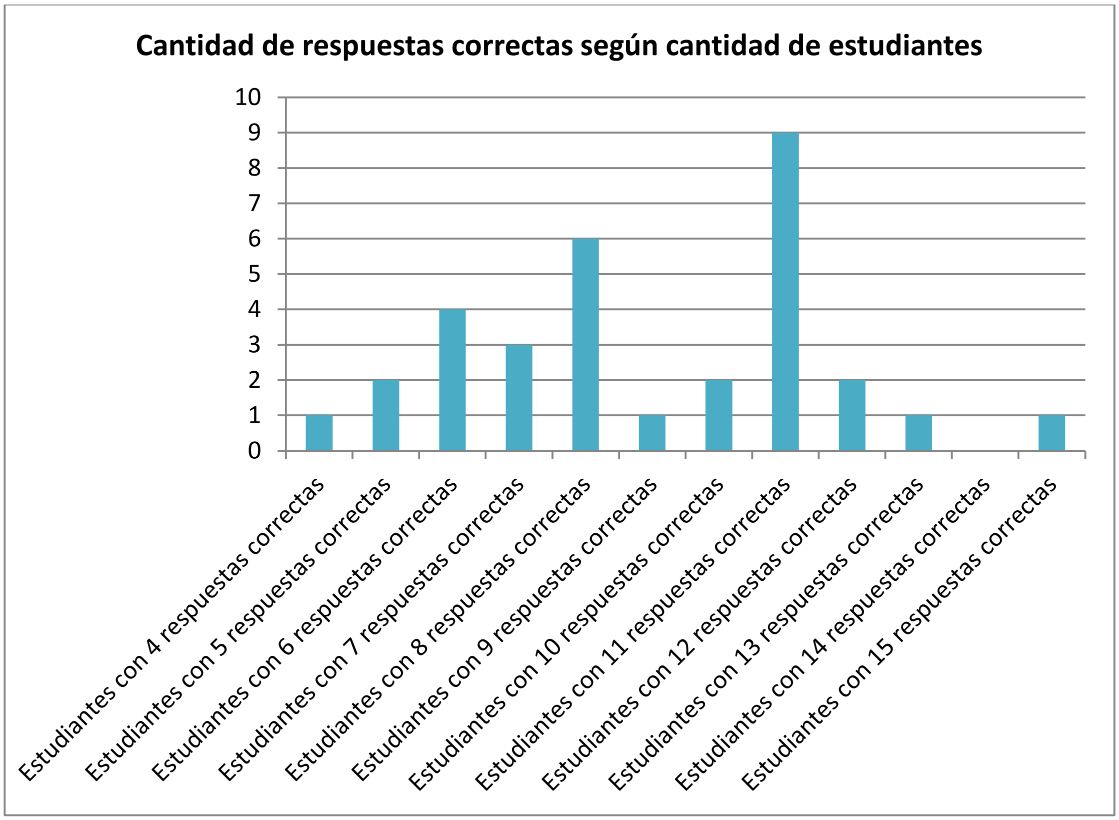


Diagrama Barras 1: Cantidad de estudiantes con igual cantidad de respuestas correctas para la prueba diagnóstico del colegio INEM de Kennedy.

Dentro del análisis propio del desempeño en la prueba encontramos que hubo un conjunto de preguntas en las que gran parte de los estudiantes respondieron de manera correcta: 46, 47, 48 y 53, así como un conjunto de preguntas que causaron gran dificultad: 59,64, 68 y 69. El anterior análisis se puede ver reflejado en el siguiente gráfico:

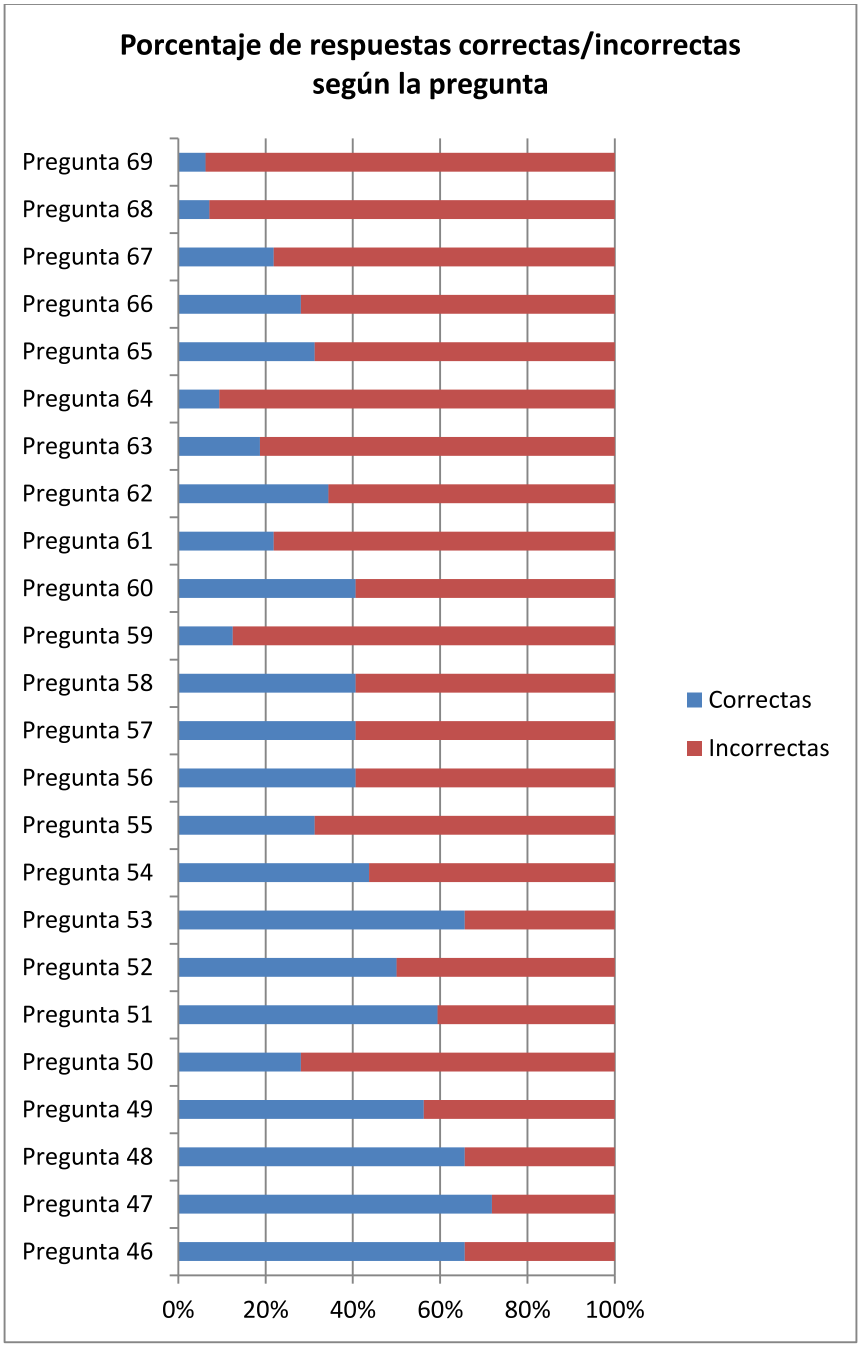


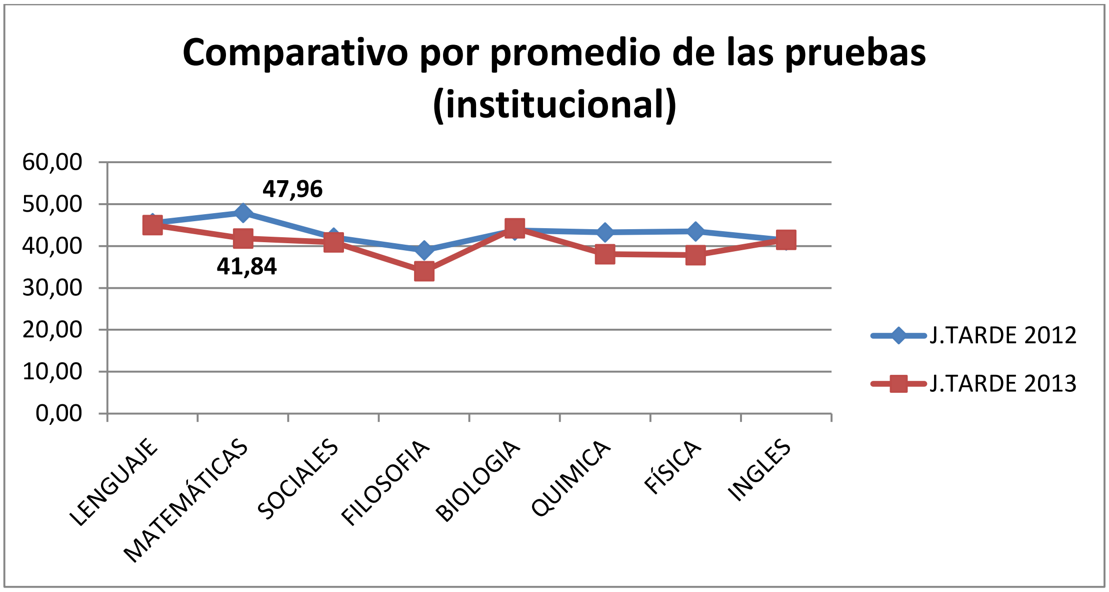
Diagrama Barras 2: Razón entre porcentajes de respuestas correctas e incorrectas según la pregunta para la prueba diagnóstico del colegio INEM de Kennedy.

Al hacer un análisis sobre la taxonomía del grupo de preguntas en las que se presentaban mayores aciertos y dificultades encontramos que para las primeras, éstas están asociadas a la comprensión de las características de los objetos geométricos, de la interpretación de datos y la formulación de inferencias; respecto al conjunto de preguntas en que se presentaron dificultades encontramos que éstas indagan por la comprensión de los números, las operaciones aritméticas, el reconocimiento de regularidades y la identificación de variables.

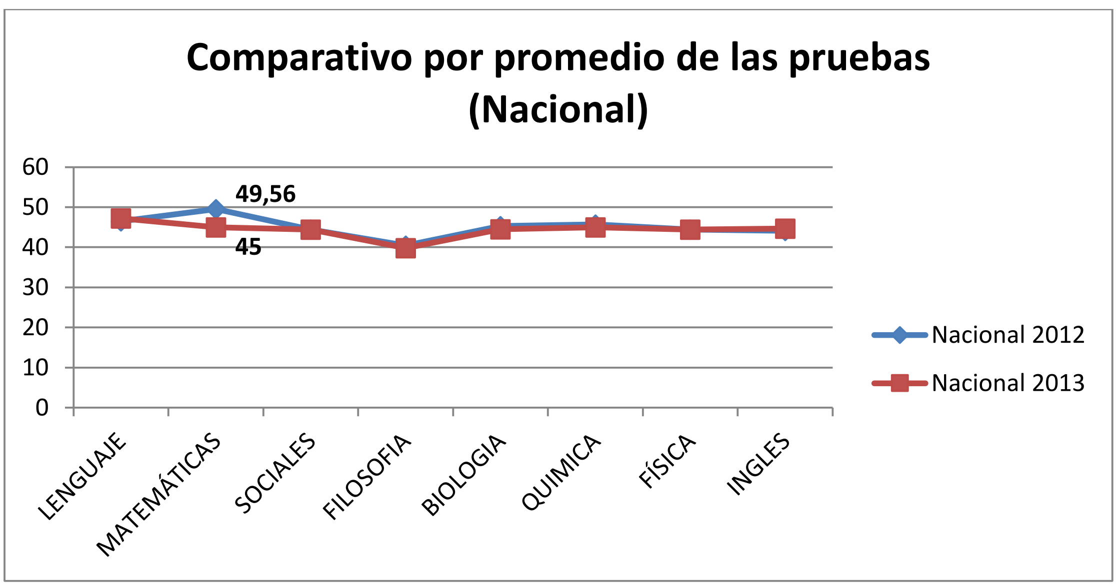
Lo anterior respalda la elección del grupo de preguntas que serán objeto de aplicación en la investigación, pues queda en evidencia que el componente numérico-variacional puede proporcionar mayor riqueza alrededor de los aspectos considerados en la pregunta de investigación que los otros componentes, dadas las dificultades que presenta el grupo de estudiantes cuando resuelven preguntas asociadas a él.

1.5.2. Diagnóstico/Resultados SABER 11 (2012-2013) IED Gran Yomasa

El colegio Gran Yomasa (JT) (I.E.D) tuvo en 2012 su primera promoción de bachilleres siendo los primeros estudiantes en presentar las pruebas estatales SABER 11. Para 2013 los resultados estuvieron por debajo del promedio obtenido en el año inmediatamente anterior (Gráfica 1) comportamiento similar a los promedios nacionales en el núcleo común (Gráfica 2), donde la mayoría de las pruebas descendieron en su curva.



Gráfica 1: Comparativo entre los promedios de las pruebas en los años 2012 y 2013 para la jornada tarde del colegio Gran Yomasa.



Gráfica 2: Comparativo entre los promedios de las pruebas en los años 2012 y 2013 a nivel nacional.

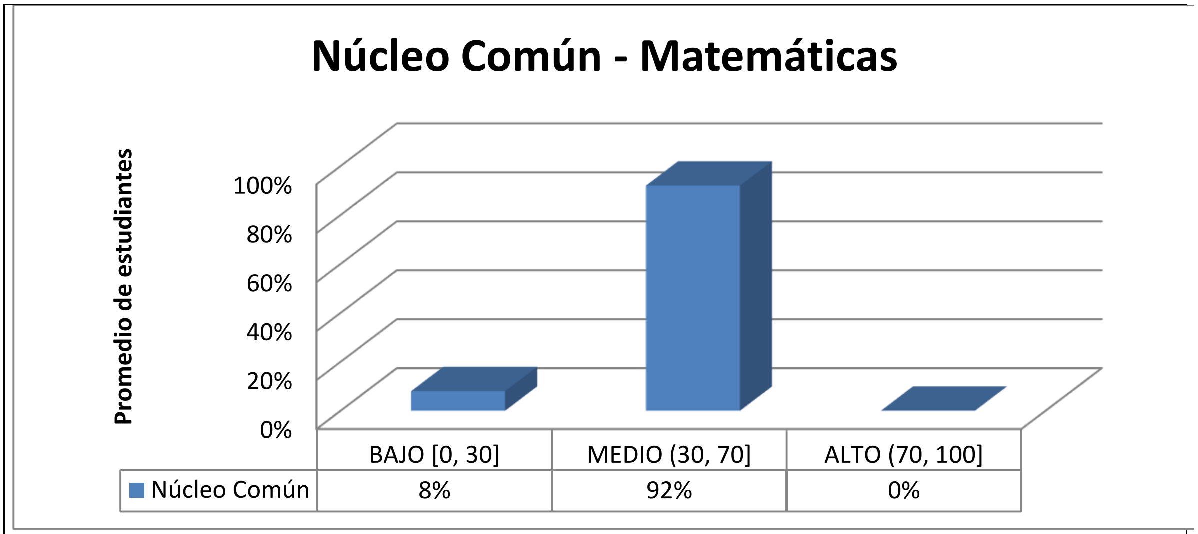
En ambas gráficas (Gráfica 1, Gráfica 2) se señaló los promedios nacionales e institucionales para los dos años, que muestra como el promedio del colegio estuvo varios puntos por debajo del nacional.

El puntaje de la prueba de matemáticas se desglosa en un resultado general para la sumatoria del núcleo común y estima valores para los componentes y competencias propios de la asignatura, calificándose cada uno por un puntaje de 0 a 10 donde se deriva las escalas que se muestran en la Tabla 1, así:

Núcleo común	**Desempeño**
Matemáticas	Bajo: **[0, 30]** Medio: **(30, 70]** Alto: **(70, 100]**
Componente	**Desempeño**
Aleatorio	SB: Significativamente bajo **[0, 2]** B: Bajo **(2, 4]** M: Medio **(4, 6]** A: Alto **(6, 8]** SA: Significativamente alto **(8, 10]**
Geométrico-Métrico	
Numérico-Variacional	
Competencia	**Desempeño**
Comunicación	Bajo **I [0, 3]** Medio **II (3, 7]** Alto **III [7, 10]**
Razonamiento	
Resolución de problemas	

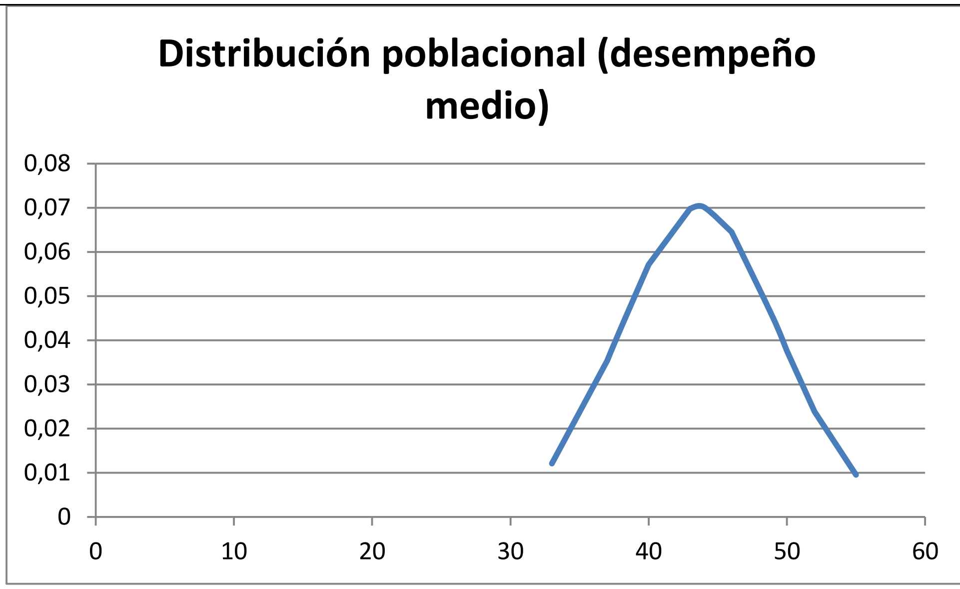
Tabla 1: Tabla de interpretación de resultados individuales para la prueba de matemáticas del examen SABER 11.

La promoción 2013 de la jornada tarde del colegio Gran Yomasa constó de 25 estudiantes quienes obtuvieron un promedio de 41,84 sobre 100 de matemáticas, 3 puntos por debajo del nacional. Las siguientes gráficas (Gráfica 3, Gráfica 4, Gráfica 5) muestran la distribución de la población estudiantil en los desempeños en matemáticas, como prueba del núcleo común, sus componentes y competencias:

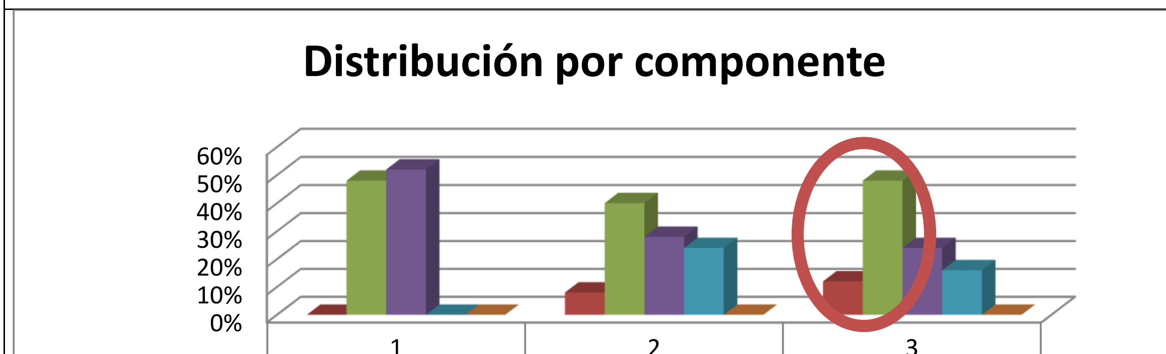


Gráfica 3: Distribución porcentual de los estudiantes según su clasificación en el rendimiento del núcleo común de la prueba de matemáticas de 2013 del colegio Gran Yomasa.

La mayoría de la población, un 92%; se encuentra en el desempeño medio con puntajes entre 30 y 70 puntos, teniendo como mínimo y máximo valor 13 y 55, luego la distribución de la población en solo el desempeño medio se comporta de manera normal con la mayoría de la población cerca al promedio (41,84) (Gráfica 3.1), así:



Gráfica 3.1: Distribución de los estudiantes con desempeño medio en la prueba de matemáticas del examen SABER 11 de 2013.



	1	2	3
SB [0, 2]	0%	8%	12%
B (2, 4]	48%	40%	48%
M (4, 6]	52%	28%	24%
A (6, 8]	0%	24%	16%
SA (8, 10]	0%	0%	0%

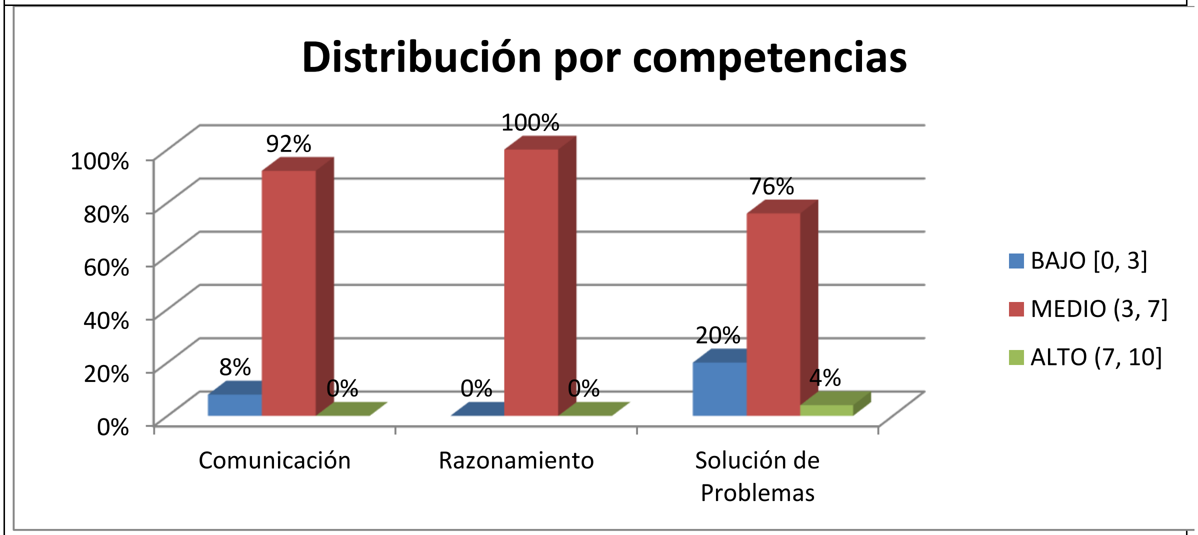
Gráfica 4: Distribución del porcentaje de estudiantes por su desempeño según los componentes para la prueba de matemáticas del examen SABER 11 de 2013 para el colegio Gran Yomasa.

1: Aleatorio

2: Geométrico-Métrico

3: Numérico-Variacional

La mayoría de la población se acumula para los desempeños *Significativamente Bajo*, *Bajo* y *Medio*, con puntajes entre 0 y 6, sin embargo particularmente en el componente Numérico-Variacional se agrupa el 60% de los estudiantes en SB y B como se observa en los resaltes de color rojo.



Gráfica 5: Distribución porcentual de los estudiantes según la competencia y su desempeño en la prueba de matemáticas del examen SABER 11 de 2013 para el colegio Gran Yomasa.

Para cada componente se evalúa los tres tipos de competencias, aunque más de la mitad de la población se ubican en desempeño *Medio*, la quinta parte de los estudiantes se encuentran en *Bajo* al momento de resolver una situación problema, siendo el pico más alto de las barras azules.

De la información anterior se resume que:

- El rendimiento promedio de los estudiantes de 2013 en la prueba de Matemáticas del examen SABER 11 estuvo por debajo de la media nacional y de los resultados en la misma prueba de los bachilleres de 2012.

- Más del 90% de la población tuvo un desempeño *Medio* en la prueba de Matemáticas para el 2013 con los puntajes mínimo de 13 y máximo 55 puntos.
- Ningún estudiante tuvo desempeño *Alto* en la prueba de Matemáticas para el examen SABER 11 de 2013.
- El 60% de la población tuvo desempeño *Significativamente Bajo* y *Bajo* en el componente *Numérico-Variacional*, siendo un dato de suma importancia para la elección de las preguntas a pilotear.
- La distribución de los estudiantes se comportó de manera *normal* para el desempeño *Medio* en el puntaje de la prueba de Matemáticas del examen SABER 11 de 2013.
- El 20% de los estudiantes está en desempeño bajo al momento de enfrentarse a preguntas que corresponden a la competencia de resolución de problemas.

2. ANTECEDENTES

Los antecedentes de carácter investigativo alrededor de las pruebas SABER y el uso pedagógico de los ítems en el aula son escasos y poseen cierto nivel de adherencia respecto al actual trabajo. Así, se resaltan tres investigaciones, dos pertenecientes a la Universidad Nacional de Colombia y una, producto de la clasificación de ítems de la prueba SABER 5 de 2009.

- *Estudio de sesgo pruebas SABER 2009* (Rico, Herrera, & Padilla, 2012)

Este trabajo propuso realizar un estudio de Sesgo con 250 preguntas detectadas con DIF[1] por parte del ICFES, para las áreas de Ciencias, Matemáticas y Lenguaje, en los exámenes SABER 5° y SABER9° del año 2009. Se tienen en cuenta las mismas variables que el ICFES usó para los análisis de DIF: Género, Sector y Zona.

Los objetivos, general y específicos, se relacionan a continuación:

Objetivo General: Explorar las causas del funcionamiento diferencial de ítems, detectado en los análisis estadísticos realizados por parte del ICFES para las variables: sector (oficial-no oficial) y zona (rural-urbana) en el examen SABER 5° de 2009.

Objetivos específicos:

- Indagar las causas del sesgo en los ítems que sean identificados con este problema para cada una de las variables del estudio.
- Identificar cuales ítems presentan problemas de sesgo y cuales funcionan diferencialmente por otras causas diferentes al sesgo.
- Implementar la metodología de entrevistas cognitivas para la identificación de las fuentes de sesgo.

[1] **Funcionamiento Diferencial del Ítem:** "un ítem presenta DIF cuando grupos igualmente capaces presentan una probabilidad distinta de responderlo con éxito o en una determinada dirección en función del grupo al que pertenecen (Goméz, Hidalgo, Guilera. 2010)."

Una conclusión importante de este trabajo resulta ser el hecho de un mejor rendimiento en el resultado de estas pruebas en el sector, como variable, “no oficial” sobre el “oficial”.

- *Sesgo cultural en los ítems de las pruebas del examen SABER 11 en Colombia* (Cuevas Mendoza, 2013)

El estudio se encargó de la identificación de posibles fuentes de sesgo cultural en los ítems de las pruebas que componen el examen SABER 11°, tomando como grupo focal a los estudiantes indígenas. En una primera fase se detectaron los ítems con DIF en siete pruebas aplicadas en el segundo semestre de 2006 y en el primero de 2007, a través de los procedimientos Mantel-Haenszel y Diferencia de la dificultad. Posteriormente, ítems de las pruebas de Lenguaje, Matemáticas, Biología y Sociales que habían sido detectados fueron revisados en grupos focales. Los resultados muestran que los procedimientos usados para la detección de DIF son adecuados para su aplicación a datos reales y bajo las condiciones del examen SABER 11°.

El objetivo general del estudio se describe a seguir:

Establecer posibles fuentes de sesgo cultural en los ítems del examen SABER 11° aplicado en el segundo semestre de 2006 y en el primer semestre de 2007, con el fin de minimizarlas a través de propuestas de pautas dirigidas a evitar el sesgo cultural y que sirvan para futuros procesos de construcción de ítems.

A manera de conclusión el análisis substantivo de los ítems, sugirió tres potenciales fuentes de sesgo cultural que pueden ser transversales a las pruebas: experiencias más frecuentes en un grupo que en otro, epistemología de las comunidades de origen y problemas de construcción, siendo esta última relativamente nueva frente a lo reportado en la literatura. Adicionalmente, se encontraron otras cuatro posibles fuentes emergentes: tecnicismos, colonialismo religión-Estado, juicios de valor hacia teorías sociales o de mercado y escuela tradicional. Todas estas posibles fuentes sirvieron de base para la elaboración de unas primeras pautas para evitar el sesgo cultural en los ítems.

- *Pruebas saber 2009. Análisis del tópico de geometría y medición* (Tarapuez, Marmolejo, & Blanco, 2010)

El trabajo investigativo con características de taller que tuvo lugar en el 13° encuentro colombiano de matemática educativa, reconoce a las pruebas externas como un importante instrumento que suscita revisar y transformar las prácticas de enseñanza imperantes en las instituciones educativas; así muestra la necesidad de contar con instrumentos que permitan categorizar lo que en ellas se evalúa. En el taller la atención recae en las Pruebas Saber aplicadas a estudiantes de grado quinto de Educación Básica, y se aplica sobre los ítems de matemáticas que le conforman una metodología de análisis que permite discriminarlos semiótica, cognitiva, matemática, fenomenológica y curricularmente.

Si bien no se conocen características a profundidad del documento revisado para la construcción de este antecedente investigativo, se infiere que las discriminaciones de análisis dentro de este trabajo se asocian de manera directa con la presente investigación, ya que los análisis desde una perspectiva didáctica que surgen para cada pregunta tienen en cuenta teoría de representaciones (semiótica) y algunos aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos (cognitiva, matemática y fenomenológica) en relación a los estudiantes y la Didáctica de la Matemática; de modo que se convierte en una adhesión histórica en la preocupación alrededor del análisis de preguntas y sus clasificaciones.

3. MARCO TEÓRICO

El marco teórico encierra variadas posturas pedagógicas y de la Didáctica de la Matemática que sustentan el trabajo investigativo, siendo importante describir el esquema de su presentación. En primera instancia [3.1] se tendrá, dado su papel primordial; la definición de *ítem* y su relación con la *pregunta* como base del examen SABER 11 y, específicamente, en la prueba de matemáticas; luego la distinción entre *ejercicio* y *problema* en el contexto de la Didáctica de la Matemática y, [3.2] descripción sobre la parametrización de las preguntas liberadas por el ICFES para la preparación de los estudiantes respecto al examen SABER 11 (Prueba de matemáticas). Para un tercer momento [3.3] se delimita la perspectiva didáctica que sostiene la forma en que se analizan los ítems [IAI] su concepción y sentido dentro de la investigación; luego [3.4], se delinean las características que componen los aspectos sugeridos dentro de la pregunta de investigación (conceptuales, estructurales y de método) y, finalmente [3.5], se realiza un enlace referencial alrededor del diseño de intervención en el aula y la visibilización del pensamiento.

3.1. Engranaje conceptual entre: *ítem* y *pregunta* – *ejercicio* y *problema*.

Las preguntas creadas por el *Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación* (ICFES) se pueden considerar cómo *ítems* de acuerdo con Sánchez (2012, pág. 1) al definirlos como una *Unidad básica de observación*:

> *Ítem*: Es la unidad básica de observación de una prueba objetiva. Se utiliza para medir conocimientos formales, habilidades cognitivas adquiridas a través de la experiencia y aprendizajes complejos producto de las dos primeras. No requiere de juicios personales del evaluador o de interpretaciones para calificar las respuestas correctas. Posee una respuesta única previamente establecida y acordada de manera colegiada.

De modo tal que una *pregunta* perteneciente al examen SABER 11 se cierne al concepto de *ítem*, ya que, mide las construcciones y elaboraciones conceptuales que los estudiantes tienen durante su ciclo escolar, poseen una única respuesta correcta y no admite interpretaciones subjetivas del ICFES como ente evaluador; con esto se admite para el trabajo de investigación la *pregunta* como *ítem* y el uso de ambas palabras (*pregunta* e *ítem*) será indistinto en cualquier momento del escrito. Sumado a lo anterior; la noción de *ítem* presenta demás características que integran los cimientos del trabajo investigativo y que cobran gran valor al momento al analizar los diferentes ítems.

Según Sánchez (2012, págs. 2-3) la estructura de un *ítem* está compuesta por tres aspectos a saber:

ESTRUCTURA DEL *ÍTEM*	1. **La base o cuerpo:** Expresa una situación o problema en forma de proposición. 2. **Las opciones de respuesta:** Son alternativas de respuesta a la base, de las cuales solo una correcta; las demás son distractores plausibles que tienen como función que el examinado demuestre que es capaz de discriminar la respuesta correcta. 3. **Las argumentaciones:** Son explicaciones que dan sustento a cada una de las opciones de respuesta.

Por otro lado el autor (Sánchez Restrepo & Espinosa Rodríguez, 2012) también advierte las características que debe poseer un *ítem*:

CARACTERÍSTICAS DE LOS *ÍTEMS*	✓ Evalúa contenidos vigentes. – Las *preguntas* del examen SABER 11 responde a condiciones enmarcadas en los *Estándares* y *Lineamientos* para cada asignatura escolar. ✓ Es una creación original del elaborador. – El ICFES es el único organismo encargado para la construcción de las preguntas pertenecientes a los diferentes exámenes diseñados (SABER 3, SABER 5, SABER 9, PRESABER 11, SABER 11, SABER PRO). ✓ Mide contenidos que no se responden por sentido común. ✓ No da pistas que conduzcan a la respuesta correcta. – Estas dos características en palabras de Schoenfeld (1985), corresponden a las *situaciones estereotípicas* y por ende respuestas estereotípicas, se comentará con mayor precisión más adelante sobre estas dimensiones. ✓ Emplea situaciones comprensibles y un vocabulario adecuado para la población objetivo. – Según el ICFES para cada uno de sus exámenes genera diferentes tipos de situaciones basados en diferentes niveles de comprensión de los estudiantes, o grupo, objetivo; por ejemplo: *Pregunta de preparación SABER 3 (Matemáticas)*

3. Observa los saltos que da la rana.

4 metros 7 metros 10 metros

¿Cuántos metros avanza la rana en cada salto?

A. 3 metros.
B. 4 metros.
C. 10 metros.
D. 13 metros.

Pregunta de preparación SABER 9 (Matemáticas)

1. Cuando en un grupo cada persona abraza a otra del grupo una sola vez, el número total de abrazos, a, se calcula mediante la expresión, $a = \frac{n\,(n - 1)}{2}$ donde n es el número de personas en el grupo.

¿Cuál es el valor de a para un grupo de 5 personas?

A. 3
B. 5
C. 10
D. 15

- ✓ <u>Está libre de información que puede ser ofensiva para algún grupo social.</u>
- ✓ <u>No favorece a un grupo determinado.</u> – Para las dos anteriores características se destacan las diferentes investigaciones (Cuevas Mendoza, Sesgo cultural en los ítems de las pruebas del examen SABER 11° en Colombia, 2013) (Rico, Herrera, & Padilla, 2012) realizadas con colaboración del ICFES para identificar si sus preguntas tienen o no sesgo, tratándose en lo posible de evitar, sin embargo se han llegado a conclusiones de pequeños porcentajes (en

	pruebas de 2007 y 2009) de *Funcionamiento Diferencial del Ítem* (sesgo) entre poblaciones de indígenas y no indígenas, y otras en comparativos entre instituciones rurales y urbanas al igual que privadas y públicas. ✓ Presenta estímulos claros que no se presten a más de una interpretación. ✓ Incluye únicamente la información necesaria y relevante para el planteamiento del problema y su solución. ✓ Está redactado de forma clara. ✓ Es independiente de otros ítems, la información contenida en uno no debe sugerir la solución ni debe ser requisito para contestar otro. – Las preguntas que fueron elegidas para el trabajo de investigación poseen un *cuerpo* o *base* para cada grupo de opciones de respuestas y no existe un contexto o estimulo de donde se derive más de una pregunta. ✓ Utiliza opciones de respuesta distintas a las de otros ítems. – El conjunto de opciones de respuesta de cada pregunta relacionada para la investigación difieren una de otra, donde se evidencia el tratamiento de esta característica en la prueba de matemáticas del examen SABER 11.

Dada la *estructura del ítem*, la *base o cuerpo* de este deberá responder a condiciones específicas más que al enunciado de un ejercicio, así, naturalmente; es necesario realizar contrastes y distinciones entre *problema* y *ejercicio* con marco referencial en la Didáctica de la Matemática; para ello acudiremos a varias conceptualizaciones de cada noción.

Desde la Didáctica de la Matemática se ha discutido ampliamente el tema de tales nociones, *problema* y *ejercicio*, así:

Para Llivina (1998, pág. 20) define *ejercicio* como:

> "Consiste en trabajar sobre cierto número de ejemplos idénticos o casi idénticos a los que ha resuelto en clase el profesor o se han explicado ya en el texto, es decir, situación que plantea una cuestión matemática cuyo método de solución es inmediatamente accesible al sujeto que intenta responderla, porque dispone de un algoritmo que relaciona lo que se da (datos) y lo que se pide".

Jiménez (2000, pág. 125) es enfático al describir *ejercicio* como aquella exigencia para actuar donde la vía de solución es conocida para el estudiante; a su vez Dwyer & Elligett (1970) comparan las características de un *ejercicio matemático* con las del *ejercicio físico* (corporal) así:

> "Es el uso repetido de destrezas -calistenia- tal que ellas [las destrezas] se desarrollen, sean retenidas, y sean puestas a tono. Un cantante practica la escala musical para tener precisión en el tono; un atleta trota para mantenerse en forma; un alumno hace ejercicios matemáticos para mantener e incrementar sus habilidades".

Con lo anterior se puede describir la importancia del *ejercicio* dentro del aula de matemáticas como una habilidad o destreza necesaria para la resolución de alguna situación *problema*, pero no se deberá considerar el foco principal en el diseño de *ítems*, pues su objetivo no es este; estas cualidades las adquiere el estudiante durante años de práctica en su vida escolar y serán empleadas frente a las *preguntas* elegidas para el trabajo de investigación. Al igual que lo consultado respecto a la noción de *ejercicio*, se realizó para *problema* (*situación problema*) teniéndose, en orden cronológico; a Pólya (1965) quien advierte que tener un *problema* significará buscar de forma consiente una acción apropiada para lograr un objetivo concebido, pero no alcanzable de manera inmediata. Asimismo, Krulik & Rudnick (1980, pág. 4) definen esta noción cómo:

> "Un *problema* es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma."

Desde Guzmán (1992, págs. 72-73) pasando por Mazarío (2002, pág. 121) y remontándonos a Bell (1978) se evidencian definiciones de *problema* que sugieren un deseo por parte de quien enfrenta la situación por darle solución o explicación a la misma; constituyendo un aspecto que redunda en el contexto del estudiante frente al examen SABER 11, quien asume este examen como una obligación y requisito para optar a educación superior, y no tiene el deseo, propiamente dicho, de presentar la prueba. No obstante, resulta relevante conocer la percepción de esta noción para los autores

> "Para que una situación constituya un *problema* para una persona, debe estar enterada de la existencia de la situación, reconocer que debe ejecutar algún tipo de acción ante ella, desear o necesitar actuar, hacerlo y no estar capacitado, al menos en lo inmediato, para superar la situación". (Bell F., 1978)

> "La presencia de una situación desconocida para el sujeto, no se conoce la vía de solución, la persona que se enfrenta a ella está motivada para trabajar en él, y se poseen los elementos necesarios para darle solución" (Mazarío Triana, 2002, pág. 121).

> "Es cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar". (Guzmán Ozámiz, 1992, págs. 72-73).

Teniendo en cuenta lo anterior se puede clasificar las *preguntas*, concebidas como *ítems*, de pruebas de matemáticas liberadas por el ICFES; si estas obedecen a las distinciones hechas por los autores sobre *ejercicio* o *problema*. Para mayor claridad los siguientes ejemplos evidencian el proceso de clasificación de algunas *preguntas* (*ítems*):

Ejemplo 1: Pregunta 38 (FUVEST, 2013, pág. 11) de la prueba de matemáticas del examen de admisión de la Universidad de São Paulo para el segundo semestre de 2013 realizado por FUVEST, la entidad encargada del diseño, aplicación y calificación del examen.

38

O produto de todas as soluções da equação

$$2\ \ln(\ln x) - \ln(5\ \ln x - 6) = 0$$

é

a) e^2
b) e^3
c) e^4
d) e^5
e) e^6

Este ítem responde a lo comentado por Llivina (1998) al preguntarse por un método matemático, algoritmo, que resuelva la ecuación y el producto de las soluciones de esta.

Ejemplo 2: Pregunta 4 (ICFES, Sistema Nacional de Evaluación Estandarizada de la Educación - Alineación del examen SABER 11°, 2013, pág. 18) de la prueba de matemáticas perteneciente a las guías y ejemplos de pregunta que ofrece el ICFES para el año 2015 según el Sistema Nacional de Evaluación Estandarizada de la Educación y la Alineación del examen SABER 11.

4. La siguiente tabla muestra, para tres años consecutivos, el valor del auxilio de transporte mensual que reciben los trabajadores de una empresa y el promedio de la tarifa de un pasaje para el servicio de transporte urbano en la ciudad:

Año	Auxilio de transporte (mensual)	Tarifa de un pasaje (promedio)
2009	$ 59.300	$ 1.500
2010	$ 61.500	$ 1.600
2011	$ 63.800	$ 1.700

Si un trabajador debe comprar al mes 40 pasajes, se puede afirmar que, con respecto al primer año, en el tercero el desequilibrio (el costo de transporte que no le cubre el auxilio) es:

A. Mayor en $200.
B. Menor en $4.300.
C. 3 veces mayor.
D. 6 veces mayor.

El ítem se puede asociar a la definición ofrecida por Pólya (1965) de situación *problema*, donde se identifica un objetivo claro pero su obtención no resulta de la inmediatez.

Ejemplo 3: Pregunta 3 (ICFES, 2014, pág. 5) de la prueba de matemáticas perteneciente a las guías y ejemplos de pregunta que ofrece el ICFES para el año 2014 del componente aleatorio y probabilístico.

3. En una institución educativa hay dos cursos en grado undécimo. El número de hombres y mujeres de cada curso se relaciona en la tabla:

	Curso 11A	Curso 11B	Total
Número de mujeres	22	23	45
Número de hombres	18	12	30
Total	40	35	75

Tabla

La probabilidad de escoger un estudiante de grado undécimo, de esta institución, que sea mujer es de $\frac{3}{5}$. Este valor corresponde a la razón entre el número total de mujeres y

A. el número total de estudiantes de grado undécimo.

B. el número total de hombres de grado undécimo.

C. el número total de mujeres del curso 11 B.

D. el número total de hombres del curso 11 A.

El *ítem* se convierte en una situación problema ya que se debe encontrar relación entre la probabilidad dada y la muestra; de modo que no se acude exclusivamente al uso de un algoritmo que entrelace una línea de operaciones matemáticas y su resultado.

Ejemplo 4: Pregunta 69 (Universidad Nacional de Colombia, 2007, pág. 22) del examen de admisión perteneciente a la Universidad Nacional de Colombia para el segundo semestre de 2007.

69. La expresión $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ es igual a

A.	B.	C.	D.
$1-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$1+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$1-\tan\alpha\tan\beta$	$1+\tan\alpha\tan\beta$

Para responder este *ítem* se necesita conocer de antemano el uso de identidades trigonométricas y simplificación de expresiones acudiendo directamente al uso de algoritmos matemáticos, asociándose con la noción de *ejercicio*.

A lo anterior se suma, fortaleciendo la idea de la estrecha relación entre las preguntas de matemáticas del examen SABER 11, las *situaciones problemas* y la concepción de *ítem*, aspectos relacionados por Schoenfeld sobre la resolución de problemas. Algunas de las dimensiones descritas por Schoenfeld (1985) sobre este tópico, se centran en la idea de lo que llama *recursos* referidos a los conocimientos previos que posee un individuo tales como, conceptos, fórmulas, algoritmos, en general todas las herramientas que se puedan considerar necesarias para enfrentar un *problema*; esto viene a sostener la idea del *ítem* al caracterizarse por evaluar contenidos vigentes, que en un espectro más amplio querrá decir que las situaciones problema deben responder a ciertas condiciones conceptuales establecidas previamente. A su vez, asumiendo que los *ítems* de la prueba de matemáticas son *situaciones problema*, será evidente que en su desarrollo, se tendrán insumos de naturaleza diferente a los que se obtendrían al darle solución a un *ejercicio*, enriquecidos por las estrategias que emplee el estudiante; dando pie a encontrar gran utilidad y como herramienta de comprensión, teoría alrededor de *visibilización del pensamiento* para interpretar los eventuales productos en la resolución de las *preguntas*.

Atado a la medición de contenidos que no responden al sentido común y el no ofrecer pistas que conduzcan a la identificación de la respuesta correcta en un *ítem*, las *situaciones estereotípicas* (Schoenfeld, 1985) provocarían respuestas, también, estereotípicas, es decir que las preguntas del examen SABER 11, y aquellas que se seleccionaron para el trabajo de investigación, no están coaccionadas a la interpolación entre un *cuerpo o base* del *ítem* y un método o estrategia (o algoritmo matemático) de resolución que pueda aparecer casi de manera automática, es decir, a *cuerpos* o *bases* de la forma "…" la manera de abordarlo es "…". Por ejemplo:

> Dentro de 11 años la edad de Marcela será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Marcela?

El anterior problema contiene palabras y una presentación estereotípica que invita a su solución por medio de ecuaciones cuadráticas, al caracterizar la edad de Marcela con el cuadrado de alguna condición numérica; siendo esto muestra de la una *situación* y solución *estereotípica* (Schoenfeld, 1985).

3.2. Parámetros oficiales de la prueba de matemáticas (SABER 11) - *¿Qué se evalúa?*

El ICFES para el diseño de sus preguntas pertenecientes a la prueba de matemáticas del examen SABER 11 considera clasificaciones (parámetros) que responden a las disposiciones enunciadas por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] que vienen a ser la contestación de las condiciones conceptuales establecidas en un momento previo a la creación de este tipo de pruebas. Según esta entidad (ICFES) el objeto de la prueba de matemáticas se describe como la "[…] evaluación de la competencia matemática relacionada con el uso flexible y comprensivo del conocimiento matemático escolar en diversos contextos de la vida diaria, de las matemáticas mismas y de otras ciencias" (ICFES, 2013), lo que implica, enfáticamente, el uso de *situaciones problema* como característica de los *ítems* que componen la prueba, al reconocer *cualidades* de flexibilidad y comprensión del conocimiento matemático, pues en los *problemas* se podrá establecer múltiples caminos de explicación y solución de estos, siendo moldeable estas estrategias, desvirtuándose la existencia de métodos de solución únicos y definidos, correctos e incorrectos, como se podría interpolar a la noción de *ejercicio*.

Respondiendo a los estándares y lineamientos del MEN, el ICFES clasifica cada pregunta de la prueba de matemáticas por medio de dos valores taxonómicos, competencias y componentes en matemáticas, así:

Competencias en matemáticas:

1. **Comunicación:** Se refiere a la capacidad para identificar la coherencia de una idea respecto a los conceptos matemáticos expuestos en una situación o contexto determinado; usar diferentes tipos de representación; y describir relaciones matemáticas a partir de una tabla, una gráfica, una expresión simbólica o una situación descrita en lenguaje natural. Dentro de esta competencia también se evalúa la habilidad para manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas, es decir, el uso y la interpretación del lenguaje matemático.
2. **Razonamiento:** Se relaciona con la identificación y uso de estrategias y procedimientos para tratar situaciones problema, la formulación de hipótesis y conjeturas y exploración de ejemplos y contraejemplos, la identificación de patrones y la generalización de propiedades.
3. **Solución de problemas:** Se refiere a la capacidad para plantear y resolver problemas a partir de contextos matemáticos y no matemáticos, de traducir la realidad a una estructura matemática y de verificar e

interpretar resultados a la luz de un problema, de manera que se generalicen soluciones y estrategias que resuelvan nuevas situaciones.

Componentes en matemáticas:

1. **Numérico-Variacional:** Alude al significado del número y sus diferentes usos; a la estructura del sistema de numeración; al significado y utilización de las operaciones, así como de la comprensión de sus propiedades y las relaciones entre sí; al reconocimiento de regularidades y patrones; a la identificación de variables; a la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; a la variación en contextos aritméticos y geométricos; y al concepto de función.

2. **Geométrico-Métrico:** Está relacionado con la construcción y manipulación de representaciones de objetos bidimensionales y tridimensionales, además de sus características, relaciones y transformaciones. También se refiere a la comprensión del espacio y el plano a través de la observación de patrones y regularidades, así como al razonamiento geométrico y a la solución de problemas de medición (longitud, área, volumen, capacidad, masa, tiempo, entre otras) a partir de la selección de unidades, patrones e instrumentos pertinentes.
3. **Aleatorio:** Indaga por la lectura, representación e interpretación de datos extraídos de contextos no matemáticos (encuestas, resultados de experimentos, entre otros); el análisis de diversas formas de representación de información numérica; la elaboración de conjeturas

> sobre regularidades y tendencias presentadas en fenómenos estadísticos y probabilísticos: y el uso de medidas de centralización, posición, dispersión y forma. (ICFES, 2013)

3.3. *Instrumento de Análisis de Ítem* – [IAI]

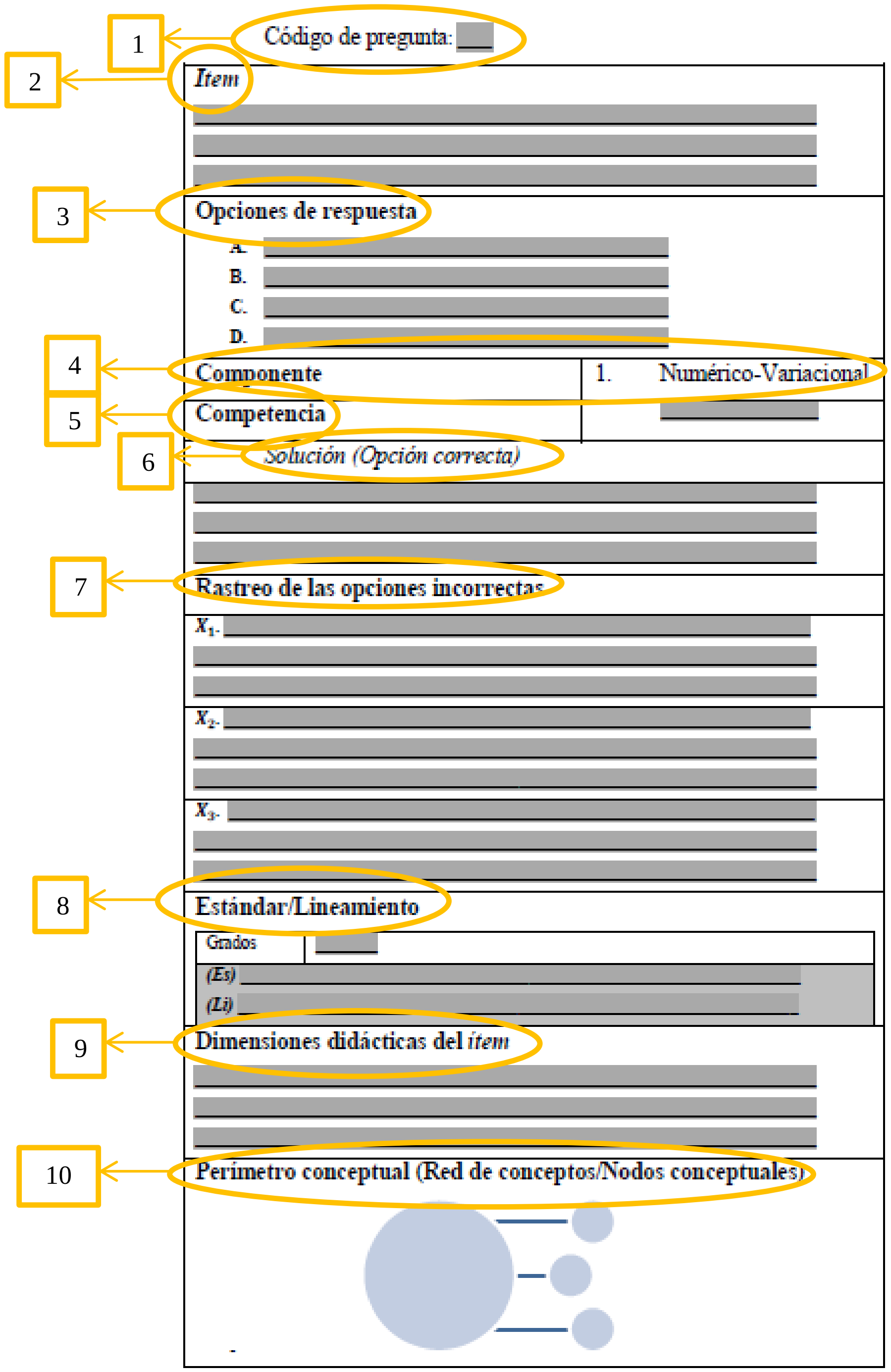
Dada la *pregunta de investigación* [1.2] es necesario diseñar y construir una herramienta que funcione como marco previo de comparación entre el análisis de la *pregunta* y varios factores asociados a ella y, evidenciado en lo que responderá el estudiante. Con lo anterior se da entrada a la definición, para el trabajo investigativo, de IAI; este concepto reúne un desglose de aspectos que se describen detalladamente para cada una de las *preguntas* o *ítems* seleccionados; esta herramienta es creada para comprender el posible alcance de estas en varias dimensiones que allí convergen. El IAI cumple con una estructura definida, cuyas partes obedecen a intereses de valor investigativo específico y que se ampliarán a continuación; además, están en constante relación con la Didáctica de la Matemática donde encuentra su sentido y sustento teórico.

A este instrumento subyacen varios aspectos de orden didáctico reflejados en la teoría asociada a cada pregunta dentro de sus *dimensiones didácticas* asumido como el compendio de ideas ofrecidas por distintos autores alrededor de tópicos a saber: el registro de representaciones, el rastreo de dificultades escolares, comprensiones de los estudiantes, empleo de heurísticas, etc.

El IAI constituye los cimientos teóricos, pedagógicos y didácticos en una primera instancia (*a priori*) del trabajo investigativo, pues luego servirán de contraste al análisis de resultados obtenidos en la aplicación de los ítems en el aula de clase.

El análisis de las preguntas se realiza mediante el instrumento [IAI] que fue creado para converger las aristas que los investigadores consideran primordiales para la naturaleza del trabajo.

Estructura de los IAI:



1. **Código de pregunta:** La codificación de cada ítem analizado corresponde a tres números X.X.XX; el primero acerca del *componente* y *subcategoría* (1.X.

Numérico-Variacional, 2. Geométrico-Métrico, 3. Aleatorio), - sobre este código, como ya se comentó en el diagnóstico realizado en cada institución, todos los ítems tendrán el número 1 -, el segundo sobre la *competencia* en matemáticas (1. Comunicación, 2. Razonamiento, 3. Solución de problemas), el último número obedece a la *numeración* consecutiva de aplicación de los ítems.

2. **Ítem:** Aquí aparece la *base* o *cuerpo* de la pregunta, mostrando a su vez los estímulos (gráficas, tablas, diagramas) que diseñó el ICFES para cada una, sin ningún tipo de alteración.
3. **Opciones de respuesta:** Se considera un apartado no perteneciente al cuerpo de la pregunta (Sánchez Restrepo & Espinosa Rodríguez, 2012) donde se distingue cada posible respuesta, correcta o incorrecta, asociada a la pregunta.
4. **Componente:** En todos los IAI este valor taxonómico corresponde a 1. Numérico-Variacional, dado que en la interpretación de resultados históricos para el año 2012 y 2013 en la prueba de matemáticas del examen SABER 11 en ambas instituciones educativas fue el componente que mayor cantidad de estudiantes estuvo en la clasificación de BAJO. Además se clasifican los *ítems* en subcategorías destacadas por el ICFES para este componente, así:
    1. Significado del número y sus diferentes usos.
    2. Estructura del sistema de numeración.
    3. Significado y utilización de operaciones.
    4. Comprensión de las propiedades y relaciones entre las operaciones.
    5. Reconocimiento de regularidades y patrones.
    6. Identificación de variables.
    7. Descripción de fenómenos de cambio y dependencia.

8. Variación en contextos aritméticos y geométricos.
9. Concepto de función.

5. **Competencia:** Aquí aparece la competencia asociada a la *pregunta* respecto a lo que establece el ICFES (1. Comunicación, 2. Razonamiento, 3. Solución de problemas) según el planteamiento de la misma e interpretada durante el trabajo de investigación.
6. **Solución (Opción correcta):** Descripción de posible(s) estrategia(s) de solución a la pregunta, destacando algoritmos matemáticos que podrían ser utilizados y la elección de la opción correcta según su letra (A, B, C, D); además se realizan preámbulos sobre dificultades descritas a partir de la didáctica de las matemáticas articuladas con la experiencia docente en el aula que se amplían teóricamente en las *dimensiones didácticas del ítem* (9).
7. **Rastreo de opciones incorrectas:** Sánchez (2012) al enumerar los factores que integran al ítem comenta sobre las *argumentaciones*, explicaciones basadas en las posibles interpretaciones incorrectas de los estudiantes que al igual que la *solución*, son sustentadas en la experiencia docente y adquieren mayor comprensión en las *dimensiones didácticas del ítem* (9).
8. **Estándar/Lineamiento:** Teniendo como base los estándares y lineamientos establecidos por el MEN para matemáticas en los años 2003 y 1998 este valor taxonómico realiza un enlace entre el objetivo del ítem y ambas clasificaciones de política educativa, así enmarca in situ el alcance de la pregunta.
9. **Dimensiones didácticas del ítem:** Este constituye el tronco de articulación entre demás valores taxonómicos, los objetivos de la investigación, el contraste con los resultados, teorías de orden pedagógico, de las representaciones y la didáctica de

las matemáticas como la resolución de problemas. Aquí confluyen de manera evidente lo que Schoenfeld (1985) conceptualiza como *recursos defectuosos* donde expone el almacén de herramientas que poseen los estudiantes defectuosamente, ejemplo; alguna fórmula o procedimiento mal aprendido o que él cree hace parte de la estrategia de solución del ítem; esto como zoom de sustento teórico de lo elaborado anteriormente en *solución* (6) y *rastreo de opciones incorrectas* (7). A su vez, se realzan de forma conveniente las discrepancias entre Pólya (1965) y Schoenfeld (1985) acerca de la noción de *heurísticas* como estrategia para solucionar problemas, pues en ocasiones los planteamientos de uno u otro autor tendrán su razón en el marco del análisis didáctico del ítem indiferente la opción de respuesta que se esté comentando. Finalmente, dentro de este apartado de la estructura de los IAI, existe una gran fuente de soportes teóricos específicos para cada pregunta que enriquecen el usufructo académico que eventualmente posee este tipo de análisis. Tales soportes se evidencia en el uso de teorías con fundamentos didácticos sobre el uso de representaciones, concepciones de los estudiantes, empleo de heurísticas, dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje, resolución de problemas, etc.

10. **Perímetro conceptual (Red de conceptos/Nodos conceptuales):** Con un fuerte sentido pedagógico, la última parte del IAI pretende ofrecer un marco referencial sobre las conexiones conceptuales que confluyen o a las que pueden desembocar las preguntas y su andamiaje en el aula de clase como pretexto de introducción o aplicación de temáticas específicas que podrán estar asociadas a lo que se comente dentro de las *dimensiones didácticas del ítem*. Añadido a esto y, articulado con la

parte del IAI 6. *Solución (Opción correcta),* en ambos numerales se evidencian los *recursos* o aquello que necesita el estudiante, conceptualmente hablando, para responder la pregunta.

El IAI hace parte del producto *académico* previo a la fase metodológica descrita para la implementación de la investigación, convirtiéndose en un posible parámetro o estrategia para el ordenado análisis de este tipo de ítems; dejando aún mucho camino teórico por elaborar en la construcción de instrumentos que den cuenta de distintos aspectos sobresalientes al momento de diseñar o emplear preguntas dentro del aula de matemáticas. A su vez, este instrumento [IAI], particular en su naturaleza, estaría comprendido de algún modo en los denominados *recolectores de datos* más que de *evaluación medibles* (siendo estos los ítems) pues contienen información que provisiona de herramientas teóricas, de comparación y contraste con los resultados que arrojen al finalizar la implementación de las preguntas en el aula de clase.

3.4. Descripción de los aspectos (*conceptuales*, *estructurales y metodológicos*) relacionados en la *pregunta de investigación*.

Esta parte del marco teórico responde, en vía directa, sobre los aspectos enunciados en la *pregunta de investigación* [PI]; se hará correspondencia teórica y conceptual entre cada uno de estos y las implicaciones en el trabajo. Hay tres aspectos que se relacionan en la PI: conceptuales, estructurales y de método y todos en referencia al rol del estudiante al momento de enfrentarse a una pregunta de la prueba de matemáticas liberada por el ICFES del examen SABER 11.

Cuando en la PI aborda lo conceptual y parte lo estructural se estará retomando los *recursos*, *defectuosos* o no (Schoenfeld, 1985), que poseen los estudiantes articulados con demás arreglos teóricos que desde la pedagogía y Didáctica de la Matemáticas puedan ser observables, la forma que se hace fehaciente la indagación sobre este aspecto aparece dentro de los IAI conformados para cada pregunta al momento de hablar sobre *Solución (Opción correcta) (Dificultad)* (6), el *Rastreo de opciones incorrectas* (7) y el *Perímetro conceptual (Red de conceptos/Nodos conceptuales)* (10) pues en éstos aparecen descritos errores de procedimientos simples resultados de aprendizajes erróneos y esto relacionado con la forma en que el estudiante accede a la información y también se refiere a la forma en que él la tiene estructurada (Barrantes, 2006); es decir, ante una situación alguien puede pensar una cadena de conceptos alrededor de ésta, aunque necesariamente no estén bien ligados. Por ejemplo, extrapolar propiedades tal como la linealidad:

Si

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Entonces

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Los aspectos metodológicos asociados a las estrategias de solución a los ítems ofrecidos por el estudiante, asociado también al aspecto estructural, están enmarcados y sostenidos teóricamente en los IAI al momento de realizar el rastreo de las opciones erróneas y la solución; rescatando la importancia de *las argumentaciones* evocadas por el estudiante al momento de descifrar las partes del ítem. A su vez la dimensión de resolución de problemas definida por Schoenfeld (1985) como *control* ofrece parámetros de observación y características de cómo son diseñados y operan estos métodos (estrategias) de solución por los estudiantes diciendo que ellos deberán tener una baraja de posibles caminos al momento de resolver el problema y tener la capacidad de determinar si este está funcionando o no; con lo anterior también comenta que las personas al elegir un camino tienen la firme convicción de que este les servirá aunque su producto sea diferente lo intentará nuevamente hasta que *per se* identifique que no era útil buscando otra vía completamente distinta. En otro momento de su trabajo habla sobre cómo algunas de las heurísticas pueden presentar más obstáculos que otras, o cómo unas estrategias son herramientas mucho más poderosas que otras, dado el engranaje conceptual, estructural y metodológico que encierra. Por último Barrantes (2006) citando a Schoenfeld (1985) expone algunas acciones que están involucradas en esta dimensión, *control*, que ha de tener en cuenta el estudiante al momento de prepararse o resolver la situación problema y que ayudan a entender este aspecto de la PI y cómo se el trabajo de investigación observa el mismo:

> - Entendimiento: tener claridad acerca de lo que trata un problema antes de empezar a resolverlo. En esto Pólya hace, también, una y otra vez, la observación que si alguien no entiende un problema, no lo va a resolver, y si lo hace, es por casualidad.
> - Consideración de varias formas posibles de solución y seleccionar una específica, o sea: hacer un diseño.
> - Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar un camino no exitoso y tomar uno nuevo, asociado a la metacognición.

- Llevar a cabo ese diseño que hizo, estar dispuesto a cambiarlo en un momento oportuno.
- Revisar el proceso de resolución.

3.5. Relación entre las *situaciones problemas* (*ítems*) y la *visibilización del pensamiento.*

Para señalar la relación existente entre los *ítems* como *situaciones problema* y *visibilización del pensamiento* es necesario definir esta última, apoyados en Tishman & Palmer (2005), cómo:

> "[…] la visualización del pensamiento se refiere a cualquier tipo de representación observable que documente y apoye el desarrollo de las ideas, preguntas, razones y reflexiones en desarrollo de un individuo o grupo. Mapas mentales, gráficos y listas, diagramas, hojas de trabajo – todo esto se considera como visualización del pensamiento *si* (y este *si* es importante) revelan las ideas en desarrollo de los y las estudiantes conforme piensan sobre un asunto, problema o tema […]."

La anterior conceptualización reconoce la viabilidad y posibilidad de recoger información valiosa de un grupo de estudiantes o estudiante, que sirva de soporte o evidencia de aquello que *piensan* sobre un *problema*.

Así pues, utilizar teóricamente aspectos sobre la *visibilización del pensamiento* vendrá a fortalecer lo que bajo la metodología del trabajo de investigación se diseñó para delimitar la captura de información, soslayada en las evidencias de comprensión sobre el cómo, cuándo y dónde; lo anterior de manera más ampliada se relacionará en el siguiente capítulo.

4. METODOLOGÍA

El diseño y la metodología construidos buscan la organización de los elementos del trabajo que, junto con las técnicas e instrumentos utilizados para la recolección de la información y el método de análisis, permitirán la consecución de los objetivos propuestos.

La investigación tendrá como enfoque metodológico un enlace entre aspectos cuantitativos y cualitativos considerándose mixto, así se compagina con Sampieri (1998), representando un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación e implica la recolección de datos de ambos tipos, así como su integración y discusión conjunta, a través de los diferentes análisis y comparaciones entre los datos arrojados por la implementación, para realizar inferencias producto de toda la información recabada y lograr una mejor comprensión de los aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos de los estudiantes en relación con sus procesos de solución a las diferentes preguntas aplicadas. Además, se admite esta investigación bajo un diseño descriptivo, pues buscará caracterizar comportamientos de una población, sus tendencias y rasgos importantes durante la aplicación de un conjunto de preguntas respaldadas por sus respectivos análisis didácticos.

Un aspecto concreto donde convergen las nociones investigativas de cuantificar y cualificar viene dado por la construcción de los instrumentos que responden a preguntas de tipo cerrado y abierto, así sus análisis estadísticos corresponderán a tendencias sobre lo que se entiende o no de una pregunta que se ha diseñado bajo la luz de los parámetros de las pruebas SABER, y las dinámicas que los estudiantes tienen al momento de trabajar individual y grupalmente en su resolución.

En relación con los aspectos cualitativos de la investigación y su carácter descriptivo-interpretativo retomamos los planteamientos de Taylor y Bogdan (1996) asumiendo el proceso de investigación como una acción realizada dentro de una situación estudiada, buscando una imagen aproximada de lo que dicen y hacen las personas, dejando que las palabras y acciones hablen por sí mismas. Así mismo, Sampieri (1998) expresa que lo descriptivo permite un acercamiento a la presencia de eventos, situaciones, reflexiones, y a la interpretación de comparaciones y contrastes determinando conclusiones generales a partir de procedimientos particulares, tal y como se manifiestan. Para Taylor y Bogdan, antes citados, un diseño de campo hace asequible la toma de la información en el lugar en la investigación, a través del uso de las técnicas e instrumentos pertinentes para realizar los registros de forma cuidadosa y sistemática, de las actividades del docente y estudiantes desde el propio contexto del aula de clase.

La investigación pretende articular estrechamente los aspectos que se mencionan a continuación:

1. La identificación del problema de investigación: recolección y análisis de datos, fundamentación teórica, justificación.
2. Plan general: formulación del problema, construcción de la pregunta y los objetivos de la investigación, enfoque metodológico de la investigación.
3. Diseño de la propuesta investigativa.
4. Implementación en el aula.

5. Recolección y análisis de resultados.
6. Conclusiones.

El estudio presentado aquí se llevó a cabo con grupos mixtos de 23 y 25 estudiantes. Las sesiones fueron dirigidas por los autores del presente trabajo que al mismo tiempo eran los profesores de matemáticas que los estudiantes tenían como parte de su plan de estudios del grado undécimo. Como investigadores teníamos la responsabilidad de implementar los diferentes ítems seleccionados, así como recolectar la información relacionada con los procesos de solución de los estudiantes para su posterior análisis. La recolección de la información se realizó en diez sesiones a lo largo de tres semanas.

El proceso para llevar a cabo la investigación se desarrolló en las siguientes fases:

Fase 1: Caracterización de las instituciones educativas frente a su desempeño en las pruebas saber 11 Matemáticas

Se recolectó información de la base de datos del ICFES relacionada con el histórico de las instituciones educativas en la presentación de las pruebas saber matemáticas del año 2013 lo que permitió caracterizar las dos instituciones educativas e identificar los componentes y competencias más y menos favorables de cada una tras un análisis cuantitativo de la información. Finalizada ésta fase se concluyó que la intervención estaría basada en la implementación de un paquete de ítems asociados al componente numérico-variacional, pues es en este componente en el que se evidenciaron desempeños menos favorables.

Fase 2: Implementación inicial (Pilotaje)

Se dispuso que algunas preguntas pertenecientes a las pruebas de matemáticas del examen SABER 11 de los años 2012 y 2014 fueran puestas dentro del aula de clase en sesiones de trabajo con dos grados décimo; donde se pretendía contextualizar a los estudiantes en la forma y estructura de estas preguntas y orientar el diseño de los mecanismos que coadyuvaran a registrar y rastrear aspectos que los estudiantes consideran al momento de elegir una opción de respuesta.

La aplicación de esta prueba piloto permitió:

- ✓ Encontrar relación con la caracterización de las instituciones (llevada a cabo en la fase 1), en el sentido en que nuevamente el componente numérico variacional fue el menos favorable.
- ✓ Seleccionar el componente numérico variacional como el acoge al conjunto de preguntas que serán aplicadas como parte del proceso investigativo.
- ✓ Elaborar el *análisis didáctico* de las preguntas que fueron seleccionadas para su aplicación durante el primer semestre de 2015, a la misma población con la que se pilotearon las preguntas descritas anteriormente.
- ✓ Adicionalmente este pilotaje nos permitió tomar decisiones acerca de: las dimensiones que debería contener un análisis didáctico serio de las preguntas y las posibles estrategias de implementación que utilizaríamos.

Fase 3: Diseño y estructuración del marco teórico

El marco teórico de la investigación proporciona un nivel de análisis exhaustivo de los elementos epistemológicos relativos al problema de investigación reflejado en los diferentes IAI y particularmente de los modelos didácticos y pedagógicos relacionados con las estructuras que intervienen en la solución de los diferentes ítems por parte del estudiante. Lo que permitirá, a través de la metodología presentada, la identificación de los aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos que podría considerar el estudiante al momento de responder preguntas tipo SABER.

Fase 4: Construcción de los diferentes IAI

Una parte importarte del trabajo de investigación se dio por la construcción de los diferentes análisis didácticos de ítems, la elaboración de estos análisis está dado por dos aspectos: el primero, en generar elementos de tipo pedagógico y didáctico que caractericen cada ítem y las estrategias de solución que podrían adoptar los estudiantes, el segundo, elaborar comparaciones entre las posturas de los estudiantes frente al ítem y las posiciones didácticas y pedagógicas consideradas en cada uno, buscando encontrar relación entre lo teórico y lo empírico.

Fase 5: Diseño de la propuesta de intervención

La fase de pilotaje evidenció la necesidad de considerar metodologías alternas a la simple presentación y solución por parte de los estudiantes de los diferentes ítems, pues se queda corta al momento de identificar los diferentes aspectos que considera el estudiante al momento de resolver una pregunta. Se diseñó una propuesta de intervención en el aula con el objetivo de vislumbrar los aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos que los estudiantes tienen en cuenta al momento de resolver preguntas diseñadas bajo los parámetros de las pruebas saber 11, para cumplir tal objetivo se diseñaron instrumentos/metodologías que apuntaran directamente a la caracterización de los aspectos enunciados.

Propuesta de intervención:

Una vez construidos los diferentes análisis didácticos para cada uno de los ítems seleccionados se pusieron en consideración de los estudiantes los diferentes ítems fijándose una estrategia clara para la implementación de cada uno de ellos, y para la recolección de información:

Estrategia I: Se plantea el ítem por medio de un formato individual que presenta la pregunta junto con las diferentes opciones de respuesta, el formato diseñado tendrá tres espacios: el primero para justificar la respuesta elegida, el segundo para hacer explícitas (si las hay) las operaciones matemáticas que apoyaron la elección de la respuesta y el tercero para enunciar los conceptos matemáticos que tuvo en cuenta en la búsqueda de la respuesta.

Estrategia II: Se plantea el ítem a través de un formato individual que presenta la pregunta sin las diferentes opciones de respuesta, el formato diseñado tendrá un espacio para que los estudiantes propongan cuatro opciones de respuesta diferentes y argumenten el porqué de las opciones incorrectas y justifiquen su opción correcta.

Estrategia III: Se plantea el ítem empleando un formato individual que sólo presentará la pregunta, pidiendo al estudiante una única respuesta y su estrategia de solución, el formato estará diseñado para que el estudiante describa paso a paso su proceso/estrategia de solución.

Estrategia IV: Se plantea el ítem de manera abierta para todo el grupo incluyendo sus opciones de respuesta, para esta estrategia el docente será el mediador y el grupo de estudiantes estará en libertad de expresar sus opiniones con el fin de llegar a la selección de la respuesta considerada como correcta para todo el grupo y justificar el rechazo de las otras opciones. Tras la aplicación de la estrategia se identificarán aquellos estudiantes en los que su participación ha dejado entrever algunos de los aspectos considerados en la pregunta de investigación, así como aquellos que manifiestan dificultades o cuya participación es nula.

Estrategia V: Se plantea el ítem a un grupo focal de 5 estudiantes (identificados en la estrategia IV) empleando el protocolo de pensamiento Thinking-Aloud solicitando a los participantes expresar en voz alta sus pensamientos, sensaciones y opiniones mientras interactúa con el ítem. La heterogeneidad del grupo puede garantizar la aparición de algunos de los aspectos que las anteriores estrategias evidencian de forma limitada, así los pensamientos articulados de los estudiantes serán manifestados de forma oral y registrados mediante grabaciones durante un periodo de tiempo en el que abordarán el ítem presentado.

Fase 6: Implementación de la propuesta de intervención

Al interior de cada una de las aulas de clase se puso en marcha la implementación de los diez ítems escogidos por el grupo investigador, dicha implementación se dio a lo largo de tres semanas, se buscó poner en consideración de los estudiantes el conjunto de preguntas seleccionadas para de esta manera vislumbrar algunas de sus consideraciones al momento de solucionarlas. Para la fase de implementación se tiene previsto acudir a las estrategias diseñadas y mencionadas con anterioridad en el orden en que lo muestra la siguiente tabla:

Sesión	Ítem	Estrategia	Fuente de datos
1	1.2.02	I	Formato diseñado y diario de campo
2	1.3.10	I	Formato diseñado y diario de campo
3	1.1.01	II	Formato diseñado y diario de campo
4	1.3.08	II	Formato diseñado y diario de campo

5	1.1.09	III	Formato diseñado y diario de campo
6	1.3.07	III	Formato diseñado y diario de campo
7	1.1.04	IV	Registro en video
8	1.2.06	IV	Registro en video
9	1.2.03	V	Registro grabación de voz
10	1.3.05	V	Registro grabación de voz

Dada la particularidad de cada una de las estrategias, el orden en que son presentadas obedece a las características y complejidad de cada pregunta así como al tipo de información que puede emerger tras su implementación.

Fase 7: Sistematización de la información

La recolección de la información estará dada por la implementación de diferentes técnicas para la recolección de la información: registro de las intervenciones de los estudiantes, elaboración de diarios de campo, pruebas escritas, cuestionarios y entrevistas no estructuradas.

Fase 8: Análisis, resultados y conclusiones

Parte del análisis está en contrastar las actuaciones de los estudiantes reflejadas en las diferentes fuentes de recolección de información frente al planteamiento y tratamiento de las preguntas con las consideraciones consignadas en los diferentes IAI, para de esta manera intentar dar respuesta a la pregunta de investigación. La sistematización y organización de los datos forman parte de esta fase, lo que implica la elaboración de gráficas, la selección de evidencias y el constante contraste entre la información recolectada y los aspectos considerados en cada uno de los IAI.

Esta fase también contempló la estructuración de las diferentes categorías de análisis y las formas y niveles de argumentación que se tendrían en cuenta.

4.1. Instrumentos de pilotajes previos

Para finales de 2014 se decidió implementar algunas preguntas a dos grupos de grado décimo donde sumado a la elección de la opción correcta de cada ítem se cuestionaba o sugería la evidencia de otro aspecto al momento de resolver la pregunta, de este modo se empezaron a definir los alcances de los análisis, rastreos y descripciones de las preguntas que tuvieron lugar durante el primer semestre de 2015. Algunos de los formatos, cuestionamientos adicionales y diarios de campo se presentan a continuación buscando evidenciar los cimientos que definieron parte del trabajo investigativo.

4.1.1. Formatos de preguntas

Pregunta 01

Una prueba atlética tiene un récord mundial de 10,49 segundos y un récord olímpico de 10,50 segundos. ¿Es posible que un atleta registre un tiempo, en el mismo tipo de prueba, que rompa el récord olímpico pero no el mundial?

- **A.** Sí, porque puede registrar, por ejemplo, un tiempo de 10,497 segundos, que está entre los dos tiempos récord.
- **B.** Sí, porque puede registrar un tiempo menor que 10,4 y marcaría un nuevo récord.
- **C.** No, porque no existe un registro posible entre los dos tiempos récord.

D. No, porque cualquier registro menor que el récord olímpico va a ser menor que el récord mundial.	
Opción correcta	
¿Por qué eligió esa opción?	

Pregunta 02

En una institución educativa hay dos cursos en grado undécimo. El número de hombres y mujeres de cada curso se relaciona en la tabla:

	Curso 11A	**Curso 11B**	**Total**
Número de Mujeres	22	23	45
Número de Hombres	18	12	30
Total	40	35	75

La probabilidad de escoger un estudiante de grado undécimo, de esta institución, que sea mujer es de $\frac{3}{5}$. Este valor corresponde a la razón entre el número total de mujeres y **A.** el número total de estudiantes de grado undécimo. **B.** el número total de hombres de grado undécimo. **C.** el número total de mujeres del curso 11 B. **D.** el número total de hombres del curso 11 A.	
Opción correcta	
¿Cuántas veces releyó la pregunta?	

4.1.2. Diarios de campo (Ejemplos)

Los diarios de campo juegan un papel fundamental en el seguimiento de las sesiones de trabajo dentro del aula y argumentan las decisiones de orden metodológico, pedagógico, didáctico o conceptual, después reflejadas dentro de la investigación en la formulación del marco teórico y su metodología, además constituyen materia de análisis y abstracción de las conclusiones a las que se llega finalizado el proceso investigativo.

Bogotá D.C. 15 de septiembre de 2014 *Asistencia de estudiantes: 25/28* *Pregunta: 001*

La metodología empleada para la puesta de esta pregunta puede describirse en tres momentos:

***Introducción/presentación**:*

Durante una sesión anterior se había comentado a cerca de una nueva dinámica de trabajo alrededor de las pruebas SABER 11 y su eventual aplicación el próximo año escolar. Se advirtió sobre la presentación de un simulacro de prueba que está ofertado por el ICFES en 2012 desde su banco de preguntas; sin embargo, cuestiones logísticas (finalización de periodo/no sesiones de trabajo) malograron tal propósito, no obstante en aras a la iniciación del trabajo investigativo se optó por, dada una pregunta (perteneciente a otro cuadernillo liberado para este año por el ICFES) iniciar el trabajo para la sesión de clase con los estudiantes.

El ítem se implementó individualmente como antesala de la prueba diagnóstica.

La presentación de esta actividad intentó motivar a los estudiantes, resaltando la importancia que existe al momento de ser parte activa de las pruebas estatales. Se comentó sobre el tiempo que se tenía previsto de la actividad (entre 5 y 7 minutos) y la honestidad sobre sus opiniones.

***Ejecución de la pregunta**:*

Se cronometró el tiempo dispuesto para dar respuesta al ítem, donde solo 3 (12%) estudiantes agotaron la totalidad de este para tal fin. Se evidenció concentración de los alumnos en la actividad, reflejada en el silencio y orden frente a la propuesta; donde se establece como posibles causas:

- *Innovación metodológica (forma).*

- *Importancia en la preparación y envolvimiento contextual del estudiante en las pruebas estatales.*
- *Naturaleza "liviana" de la actividad.*

Por otro lado, durante la ejecución se pudo observar la relectura de la pregunta (aspecto que se desea convocar para la próxima pregunta, buscando un estimado de cuantas veces se tuvo que leer el ítem por el estudiante, y generar una posible causa de dificultad, generar una variable). No hubo lugar a dudas de la población estudio hacia el profesor.

Cierre actividad:

Se retomó la importancia del trabajo realizado y su eventual aporte para el manejo de la pregunta, a la vez se acordó que a fin de periodo se hará una descripción sobre el trabajo realizado estadísticamente bajo consideraciones cuantitativas y cualitativas.

4.2. Instrumentos para la recolección de información

La implementación de las preguntas en el aula de clase está coaccionada por las estrategias de aplicación definidas previamente, donde se hace una relación de cómo capturar la información respecto al ítem y obedece al diseño de un instrumento para cada una. Para las estrategias **I**, **II** y **III** se construyen los siguientes instrumentos:

Estrategia I

	Cód.: XXXXXXX
La siguiente pregunta pertenece a pruebas de matemáticas del examen SABER 11 dispuesta por el ICFES para la preparación y uso académico dentro de las instituciones educativas. Estudiante, esto es una oportunidad de práctica y reconocimiento previo para la presentación de este examen.	
Pregunta:	

____ ____ ____ ____ ____	
Opciones de respuesta: **A.** ____________________________________ **B.** ____________________________________ **C.** ____________________________________ **D.** ____________________________________	
Opción Correcta:	
¿Por qué eligió esa opción?	
¿Realizó alguna operación matemática? ¿Cuál? ¿Qué conceptos considera (temas) se involucran en la solución de la pregunta?	

Estrategia II

	Cód.: XXXXXXX
La siguiente pregunta pertenece a pruebas de matemáticas del examen SABER 11 dispuesta por el ICFES para la preparación y uso académico dentro de las instituciones educativas. Estudiante, esto es una oportunidad de práctica y reconocimiento previo para la presentación de este examen.	
Pregunta: ____ ____ ____ ____ ____	

En el siguiente espacio proponga 4 opciones de respuesta a esta pregunta, de manera tal que una sea correcta, indique cuál es, también, justifique el porqué de cada una.	
A	
	Justificación:
B	
	Justificación:
C	
	Justificación:
D	
	Justificación:

Estrategia III

	Cód.: XXXXXXX
La siguiente pregunta pertenece a pruebas de matemáticas del examen SABER 11 dispuesta por el ICFES para la preparación y uso académico dentro de las instituciones educativas. Estudiante, esto es una oportunidad de práctica y reconocimiento previo para la presentación de este examen.	
Pregunta: ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	
En el siguiente espacio realice y explique todos los procedimientos o ideas de solución que tiene alrededor de la pregunta	

Para las estrategias IV y V aunque no se tiene un instrumento formal de implementación las sesiones se desarrollaron siguiendo las características propias de cada estrategia, así para la estrategia IV se buscó que el profesor orientara el proceso de solución a la pregunta en un contexto similar al de una clase de matemáticas, propiciando espacios en los que pudieran emerger los aspectos mencionados en la pregunta de investigación, el espacio de intervención considera cuatro momentos: 1. La presentación y familiarización del ítem 2. La búsqueda de estrategias de solución 3. La ejecución de las estrategias de solución 4. La elección de la opción de respuesta, la información recolectada está registrada en un archivo de video; luego, para la estrategia V se aplica el protocolo *think aloud*, lo que implica el uso de informantes (grupo focal) mientras se realiza a cabo uno actividad (Armengol, 2007), en este caso, mientras se soluciona la pregunta. La aplicación del protocolo contempla las siguientes etapas: 1. Presentación del ítem 2. Apertura de la discusión 3. Exposición de los procesos de solución 4. Cierre y elección de la opción de respuesta, la información recolectada está registrada en un archivo de audio.

5. *Instrumentos para el Análisis de los ítems* (Preguntas)

Como fue definido en el marco teórico, lo que se entenderá como *IAI;* se presenta a continuación la selección de las preguntas comprendidas bajo la anterior noción:

5.1. Pregunta: 1.1.01

<table>
<tr><td colspan="2">Ítem

En un experimento se toman dos muestras E y F de una misma población de bacterias en condiciones ambientales distintas. Inicialmente, en la muestra E hay 4.000 bacterias y en la muestra F hay 500 bacterias. Las expresiones $2^t(4.000)$ y $2^{2t}(500)$ representan las cantidades de bacterias que hay en las muestras E y F, respectivamente cuando han transcurrido t horas. Las muestras E y F tendrán la misma cantidad de bacterias para t igual a:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Opciones de respuesta

A. 1
B. 3
C. 4
D. 8</td></tr>
<tr><td>Componente</td><td>1. Numérico-Variacional
(6. Identificación de variables)</td></tr>
<tr><td>Competencia</td><td>1. Comunicación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Solución (Opción correcta)(Dificultad)</td></tr>
</table>

$$2^3 \cdot 2^t = 2^{2t}$$ $$2^{t+3} = 2^{2t}$$ $$t + 3 = 2t$$ $$t = 3$$ O bien: $$4000 \cdot 2^t = 500 \cdot 2^{2t}$$ $$8 \cdot 2^t = 2^{2t}$$ $$8 = \frac{2^{2t}}{2^t}$$ $$8 = 2^t$$ $$8 = 2^3 = 2^t \rightarrow t = 3$$ La clave del ítem supone una igualdad de exponentes y el manejo de la ecuación como igualdad de expresiones algebraicas. **(B)**
Rastreo de las opciones incorrectas
A. El estudiante puede elegir esta opción al confundir el exponente de la segunda expresión como $2^{2+t}(500) \neq 2^{2t}(500)$ para luego igualar esta expresión *emergente* con $t = 1$ a el factor de la primera expresión (4000) desestimando 2^t, así: $$2^{2+t}(500) = 4000$$ $$2^{2+t} = 8$$ $$2^{2+t} = 2^3 = 8$$ $$2 + t = 3$$ $$t = 1$$

C. El estudiante puede elegir esta opción al asumir que una potencia a^b equivale a $a \cdot b$ e iguala las expresiones $2^t(500) = 4000$ donde confunde las potencias de 2 para la segunda expresión (dados sus exponentes t y $2t$) y desestima el factor 2^t en el segundo miembro de la ecuación, luego reemplazando tendrá:

$$2^t(500) = 4000$$

$$2^t = 8$$

$$2 \cdot t = 8$$

$$2t = 8$$

$$t = 4$$

D. El estudiante puede elegir esta opción porque desea encontrar la igualdad entre las expresiones $4000 \cdot 2^t = 500 \cdot 2^{2t}$ donde asume que los factores, potencias de 2, pueden eliminarse de forma sustancial generando una nueva igualdad que supone:

$$4000 = 500 \cdot \Delta$$

$$\Delta = 8$$

Estándar/Lineamiento

Grados	8° y 9°

(Es) *Represento gráficamente funciones polinómicas, racionales y exponenciales y saco conclusiones.*

(Li) *Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.*

Dimensiones didácticas del ítem

En Molina (2006) resume nueve significados del signo igual que pueden identificarse en la lectura de algunos autores (Vergnaud, Cortes y Favre-Artigue, 1987; Freudenthal, 1994; Anglada, 2000; Molina y Castro, 2005) sin embargo para el caso de este ítem nos referiremos al siguiente:

Expresión de una equivalencia condicional (ecuación): Este significado lo encontramos en el contexto del álgebra, en situaciones en las que el signo igual expresa una equivalencia sólo cierta para algún o algunos valores de la(s) variable(s), pudiendo no existir ninguno (Ej. $x^2 + 3x = x + 1; \sin(3x) = 0$).

Así, la anterior definición del signo igual, está implícitamente descrita al momento de establecer la condición:

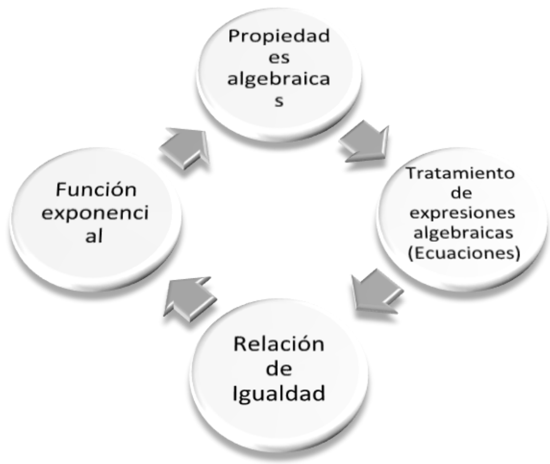
"*Las muestras **E** y **F** tendrán la <u>misma</u> cantidad de bacterias para **t** <u>igual</u> a*"

Sin embargo, tal relación se muestra para dos momentos $E = F$ cuando $t =¿?$, donde el estudiante deberá encontrar el valor que hace cierta la primera relación dada la solución de la segunda.

Para este ítem la dificultad mayor puede establecerse al *no* mostrar las ecuaciones igualadas respecto al parámetro de la variable t, donde perse el estudiante debe configurar la ecuación suponiendo un trabajo más amplio cuando la variable está en los exponentes (Ecuaciones exponenciales).

No obstante, podríamos considerar que los objetivos macro expuestos en el anterior recuadro se recogen de manera implícita dentro del ítem, apuntando al análisis meramente algebraico de estas expresiones, donde más que el reconocimiento del comportamiento de este tipo de funciones se interpola la construcción de una ecuación lineal que satisfaga el sistema.

Perímetro conceptual (Red de conceptos/Nodos conceptuales)



5.2. Pregunta: 1.2.02

Ítem

Una prueba atlética tiene un récord mundial de 10,49 segundos y un récord olímpico de 10,50 segundos. ¿Es posible que un atleta registre un tiempo, en el mismo tipo de prueba, que rompa el récord olímpico pero no el mundial?

Opciones de respuesta

- **A.** Sí, porque puede registrar, por ejemplo, un tiempo de 10,497 segundos, que está entre los dos tiempos récord.
- **B.** Sí, porque puede registrar un tiempo menor que 10,4 y marcaría un nuevo récord.
- **C.** No, porque no existe un registro posible entre los dos tiempos récord.
- **D.** No, porque cualquier registro menor que el récord olímpico va a ser menor que el récord mundial.

Componente	1. Numérico-Variacional (1. Significado del número y sus diferentes usos)
Competencia	2. Razonamiento
Solución (Opción correcta)(Dificultad)	
Se cumple que $10{,}49 < 10{,}497 < 10.50$, luego todo real en el intervalo $(10{,}49\ ,\ 10{,}50)$ cumplirá con la condición planteada en el problema: romper el record olímpico pero no el mundial **(A)**	
Rastreo de las opciones incorrectas	
B. El estudiante puede elegir esta opción al no tener en cuenta la condición que plantea la pregunta/problema: romper el récord olímpico pero no mundial, así asume que romper el récord olímpico será suficiente para dar una respuesta acertada pero no tiene en cuenta la restricción implícita de la pregunta. Al realizar un tiempo menor que 10,4 segundos efectivamente estará rompiendo el récord olímpico pero también el mundial.	
C. El estudiante puede elegir esta opción pues asume que la magnitud tiempo no es continua, o por lo menos lo es parcialmente, es decir que considera que no existe un número real entre 10,49 y 10,50. Para el estudiante la continuidad de los números presentados va hasta centésimas y por tal razón entiende que no hay un registro posible entre los dos tiempos récord.	
D. El estudiante puede elegir esta opción porque considera que el tiempo es directamente proporcional a un desempeño satisfactorio en la prueba, así a los registros con mayor tiempo se les adjudica nuevos récords.	
Estándar/Lineamiento	

Grados	8° y 9°
(Es) *Trabajo con los números reales en sus diferentes representaciones.* **(Li)** *Practico todo lo que sé sobre los números reales para comparar, identificar y diferenciar propiedades, relaciones y operaciones de los números enteros, racionales e irracionales; argumento mis respuestas.*	

Dimensiones didácticas del ítem

La comprensión y el uso competente de los números decimales y posteriormente de los números reales por parte de estudiantes de educación básica y media plantean dificultades que han sido investigadas y descritas por diversas investigaciones didácticas.

Bernander y Clement (1985), encierran las dificultades que presentan los estudiantes con los números decimales en dos categorías: errores sobre notación y errores en notaciones con decimales.

Centeno (1988), en el capítulo 9 del texto Números Decimales, ¿Por qué? Y ¿Para qué?, menciona a diversos autores que a través de sus estudios confirman "la lentitud en la adquisición y dominio del concepto de número decimal". La autora se propone dar a conocer al maestro los aspectos del concepto de decimal que tienen mayor resistencia en la comprensión del alumno. Se describen errores tales como, errores relacionados con el concepto, escritura y operaciones de números decimales, entre ellos: valor de posición, errores relacionados con el cero, con el orden y con las operaciones.

Steinle y Stacey (2004), identifican claramente uno de los errores rastreados anteriormente en un estudio realizado con una muestra significativa de estudiantes, las autoras evidenciaron la creencia de que un decimal que "se ve" más pequeño, es en realidad mayor. Se muestra como ejemplo de esta situación, un ítem donde se pide la comparación entre

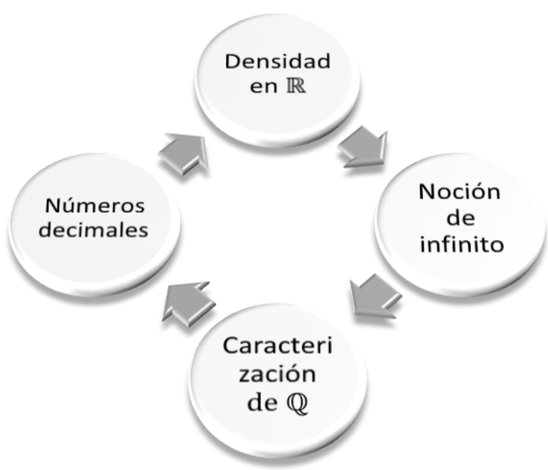
4.45 y 4.4502. El razonamiento incorrecto que realizan es el siguiente: 4502 se ve más grande que 45, entonces 4.4502 es menor que 4.45

El ítem indaga por la percepción del estudiante relativa a la densidad del conjunto racional y real: Dados dos números reales diferentes x y y, su promedio $\frac{x+y}{2}$ está comprendido entre x y y. Por lo tanto, entre dos números reales sin importar lo cercano que se encuentren hay una infinidad de números reales. Esto implica que dado un número real cualquiera x no tienen sentido expresiones tales como: "el número real siguiente a x" o "el número real anterior a x". Caracterizando a los números reales como expresiones decimales es posible sintetizar el resultado anterior de la siguiente manera:

a) Entre dos números reales diferentes hay un número racional, y por lo tanto hay infinitos números racionales entre ellos.

b) Entre dos números reales diferentes hay un número irracional, y por lo tanto hay infinitos números irracionales entre ellos.

Perímetro conceptual (Red de conceptos/Nodos conceptuales)



5.3. Pregunta: 1.2.03

Ítem Se puede encontrar números racionales mayores que k, de manera que sean cada vez más cercanos a él, calculando $k + \frac{1}{j}$ (con j entero positivo). Cuanto más grande sea j, más cercano a k será el racional construido. ¿Cuántos números racionales se pueden construir cercanos a k y menores que $k + \frac{1}{11}$?	
Opciones de respuesta **A.** 10, que es la cantidad de racionales menores que 11. **B.** Una cantidad infinita, pues existen infinitos números enteros mayores a 11. **C.** 11, que es el número que equivale en este caso a j. **D.** Uno, pues el racional más cercano a k se halla con $j = 10$, es decir, con $k + 0{,}1$.	
Componente	1. Numérico-Variacional (4. Comprensión de las propiedades y relaciones entre las operaciones)
Competencia	2. Razonamiento
Solución (Opción correcta)(Dificultad)	
El ítem asegura que “Cuanto más grande sea j, más cercano a k será el racional construido”, tal afirmación sugiere que si bien $k + \frac{1}{11}$ está cerca de k con $j = 11$, estará más cerca para cualquier $j > 11$, es decir que y en particular: $$k < \cdots < k + \frac{1}{100} < \cdots < k + \frac{1}{75} < \cdots < k + \frac{1}{20} < \cdots < k + \frac{1}{12} < k + \frac{1}{11}$$	

Ahora, dado que existen infinitos números mayores a 11, cada vez que se use un j mayor a esta cantidad en $k+\frac{1}{j}$ se construirá un número más cercano a k. **(B)**
Rastreo de las opciones incorrectas
A. El estudiante asume, contrariamente a la condición expuesta en el ítem, que la cantidad de números cercanos a k equivale a la misma cantidad de números naturales (ℕ) y menores que 11 mediante el algoritmo de construcción $k+\frac{1}{j}$, es decir que considera que $j \in \mathbb{N}$ y debe estar entre 1 y 11, cuando se asegura que entre más grande, no menor a un número dado; el número $k+\frac{1}{j}$ será más cercano a k.
C. El estudiante considera que los únicos números posibles construibles que cumplen la condición son aquellos que $\mathrm{j} \in \mathbb{N}, \mathrm{j} \leq 11$ guiado por la comparación entre números naturales, cuando el factor de comparación lo establece el racional $\frac{1}{\mathrm{j}}$. Así, y dado que $\mathrm{j}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ se pueden construir, teniendo $\mathrm{k}+\frac{1}{\mathrm{j}}$, 11 números que asegura cumple la condición, evidenciando un manejo de contextos discretos por el estudiante.
D. El estudiante conoce de antemano una posible representación racional del número decimal 0,1 equivalente a $\frac{1}{10}$, y la considera como la mínima diferencia entre dos números consecutivos, es decir que el número siguiente a k es $\mathrm{k}+0{,}1$ que equivale a asegurar que entre k y $\mathrm{k}+0{,}1$ no existe otro número, por ende el único construible que cumple con la condición de la pregunta es uno; desconociendo que j ha de ser mayor a 11.
Estándar/Lineamiento

Grados	8° y 9°

(Es) *Trabajo con los números reales en sus diferentes representaciones.*

(Li) *Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.*

Dimensiones didácticas del ítem

El ítem ofrece la posibilidad de construir distintos números a partir de una expresión algebraica condicionada, donde se sugiere acercarse tanto como se desee a un número propuesto. Se expone la idea que: "[…] $k + \frac{1}{j}$ (con j entero positivo). Cuanto más grande sea j, más cercano a k será el racional construido […]" frase que irá en contravía al uso de los números naturales al desconocer los racionales, pues se podrá confundir el uso y alcance de la expresión expuesta con $k + j$ con j entero positivo, donde cuanto más grande sea j más lejos a k será el número construido.

Es evidente cómo la ordenación de una serie de números racionales con sus distintas clasificaciones (propios, impropios, homogéneos, heterogéneos), se dificulta entre los estudiantes, donde errores recurrentes relacionados con el asocio que se establece con los números naturales se distinguen claramente cuando:

$$\frac{1}{14} > \frac{1}{13} > \frac{1}{12} > \cdots > \frac{1}{3} > \frac{1}{2} > \frac{1}{1}$$

Asociado a

$$14 > 13 > 12 > \cdots > 3 > 2 > 1$$

Escalona y Noriega (1975) ofrecen pautas para el entendimiento del orden establecido en $\mathbb{Q}$ acudiendo al uso de cajas divisoras así:

Figura A
1

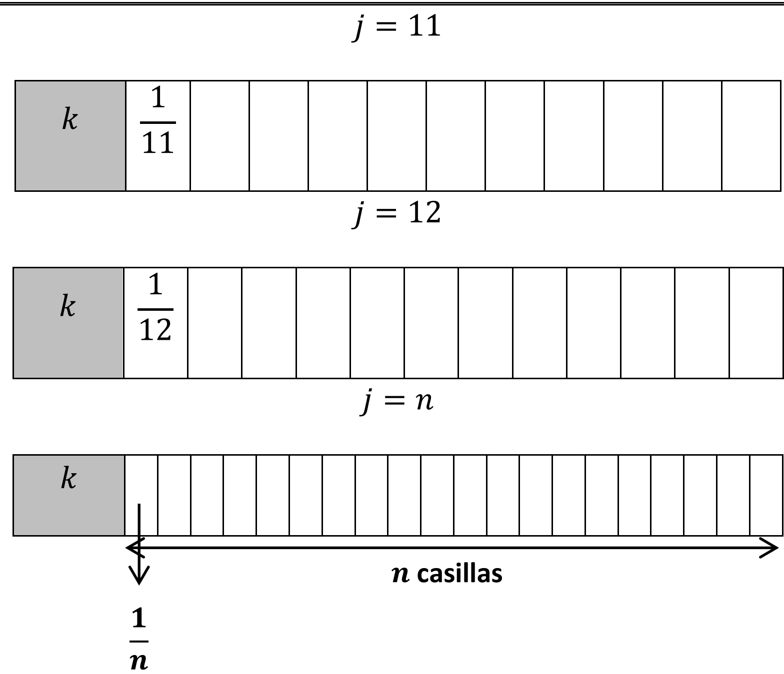
Figura B
1

<table>
<tr><td colspan="4">$1/2$</td><td colspan="4">$1/2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$1/4$</td><td colspan="2">$1/4$</td><td colspan="2">$1/4$</td><td colspan="2">$1/4$</td></tr>
<tr><td>$1/8$</td><td>$1/8$</td><td>$1/8$</td><td>$1/8$</td><td>$1/8$</td><td>$1/8$</td><td>$1/8$</td><td>$1/8$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="30">$1/2$</td><td colspan="30">$1/2$</td></tr>
<tr><td colspan="20">$1/3$</td><td colspan="20">$1/3$</td><td colspan="20">$1/3$</td></tr>
<tr><td colspan="15">$1/4$</td><td colspan="15">$1/4$</td><td colspan="15">$1/4$</td><td colspan="15">$1/4$</td></tr>
<tr><td colspan="12">$1/5$</td><td colspan="12">$1/5$</td><td colspan="12">$1/5$</td><td colspan="12">$1/5$</td><td colspan="12">$1/5$</td></tr>
</table>

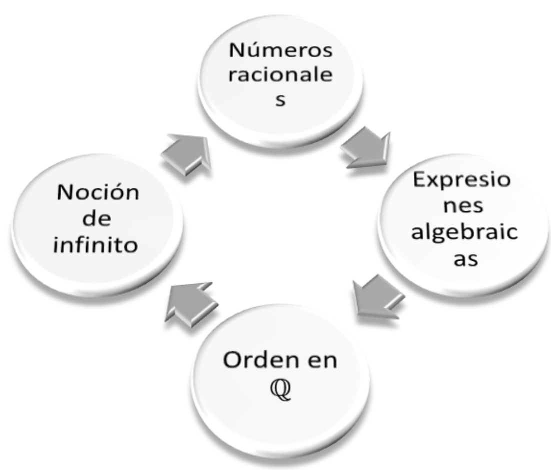
Usando la figura B se observa cómo cada casilla de la caja divisoria se empequeñece a medida que su denominador aumenta, de igual modo se tendrá para la expresión entendida en el ítem:

<table>
<tr><td>$k+\frac{1}{j}$</td><td>Otro tipo de representación:
<table><tr><td>k</td><td>$\frac{1}{1}=1$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">$j=2$
<table><tr><td>k</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr></table>$j=3$
<table><tr><td>k</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td></td><td></td></tr></table>$j=4$
<table><tr><td>k</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>



En el anterior esquema se muestra cómo, cuanto más crece j, la casilla que se agrega a k se acerca más a éste.

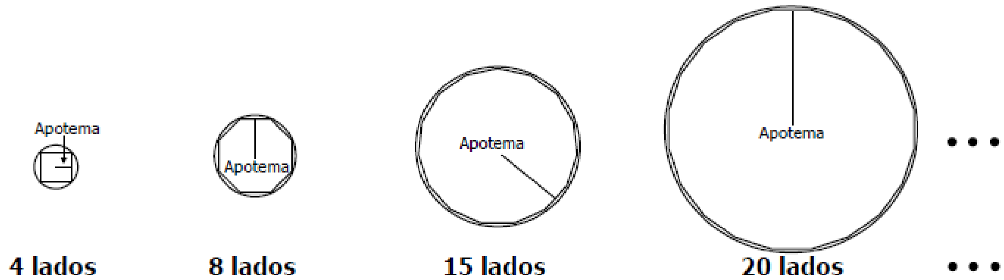
Perímetro conceptual (Red de conceptos/Nodos conceptuales)



5.4. Pregunta: 1.2.04

Ítem

En la secuencia de figuras que aparecen a continuación, se representan polígonos regulares de lado 6, cada uno de ellos inscrito en una circunferencia. En cada polígono se señala la apotema.



Si se continúa la secuencia, y el número de lados del polígono aumenta indefinidamente, la razón entre el perímetro del polígono y su apotema tiende a:

Opciones de respuesta

- **A.** π
- **B.** 2π
- **C.** 3π
- **D.** 6π

Componente	1. Numérico-Variacional (8. Variación en contextos aritméticos y geométricos)
Competencia	2. Razonamiento

Solución (Opción correcta)(Dificultad)

Se procede considerando que el perímetro del polígono inscrito en la circunferencia tiende a ser el perímetro de la circunferencia, así de igual modo la apotema tenderá a ser el radio de la misma. Se puede establecer entonces la razón como símil con el perímetro de la circunferencia: $$2\pi r = P$$ $$2\pi = \frac{P}{r}$$ **(B)**
Rastreo de las opciones incorrectas
A. El estudiante asocia el irracional π con el tratamiento particular que se le da a las situaciones problema relacionadas con la circunferencia, donde π es una constante en los procesos de resolución manifestado en las diferentes fórmulas (perímetro-longitud y área) relativas a la circunferencia: $2\pi r = P$ y $A = \pi r^2$
C. Existen aspectos propios del aprendizaje de la geometría tan enraizados en el estudiante que lo llevan a emplear determinados conceptos en todas las situaciones que pueda llegar a relacionar con la geometría y el cálculo de áreas y perímetros, así el hecho de que el área de un triángulo esté dada por $A\Delta = \frac{b \times h}{2}$ conducirá a que se opere con la información dada en una fórmula que no está relacionada con el problema propuesto.
D. El estudiante procede relacionando la longitud del lado del polígono regular con el cuestionamiento planteado, asumiendo que el valor dado (6) tiene que ver con la razón entre el perímetro del polígono y su apotema, así se asocia la información dada en el planteamiento del ítem con la opción de respuesta señalada.
Dimensiones didácticas del ítem

En relación con las posibles dificultades mencionadas y que conducen al estudiante a las diferentes opciones de respuesta encontramos que parte de la forma de proceder está dada por lo que Vinner (1991) llama *esquema conceptual*, definiéndose como aquello que se presenta en la mente cuando se nombra un concepto, es decir, la estructura cognitiva de un estudiante asociada a un concepto matemático estará formada por imágenes mentales que fruto de la experiencia, en la que se interiorizan propiedades y se desarrollan procedimientos, ha asociado a dicho concepto.

Luego el *esquema conceptual* de los estudiantes al enfrentarse con situaciones que involucren el cálculo del área y la longitud de la circunferencia está fuertemente asociado con π, operando en muchas ocasiones arbitrariamente con él.

Corberán (1996) hace una caracterización de los errores y dificultades que presentan los estudiantes de geometría en el cálculo de áreas, una de sus conclusiones es que los estudiantes limitan el uso de fórmulas a su aplicación inmediata, sustituyendo las dimensiones por sus medidas dadas para realizar un cálculo rutinario que le proporcionará la medida buscada, sin comprender que la fórmula proporciona información sobre los elementos de la superficie, de los que va a depender el área de ésta.

Radatz (1979) hace una categorización de los errores cometidos por los estudiantes en la solución de situaciones particulares e razonamiento geométrico y numérico:

E1: errores debido a la dificultad del lenguaje

E2: errores debidos a las dificultades para obtener información espacial

E3: errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos destrezas y conceptos previos

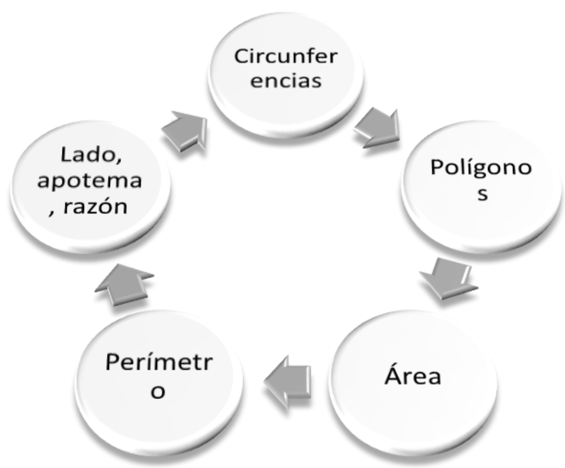
E4: errores debidos a la rigidez del pensamiento

E5: errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes

Observamos que varios de los procedimientos anteriormente mencionados en el rastreo de errores y los posibles procedimientos realizados por los estudiantes están correlacionados con los errores que Radatz menciona.

Grados	10° y 11°
(Es) Uso argumentos geométricos en la solución de problemas matemáticos y de otras ciencias. **(Li)** Formulo hipótesis, hago conjeturas y predicciones, uso hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.	

Perímetro conceptual (Red de conceptos/Nodos conceptuales)



5.5. Pregunta: 1.3.05

Ítem

<table>
<tr><td colspan="2">Se desea adquirir un terreno de forma cuadrada con un perímetro entre 4 y 20 metros. Si x representa el lado del terreno, los valores que puede tomar x para que el perímetro del terreno cumpla la condición dada son:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Opciones de respuesta
A. $4 < x < 20$
B. $0 < x < 16$
C. $2 < x < 10$
D. $1 < x < 5$</td></tr>
<tr><td>Componente</td><td>1. Numérico-Variacional
(7. Descripción de fenómenos de cambio y dependencia)</td></tr>
<tr><td>Competencia</td><td>3. Solución de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Solución (Opción correcta)(Dificultad)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resolver la situación problema, implica que el estudiante identifique que un cuadrado tiene la medida de los lados iguales e identifique que x hace relación a este, de modo que $4x$ equivalga al perímetro, así, si se establece x_0 como la menor medida del lado para que se cumpla $4 < 4x_0$, y x_1 como la mayor medida del lado para que se cumpla $4x_1 < 20$, se tendrá que:
$$1 < x_0, x_1 < 5$$
$$1 < x < 5$$
(D)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rastreo de las opciones incorrectas</td></tr>
</table>

A. El estudiante desconoce las condiciones iniciales del problema donde se explica la construcción de un cuadrado y asume que se establece la medida de una longitud denominada perímetro y relaciona directamente las medidas ofrecidas en el estímulo y las representa por medio de un intervalo con tales magnitudes $4 < x < 20$.

B. El estudiante considera las posibles medidas de las áreas cuando la medida del lado del cuadrado está entre 0 y 4, así, sólo reconoce valores por debajo de la cota inferior de los perímetros permitidos. Matemáticamente se tendrá que si x es la medida del área y z la del lado donde $0 < z < 4$, z^2 será el área cuyo rango es $0 < x < 16$ cuando $z = 0$ y $z = 4$.

C. El estudiante considera el semiperímetro de un cuadrado como la condición respecto a la medida del lado de este, de modo que si se establece x_0 como la menor medida del lado para que se cumpla $4 < 2x_0$ y x_1 como la mayor medida del lado para que se cumpla $2x_1 < 20$ se tendrá que:

$$2 < x_0, x_1 < 10$$

$$2 < x < 10$$

Estándar/Lineamiento

Grados	8° y 9° / 4° y 5°

(Es) Resuelvo y formulo problemas en los que se relacionen magnitudes de figuras planas y de sólidos.

(Li) Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

Dimensiones didácticas del ítem

La pregunta aboga por el reconocimiento del concepto de perímetro alejado de la noción de área, nociones ligadas por los estudiantes. Lo anterior puede evidenciarse por cómo se sugieren las opciones de respuestas ya que ninguna intenta, de manera directa, rastrear la eventual asociación con el área de los posibles cuadrados, pues podrían aparecer a modo de ejemplo:

(1) Respecto a los datos directos extraídos del ítem:

$$4^2 < x < 20^2$$

$$16 < x < 400$$

(2) Respecto a la opción correcta asociada a su cuadrado (área):

$$1^2 < x < 5^2$$

$$1 < x < 25$$

(3) Respecto a su semiperímetro asociado a su cuadrado (área):

$$2^2 < x < 10^2$$

$$4 < x < 100$$

La relación que estable el estudiante entre el concepto de perímetro y área ha sido documentada en varias investigaciones donde se ha demostrado cómo las dificultades conceptuales reveladas, en cuestiones relacionadas con el área y el perímetro, en la escuela primaria, permanece en alumnos avanzados, incluso en la universidad (Speranza, 1987).

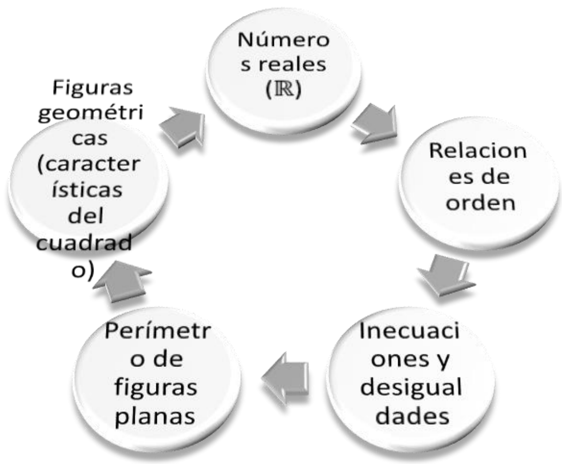
Así enfáticamente el ítem tendrá dos perspectivas de análisis, la primera; sobre la resolución de problemas modelados por expresiones algebraicas y la segunda, el uso de inecuaciones como resultado de la descripción de relaciones entre, para este caso, algunas medidas.

Para el primer aspecto, se podrá tener en cuenta factores de obstáculo epistemológico caracterizado como aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que por esta razón se fija a la mente del estudiante, pero que posteriormente resulta inadecuado cuando el alumno se enfrenta a nuevos problemas (Garrote, Hidalgo, & Blanco, 2004) (citando a (Brousseau, 1997)), así enlazado al ítem; el Grupo Azarquiel (1991), Socas (1997) y otros (Palarea, 1999), resumen 5 grupos de dificultades asociados al estudio del álgebra en estudiantes de bachillerato:

- Asociados a dos sentidos: semántico (significado, sentido o interpretación de signos) y sintáctico (papel que desempeña una palabra)
- Asociados a los procesos de pensamiento y que surgen debido a la naturaleza lógica del álgebra.
- Asociadas a los procesos de enseñanza, que se derivan del propio currículum de matemáticas, de la institución escolar y de los métodos de enseñanza.
- Asociadas a los procesos de desarrollo de los alumnos.
- Asociadas a las actitudes afectivas y emocionales de los alumnos hacia el álgebra.

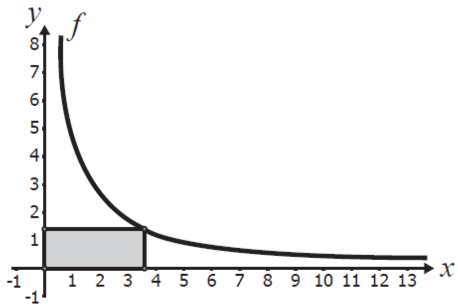
Al igual, y esto como parte fundamental en el análisis de la pregunta, se debe establecer qué tanto entiende el estudiante sobre el concepto de inecuación, donde se ha encontrado entre muchas dificultades, para Garrote y otros (2004), que:

- Los estudiantes no establecen diferencias significativas entre este concepto y el de ecuación, es decir, la diferencia entre unas y otras es el signo que se escribe entre los dos términos que forman parte de las mismas, mientras que en las ecuaciones utilizamos el signo "=", en las inecuaciones utilizamos los signos "<", ">", "≤", o "≥". Además, este signo carece de valor semántico ya que se utiliza como un nexo entre los dos miembros de la inecuación.
- Siguiendo con la interpretación que los alumnos hacen de los signos utilizados en el trabajo con inecuaciones, añadir que esa ausencia de significado también se

manifiesta en dificultades al leer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, es decir, dificultades para reconocer la equivalencia de las expresiones x >1 y $1<$ x.
Perímetro conceptual ***(Red de conceptos/Nodos conceptuales)*** 

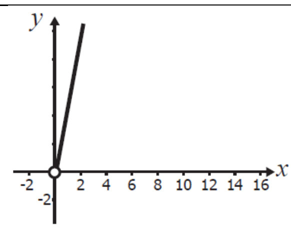
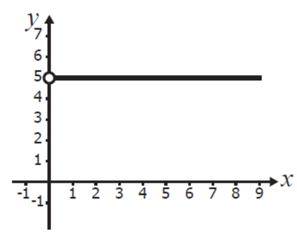
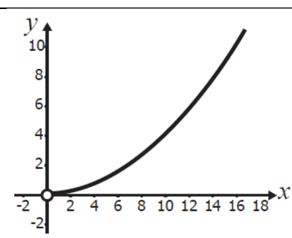
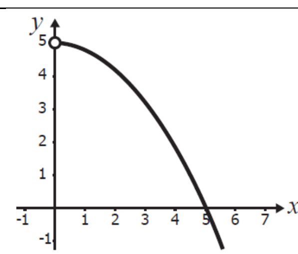
5.6. Pregunta: 1.2.06

Ítem
El área de los rectángulos que se pueden construir a partir del origen, los ejes y un punto que pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \frac{5}{x}$, donde $x > 0$, se describe con la expresión $A_x = x \cdot f(x)$.



¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a A_x?

Opciones de respuesta

A.	**B.**
	
C.	**D.**
	

Componente	1. Numérico-Variacional (9. Concepto de función)
Competencia	2. Razonamiento
Solución (Opción correcta)(Dificultad)	

El estudiante es consciente de que el área de los rectángulos generados está dada por el producto entre la variable y la función, esto es equivalente a la siguiente expresión:

$$A_x = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{5}{x} = 5$$

Generando que la gráfica de la función $A_x = 5$ sea el de una constante con $y = 5$.

(B)

Rastreo de las opciones incorrectas

A. El estudiante puede elegir esta opción, pues considera que el área de los rectángulos aumenta o disminuye en la misma medida en que la variable lo hace, desconociendo el carácter constante del comportamiento del área generada y proponiendo una función de variación proporcional y lineal, esto es: $A_x = 5x$

C. El estudiante procede asumiendo que las diferentes áreas bajo la curva están dadas por el siguiente producto: $A_x = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot x \cdot x = \frac{1}{25}x^2$ perdiendo de vista la información suministrada por el ítem: $A_x = x \cdot f(x)$

D. Se procede interpretando que el área de los diferentes rectángulos generados disminuye a medida que la variable aumenta, esto como consecuencia de la interpretación errada de la gráfica presentada, de tal manera que relaciona el área con la única gráfica que muestra decrecimiento entre las opciones planteadas.

Estándar/Lineamiento

Grados	10° y 11° / 8° y 9°
(Es) Observo las propiedades y analizo las relaciones entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones. **(Li)** Construyo, interpreto y ligo varias representaciones de funciones y relaciones.	

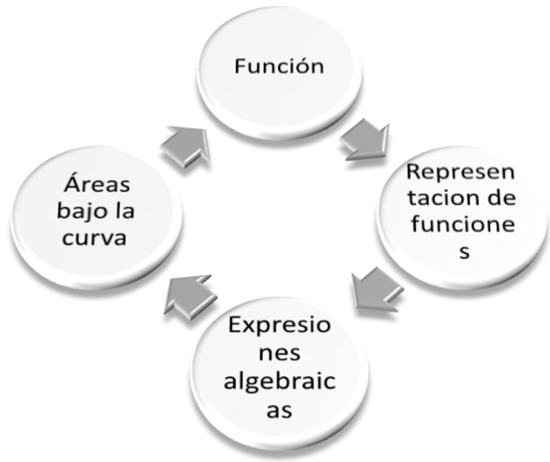
Dimensiones didácticas del ítem

El concepto de función está claramente inmerso en el ítem, y es considerado como unificador y transversal en la matemática, Abrate (2006) reconoce la complejidad del concepto afirmando que si bien el concepto de función en el sentido de dependencia entre variables aparece en la formación matemática de estudiantes desde muy temprana edad, no es un concepto sencillo.

El ítem plantea la posibilidad de interpretar diferentes representaciones de las funciones puestas en juego, cabe la posibilidad de que el estudiante incurra en una estrategia errada de solución al no establecer conexiones entre una representación y otra, en relación a este Janvier (1987) afirma que los estudiantes no han integrado el concepto de función hasta que no son capaces de pasar de una de estas representaciones (descripción verbal, diagramas de flechas, tablas, graficas, fórmulas) a todas las demás de forma espontánea y flexible, realizando transferencias entre ellas, pero conservando su carácter global e inseparable. No obstante Peralta García (2002) señala que frecuentemente los estudiantes consideran el registro tabular como una herramienta inmediata que permite localizar puntos en el plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma.

Numerosos autores se refieren a estas transferencias de una representación a otra como convenciones o traducciones y esto es en realidad lo que son, ya que es necesario pasar de un lenguaje verbal, a uno gráfico o a uno algebraico. De las diferentes representaciones de una función las más abstractas son las gráficas y expresiones algebraicas.

Algunas investigaciones evidencian la dificultad para efectuar una lectura a través de representaciones gráficas pues se busca cambiar de código pasando de uno gráfico a uno verbal, algebraico y viceversa. En referencia a la lectura en representaciones gráficas, Curcio (1994) describe tres niveles distintos de comprensión de las mismas: 1. “Leer los datos”: este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo. 2. “Leer dentro de los datos”: incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas. 3. “Leer más allá de los datos”: requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico. Entre tanto que los estudiantes que responden erradamente a la pregunta estarán situados en el nivel 1.
Perímetro conceptual ***(Red de conceptos/Nodos conceptuales)***



5.7. Pregunta: 1.3.07

Ítem	
El conjunto de divisores de un número natural es finito. Este conjunto puede tener un número par o impar de divisores. El subconjunto de los números naturales en que **todos** sus elementos tienen un número impar de divisores es:	
Opciones de respuesta **A.** Triangulares: $\{1, 3, 6, 10, 15, \dots\}$ **B.** Cuadrados: $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ **C.** Impares: $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ **D.** Cubos: $\{1, 8, 27, 64, 125, \dots\}$	
Componente	1. Numérico-Variacional (5. Reconocimiento de regularidades y patrones)

Competencia	3. Solución de problemas
Solución (Opción correcta)(Dificultad)	
En este problema, aunque su *enfoque conceptual* matemático recae sobre la teoría de números; el proceso que se pide es determinar y evaluar el concepto y uso de la definición de divisor de un número natural y, establecer una característica de par o impar sobre los tamaños (cardinal) de los conjuntos: Se tendrá que D_n es el conjunto de divisores de n siendo elemento del conjunto *Cuadrados*, y T_{D_n} el tamaño (cardinal) del conjunto D_n. $D_1 = \{1\} \rightarrow T_{D_1} = 1$ $D_4 = \{1, 2, 4\} \rightarrow T_{D_2} = 3$ $D_9 = \{1, 3, 9\} \rightarrow T_{D_9} = 3$ $D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\} \rightarrow T_{D_{16}} = 5$ $D_{25} = \{1, 5, 25\} \rightarrow T_{D_{25}} = 3$ $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \rightarrow T_{D_{36}} = 9$ **(B)**	
Rastreo de las opciones incorrectas	
A. El estudiante relaciona el nombre del conjunto, triangulares; con la cualidad que se pide tenga el tamaño de los divisores de cada elemento de este, asociando que los triángulos tienen una cantidad impar de lados o vértices, de modo que se mantendrá esa cualidad para los divisores de los elementos; así, desconoce la noción de divisor de un número.	
C. El estudiante realiza una correspondencia directa entre el cualidad que tienen los elementos de este conjunto y la condición que debe poseer el cardinal del conjunto formado	

por los divisores de los elementos pertenecientes a este (Conjunto de los impares). Por tal razón, desestimando el significado de "divisor de", admite que dado que son números impares, tendrán una cantidad impar de divisores.
D. El estudiante, dado que los elementos del conjunto son números cubos, asocia que la tercera potencia de un número natural, por ser una potencia impar, hará que la cantidad de divisores de cada uno de estos sea impar.
Estándar/Lineamiento

Grados	4° y 5° / 1° y 3°
(Es) Resuelvo y formulo problemas aplicando propiedades de los números y de sus operaciones. **(Li)** Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.	

Dimensiones didácticas del ítem El ítem reúne tres aspectos para su comprensión y alcance didáctico. El primero, el significado de conjunto finito como la cualidad mesurable de sus elementos donde el cardinal de este se puede representar por un número natural. El segundo, la implicación de ser divisor o no de un número natural que se define como: Sea $a, b \in \mathbb{N}$; a es divisor de b si existe un número natural c tal que $b = a \cdot c$. Por último, el tercer aspecto refiere a la deducción de la solución de manera analítica sobre el porqué necesariamente la cantidad de divisores de los números cuadrados es impar. Los divisores de un número natural k se pueden organizar por parejas, cumpliéndose que su producto sea igual a k. Esta

comprobación se puede realizar al organizar de menor a mayor los divisores del número k y realizar los múltiples productos entre sus extremos, ejemplo:

El conjunto D_{20} contiene los divisores del número 20 así:

$$D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Siguiendo lo anterior dicho se tiene que:

$$1 \times 20 = 20$$

$$2 \times 10 = 20$$

$$4 \times 5 = 20$$

Esta información sugiere considerar la condición de los números cuyos divisores no generan estás parejas de manera *exacta*, teniendo un divisor de más que hace del tamaño del conjunto de sus divisores una cantidad impar; esto sólo sucede con los cuadrados, ya que por obligación la raíz t de un número cuadrado q, sólo se puede emparejar con sí misma, sin existir un divisor mayor o menor a esta que multiplicado por t sea igual a q, así se constituye en el *divisor de más* que hace impar el cardinal del conjunto de divisores de un número cuadrado. Ejemplo:

36 es un número cuadrado, cuyos divisores son:

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Generamos las parejas de los extremos:

$$1 \times 36 = 36$$

$$2 \times 18 = 36$$

$$3 \times 12 = 36$$

$$4 \times 9 = 36$$

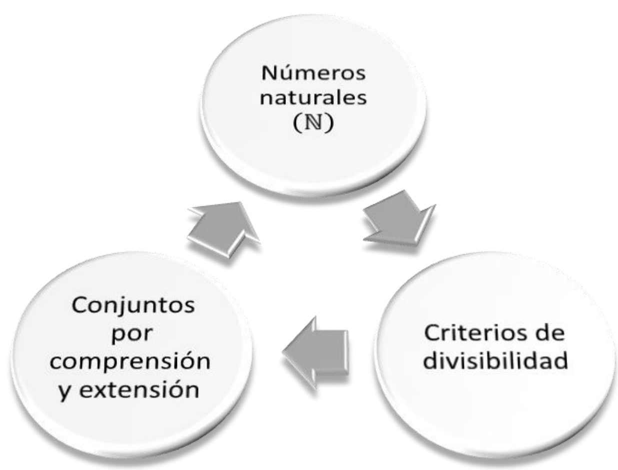
$$\underline{6 \times 6 = 36}$$

El último producto $6 \times 6 = 36$ es el cuadrado de la raíz que cuenta como el elemento $+1$ sumado a la cantidad de parejas de divisores previas; por ende una cantidad impar de divisores de 36.

Si bien el análisis previo podría adherir el ítem a la competencia *razonamiento*, se considera que el estudiante resolverá una situación problema, donde no es directamente el anterior camino el único de respuesta, ya que bastará con identificar para cada elemento de cada conjunto sus divisores y determinar si su tamaño es impar o par.

Así, este ítem se puede asociar al aspecto *educativo* comentado por Martínez Aznar (1990) cuando dice que la resolución de problemas constituye un procedimiento activo de aprendizaje donde los alumnos son los protagonistas, donde puede resultar una tarea altamente motivadora coadyuvando eficazmente a modificar las posibles concepciones alternativas que tienen en un campo determinado, para el caso; se podrá distinguir los conceptos de divisor, múltiplo, par, impar, finito e infinito.

Perímetro conceptual *(Red de conceptos/Nodos conceptuales)*



5.8. Pregunta: 1.3.08

Ítem Un colegio necesita enviar 5 estudiantes como representantes a un foro sobre la contaminación del medio ambiente. Se decidió que 2 estudiantes sean de grado décimo y 3 de grado undécimo. En décimo hay 5 estudiantes preparados para el foro y en undécimo hay 4. ¿Cuántos grupos diferentes pueden formarse para enviar al foro?	
Opciones de respuesta **A.** 9 **B.** 14 **C.** 20 **D.** 40	
Componente	1. Numérico-Variacional (3. Significado y utilización de operaciones)
Competencia	3. Solución de problemas
Solución (Opción correcta)(Dificultad)	
La necesidad de contar y utilizar técnicas (de conteo) se hace evidente en la solución de este problema, pues en principio se debe distinguir entre permutación y combinación y generar un producto entre dos conteos de diferentes tamaños. Aquí no interesa el orden, por ende se deberá asociar a la combinatoria (números combinatorios o coeficientes binomiales) y al principio fundamental del conteo ($m \times n$ maneras):	

<table>
<tr><td>

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{3}=\frac{5!}{2!\,(5-2)!}\cdot\frac{4!}{3!\,(4-3)!}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1}=10\cdot 4=40$$

(D)</td></tr>
<tr><td>Rastreo de las opciones incorrectas</td></tr>
<tr><td>A. El estudiante asume que la cantidad de grupos diferentes que pueden formarse está dada por la suma del número de estudiantes que hay en grado décimo y undécimo (5 + 4 = 9) desconociendo el carácter combinatorio de la situación.</td></tr>
<tr><td>B. Dada la información que proporciona el problema: “Se decidió que 2 estudiantes sean de grado décimo y 3 de grado undécimo. En décimo hay 5 estudiantes preparados para el foro y en undécimo hay 4” el estudiante deduce que 2 estudiantes de cinco posibles (de grado décimo) y 3 estudiantes de 4 posibles (de grado undécimo) implicará tener 7 posibles formas de combinar los estudiantes de grado décimo y 7 posibles formas de combinar los de undécimo, luego la respuesta estará dada por la suma de las dos posibles formas de combinar los estudiantes de cada grado: 7 + 7 = 14.</td></tr>
<tr><td>C. El estudiante asume que la respuesta estará dada por el producto de la cantidad de estudiantes preparados para el foro de grado décimo y undécimo 5 x 4 = 20</td></tr>
<tr><td>Estándar/Lineamiento
<table>
<tr><td>Grados</td><td>11</td></tr>
<tr><td colspan="2">(Es) Resuelvo y formulo problemas de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazamiento).
(Li)</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Dimensiones didácticas del ítem</td></tr>
</table>

Algunas investigaciones documentan los procesos de los estudiantes en el desarrollo de pensamiento combinatorio; en diferentes trabajos realizados sobre combinatoria, se tienen en cuenta las reflexiones e investigaciones realizadas en el campo de la psicología en las que se pone de manifiesto la influencia del razonamiento combinatorio en el desarrollo formal.

Piaget e Inhelder (1951) tratan de determinar el papel de los esquemas combinatorios en la formación de ideas de azar y probabilidad. Una de las razones es que si los sujetos no poseen capacidad de análisis combinatorio, el concepto de probabilidad se puede usar sólo en casos muy restringidos, en los cuales se pueden enumerar directamente los resultados posibles que constituyen el espacio muestral, (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994). Lo cual señala la importancia de la combinatoria para el cálculo de probabilidades. Navarro-Pelayo afirma que el alumno en su respuesta usa, por lo general, el esquema sugerido en el enunciado del problema.

Según Hadar y Hadass (1981) uno de las principales dificultades que encuentra el alumno al resolver problemas combinatorios es la identificación del tipo de configuración combinatoria que se le pide enumerar o contar.

Navarro-Pelayo, Bataner y Godino (1996) consideran que un punto clave en la evaluación del razonamiento combinatorio es identificar el tipo de error en las soluciones de los alumnos. Los investigadores tipificaron los errores más comunes en el razonamiento combinatorio en una muestra de estudiantes de secundaria de la siguiente manera:

E1: Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema.

E2: Error de orden: Este tipo de error, descrito por Fischbein y Gazit (1988), consiste en confundir los criterios de combinaciones y variaciones; es decir, considerar el orden de los elementos cuando es irrelevante o, al contrario, no considerar el orden cuando es esencial.

E3: Error de repetición: El alumno no considera la posibilidad de repetir los elementos cuando esto es posible o repite los elementos cuando no es posible hacerlo.

E4: Confundir el tipo de objetos: Considerar objetos idénticos cuando son distinguibles o que objetos diferentes son indistinguibles.

E5: Enumeración no sistemática: Este tipo de error fue descrito por Fischbein y Gazit (1988), y consiste en resolver el problema por enumeración, mediante ensayo y error, sin un procedimiento recursivo que lleve a la formación de todas las posibilidades.

E6: Respuesta intuitiva errónea: Los alumnos sólo dan una solución numérica errónea, sin justificar la respuesta.

E7: No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente.

E8: No recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula combinatoria.

E9: Interpretación errónea del diagrama en árbol: A pesar de su importancia como herramienta para producir la solución, muy pocos alumnos usaron el diagrama en árbol, incluso en el grupo que había recibido instrucción en Combinatoria, prefiriendo buscar una fórmula conveniente.

E10: Confusión en el tipo de celdas (tipo de subconjuntos): Es decir, creer que podríamos distinguir celdas (subconjuntos) idénticas o que no es posible diferenciar las celdas (subconjuntos) distinguibles.

E11: Error en las particiones formadas.

Así, se designa entonces los errores E2, E5, E7 y sobre todo E6 a los procesos de solución del ítem.
Perímetro conceptual ***(Red de conceptos/Nodos conceptuales)*** 

5.9. Pregunta: 1.1.09

Ítem
La expresión $10^3 = \frac{I}{I_0}$ relaciona la sonoridad de un sonido de 30 decibeles con su intensidad (I) y la menor intensidad (I_0) que percibe el oído humano. ¿Cuántas veces es el valor de I respecto a I_0?
Opciones de respuesta **A.** Una milésima. **B.** Un tercio. **C.** Tres veces. **D.** Mil veces.

Componente	1. Numérico-Variacional (1. Significado del número y sus diferentes usos)
Competencia	1. Comunicación
Solución (Opción correcta)(Dificultad)	
Determinar la cantidad de veces que es una variable de otra, equivale a establecer el factor en que una se iguala la primera con la segunda, así, si se necesita establecer la cantidad de veces que es I_0 iguala a I basta con despejar esta última variable en relación con la expresión mostrada, así: $$10^3 = \frac{I}{I_0}$$ $$10^3 \cdot I_0 = I$$ $$1.000 \cdot I_0 = I$$ Mil veces I_0 equivale a I. **(D)**	
Rastreo de las opciones incorrectas	
A. El estudiante asocia la notación científica 10^3 con la cifra decimal *milésima* dada su representación de 1.000 confundiéndola con $0{,}001$, de este modo estaría respondiendo al cuestionamiento ¿Qué parte es I_0 de I?, contrario al ítem.	
B. El estudiante observa la representación racional (fraccionario) donde usa el exponente como denominador de la expresión utilizando un modo incorrecto en el tratamiento algebraico, según propiedades algebraicas, de ecuaciones y reducción de variables sin	

importar la premisa del ítem, sino encontrando en esta opción de respuesta una correspondencia a seguir:

$$10^3 = \frac{I}{I_0} \rightarrow \frac{1}{3}$$

C. El estudiante desconoce el concepto de exponente empleado en la potenciación, y lo usa como factor donde desaparece la base (10) e iguala $3 \cdot I_0 = I$, demostrando que tres veces I_0 equivale a I.

Estándar/Lineamiento

Grados	6° y 7° / 1° y 3°

(Es) Utilizo números en sus diferentes representaciones (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas.

(Li) Realizo estimaciones de medidas requeridas en la resolución de problemas relativos particularmente a la vida social, económica y de las ciencias.

Dimensiones didácticas del ítem

La pregunta dentro del ítem *¿Cuántas veces es* [...]*?*, sugiere una comparación directa entre los tamaños o medidas de dos objetos (variables), donde sea posible establecer una relación entre ellos. Para el caso; la relación de igualdad por medio de la ecuación de sonoridad en decibeles y su intensidad establece una correspondencia entre las medidas de las variables I e I_0, ahora el interrogante *¿Cuántas veces* [...]*?* Se asocia con el concepto de división desde la enseñanza primaria; tal estructura está puesta de manifiesto en la representación de la ecuación por medio de una razón (fraccionario).

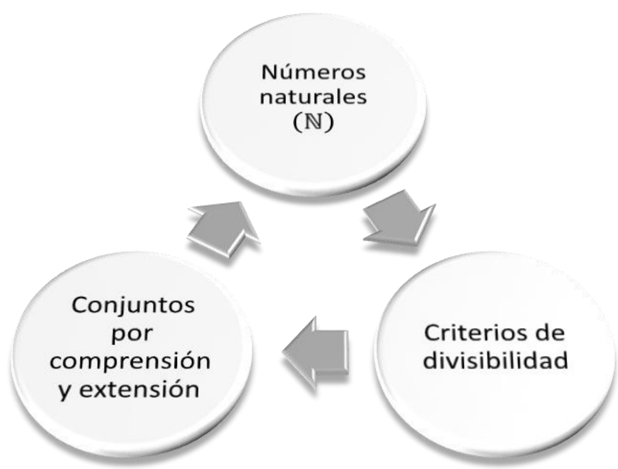
Con lo anterior se prevé, y esto dicho por Roa (2001), que exista un nodo relacional entre la operación y el algoritmo de la división dejándose aparte la comprensión del concepto, así, se cree que dividir es realizar la operación; de la mano vendrá el ítem, pues no basta con identificar la división como fraccionario, sino el entendimiento que sugiere multiplicar a ambos lados de la ecuación por I_0 como comprobación de:

$$(cociente \times divisor) + residuo = dividendo$$

$$(1.000 \times I_0) + 0 = I$$

A lo anterior se suma la dificultad que por experiencia docente se identifica en los estudiantes al momento de aceptar que $x^n \neq n \cdot x$, para el ítem $10^3 \neq 3 \cdot 10$, donde podrá encontrar mayor sentido y seguridad con las opciones **B** y **C**.

Perímetro conceptual *(Red de conceptos/Nodos conceptuales)*



5.10. Pregunta: 1.3.10

Ítem

<table>
<tr><td colspan="2">En determinada zona de una ciudad se construyen edificios de apartamentos en los que cada metro cuadrado tiene un costo de $800.000, y se asegura a los compradores que esta zona anualmente, el metro cuadrado se valoriza un 5% respecto al costo del año anterior. ¿Con cuál de las siguientes expresiones se representa el costo de un metro cuadrado en esta zona, transcurridos n años?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Opciones de respuesta
A. $800.000 + 5n$
B. $800.000(5n)$
C. $800.000\left(\frac{5}{100}\right)^{n}$
D. $800.000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{n}$</td></tr>
<tr><td>Componente</td><td>1. Numérico-Variacional
(9. Concepto de función)</td></tr>
<tr><td>Competencia</td><td>3. Solución de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Solución (Opción correcta)(Dificultad)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Este problema hace generalizar un situación reiterada sobre el cálculo de un porcentaje, siendo un evidente símil del interés compuesto descrito en matemáticas financieras donde para un valor x con un interés compuesto del k% se tiene por años:
<table><tr><th>Año</th><th>Interés</th></tr><tr><td>1</td><td>$x + (kx) = x(1 + k)$</td></tr></table></td></tr>
</table>

2	$x + (kx) + k\big(x + (kx)\big)$ $= \big(x + (kx)\big)(1 + k)$ $= x(1 + k)(1 + k)$ $= x(1 + k)^2$
3	$x(1 + k)^3$
n	$x(1 + k)^n$

(D)

Rastreo de las opciones incorrectas

A. El estudiante considera que la situación presentada se representa por medio de una función lineal, así el 5% estará dado respecto al tiempo y no al valor del metro cuadrado.

B. El estudiante asume una relación de proporción directa entre las variables relacionadas, de modo que encuentra en 5n la constante de proporcionalidad; adicionalmente presenta dificultades en el cálculo de porcentajes.

C. El estudiante determina correctamente el primer de interés, y asume a lo largo del periodo restante el comportamiento será el mismo, de este modo está calculando el 5% del 5% del 5% … de n meses, esto sin tener como referente que la base es $800.000

Estándar/Lineamiento

Grados	6° y 7° / 8° y 9°
(Es) Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. **(Li)** Analizo los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.	

Dimensiones didácticas del ítem

Numerosas investigaciones dan cuenta que los estudiantes no dominan, o al menos no suficientemente, las habilidades requeridas para abordar problemas matemáticos.

Dada la competencia a la que pertenece el ítem estudiado es relevante indagar alrededor de las dificultades presentadas por los estudiantes en la resolución de problemas. En estudios realizados por Schoenfeld, A. (1989), se llega a la conclusión que la resolución de problemas debe ser entendida como la capacidad para enfrentarse hábilmente a situaciones percibidas como difíciles o conflictivas, e involucra la iteración de variados procesos cognitivos. Y que comprende las capacidades de formular, plantear y resolver distintos problemas en diversos contextos, además de comprobar e interpretar resultados y generalizar soluciones. Además de implicar la puesta en práctica de diversas habilidades y la activación de los conocimientos previos pertinentes específicos, para la solución de cada problema planteado.

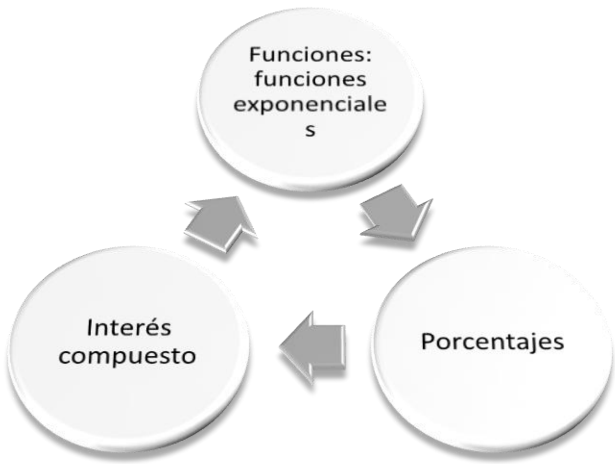
Algunos autores como Del Puerto, Minnaard, y Seminara (2004) consideran que las categorías que surgen en la clasificación de los errores, no son compartimentos estáticos y suelen solaparse unas con otras, ya que rara vez un error obedece a una única causa. Sostienen además, que categorizar los errores posibilita centrar la atención hacia los diferentes aspectos y permite una evaluación y diagnóstico más eficaz, a los efectos de ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas y carencia de sentido de los objetos matemáticos.

Mosvskovitz, H, Taslavsky, I. (1987), realizan una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos, determinando seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Ellas son:

1) Datos mal utilizados: Esto es, los errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. Ya sea porque: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se hace una lectura incorrecta del enunciado, etc.
2) Interpretación incorrecta del lenguaje: Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
3) Inferencias no válidas lógicamente: Son errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.
4) Teoremas o definiciones deformados: Errores que se producen por deformación de un principio, reglas, teorema o de definición identificable.
5) Falta de verificación en la solución: Son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.
6) Errores técnicos: Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

Dado el rastreo de las opciones incorrectas evidenciamos entonces como los estudiantes pueden estar en la clasificación de errores propuesta por Mosvskovitz y Taslavsky en aquellas que usan datos mal utilizados, en inferencias no válidas lógicamente y a la falta de verificación de la solución.

Perímetro conceptual *(Red de conceptos/Nodos conceptuales)*



6. Análisis de la implementación en el aula

En el siguiente apartado del trabajo se presentan los análisis realizados a cada pregunta implementada dentro del aula de clase, se categorizan las respuestas sugeridas por los estudiantes realizando asociaciones a los IAI, la metodología y marco teórico. Como se explicó previamente en la metodología de investigación e implementación, se capturaron datos de tipo cuantitativo y cualitativo donde la *visibilización del pensamiento* sirvió de garante y base teórica para la descripción de estos, encontrándose evidencia de aspectos conceptuales, estructurales y de método que considera el estudiante al momento de contestar los instrumentos diseñados para cada estrategia de aplicación. Durante los análisis se distinguen estadísticas, interpretaciones y relaciones con las *dimensiones didácticas de los ítems* que se articulan con la clasificación de las respuestas que surge de la organización de información proveniente de cada instrumento; la descripción de heurísticas empleadas por el estudiante sirven de materia prima para alcanzar objetivos de investigación propuestos para el trabajo y delimitar el alcance del mismo.

Las fases 7 y 8 descritas en la metodología de investigación confluyen aquí donde adquieren su importancia, ya que resaltan el contraste entre el diseño de los IAI y la implementación dentro del aula, constituyéndose en el capítulo contenedor de las premisas que servirán para la construcción de conclusiones. Un objetivo específico de la investigación busca establecer argumentos que consideren la pertinencia de este tipo de propuesta pedagógica para la preparación de los estudiantes al examen SABER 11, donde el reconocimiento de ellos frente a sus habilidades esgrimen el potencial de estas proposiciones educativas, así, los análisis de la implementación aportan en la deducción de dicha viabilidad en la mejoría del rendimiento estudiantil alrededor de la evaluación estatal.

Las asociaciones se realizan pregunta a pregunta buscando relaciones entre los aspectos evidenciados en los diarios de campo, los IAI y demás factores pedagógicos propios del aula de clase como lo son el ambiente de clase, la asistencia estudiantil, y actividades propias de las instituciones, además, la implementación de las preguntas junto con sus estrategias vinculan los procesos de enseñanza-aprendizaje (docente-estudiante) dentro del aula, relaciones que tendrán mayor papel protagónico dentro de las estrategias IV y V.

En la metodología y presentación de la investigación se comentó acerca de las poblaciones objetivo del trabajo; los análisis de la implementación de cada pregunta obedecen a la unión de estas poblaciones con referencias compartidas entre los investigadores mediante reuniones de trabajo, al igual que la lectura de los diarios de campo mutuos, lo anterior obedece a buscar emular las condiciones en que el examen se presenta, donde diferentes metodologías de enseñanza de dos instituciones distintas, de dos docentes investigadores, son analizadas enteramente con hallazgos similares y una sola lectura investigativa mediante unos mismos instrumentos; este factor hace que el trabajo pierda individualismo y particularización de las muestras asociando los comportamientos y evidencias en ellas como un único insumo de investigación. Por otro lado, teniéndose en cuenta que cada pregunta es implementada por una estrategia de aplicación y recolección de datos distinta entre sí, implica que cada análisis corresponde a diferentes capturas e interpretación de información donde es importante resaltar las características de la naturaleza de ésta, al igual que el alcance del método empleado.

La *visibilización del pensamiento* hace hincapié en la obtención de registros de diferentes índoles con el fin de poder acercarse a aseveraciones investigativas sustentadas en estas, así, las estrategias I, II y III ofrecen la captación de registros escritos y argumentativos sobre la elección y diseño de opciones de respuesta que constituyen datos tanto cuantitativos como cualitativos; sin embargo, pierden rastreo de algunas posibles tendencias de los estudiantes al no indagar directamente sobre sus respuestas, argumentaciones y razones. Las estrategias IV y V posibilitan acciones investigativas no aforadas en las otras, como la persistencia del buscar el porqué de determinadas acciones del estudiante o descarte de opciones de respuesta, ya que la indagación no es hecha por medio de un instrumento escrito si no por la intervención directa de los investigadores quienes tienen la capacidad de injerir en dos vías de acción, una, la presentación y estimulación de los ítems al colegiado, mostrando aspectos a tener en cuenta al momento de dar respuesta, dos, proponiendo preguntas donde las dudas, comentarios y acciones de los estudiantes son puestos de manifiesto e indagados por el docente investigador proporcionando información distinta y de tipo cualitativo diferente a la que se obtiene por medio de las primeras tres estrategias.

Para cada estrategia de implementación se construyen las siguientes categorías de análisis:

Estrategia I, II, III:

Dado que estas estrategias buscan captar las razones de escogencia, resolución o propuesta de opción de respuesta de los estudiantes, se tendrán en cuenta la *clasificación de argumentos* hecha por Muñoz y Musci (2013, págs. 44-52) realizándose una abstracción contextual en el marco del trabajo de investigación y así adquirir sentido. Lo anterior quiere decir, que sostenidos en tales clasificaciones y sus definiciones se trasladan a nuestro campo investigativo mediadas por ejemplificación de los argumentos y jerarquizadas en tres niveles.

- **Nivel básico:** Los argumentos no utilizan aspectos relacionados con la pregunta o, su explicación se centra en nociones intuitivas y de sentido común (Entiéndase sentido común cómo la desestimación de la explicación, pues la opción de respuesta en sí resulta lo suficientemente evidente en su valor de verdad) sin develar sus premisas. Para Muñoz y Musci (2013) este tipo de argumentación puede interpretarse como "*por indicio*", ya que se cita cierto indicio, síntoma o marca distintiva en el dato o típica de las situaciones o personas. Se considera dato a la información que puede obtenerse, para este caso, de la pregunta.
  Ej.: *"Cómo dice que al sumar, sumé todos los datos de la pregunta"* – El indicio, *"al sumar",* está presentado en el ítem sin que esto sea razón exclusiva para la elección o sugerencia de una opción de respuesta.

- **Nivel medio**: El estudiante revela una de sus premisas asociada a la razón fundamental de su argumento, donde se destacan los ejemplos o afirmaciones incompletas, carentes de aspectos que evidencien relación directa con la pregunta.

- *Por el peso de las cosas*: Las circunstancias o condiciones de la pregunta y la elección de la opción de respuesta obligan al designo de la conclusión.

  Ej.: *"Es la única opción de respuesta que cumple con la condición de ser menor a…"* – Dada una condición dentro del ítem el estudiante la reconoce y determina qué dato sirve para determinar la opción de respuesta.

- *Por comparación (analogía)*: Del tipo "semejanza": se presenta lo dudoso o controversial como algo que tiene semejanzas con algo que no es dudoso o controversial, para mostrar que lo que se aplica a lo que ya está aceptado, también se aplica a lo que se está sustentando.

  Ej.: *"Esto es igual a la multiplicación, por ende siempre crece"* – El estudiante asocia estructuras, conocimientos o experiencias previas con la elección o propuesta de opción de respuesta.

- *Por el ejemplo:* Proporciona un caso concreto, particular, del concepto que se está exponiendo o a aquello que quiere hacerse referencia respecto a la pregunta u opción de respuesta.

  Ej.: *"Esta opción de respuesta funciona porque por ejemplo si utilizo el 3…"* – Existe la posibilidad de mostrar un ejemplo conveniente y suficiente para justificar sus elección.

- **Nivel superior:** La razón o razones, premisa o premisas, que constituyen el argumento se basan en nociones y aspectos matemáticos que demuestran un dominio o acercamiento conceptual valioso respecto a lo analizado en los IAI de cada pregunta. Así, se tiene contextualmente los siguientes tipos de argumentos (Muñoz & Musci, 2013):

- *Por definición:* El estudiante se remite a la definición de una noción o concepto matemático, o aspectos relacionados con esta, para sustentar su argumento.

  Ej.: *"Porque todo número cuadrado tiene una cantidad impar de divisores"* – Se reconoce una premisa asociada a una definición que sirve de prueba suficiente para la elección de una opción de respuesta.

- *Por autoridad:* El centro del argumento está asociado a una afirmación cuyo valor de verdad es referido al cuerpo conceptual de las matemáticas.

  Ej.: *"El teorema de Pitágoras asegura el cálculo de la medida del lado restante en el triángulo rectángulo"* – Se asegura de justificar su respuesta por el alcance y uso de conceptos matemáticos en contextos propios de su empleo.

Estrategias IV, V:

Para estas dos estrategias aunque no se implementaron instrumentos de recolección de la información formales escritos durante la intervención se buscó evidenciar la apropiación de los estudiantes con los aspectos conceptuales propios de cada pregunta, así como las estrategias de solución a las que acuden y la forma en que aplican los diferentes conceptos, se pretendió dar cuenta de los aspectos mencionados en la pregunta de investigación y que son difícilmente rastreables por medio de las anteriores estrategias, para de esta manera establecer implícitamente algunas categorías de análisis y de argumentación, los registros están dados por diferentes grabaciones de tipo audiovisual.

Se busca la descripción de los procesos de solución y las posibles dificultades al momento de argumentar sus posiciones, las estrategias permitirán evidenciar aspectos concretos relacionados con la comprensión e interpretación de la pregunta desde la perspectiva metodológica principalmente, así como la posibilidad de que el estudiante manifieste preguntas acerca de la pregunta, aspectos que difícilmente se podrían rastrear desde otras estrategias.

El análisis de la implementación en el aula para estos cuatro ítems se dio a partir de la extracción de momentos relevantes de los videos y las grabaciones realizadas en las dos estrategias, que permitieran evidenciar aquellos aspectos que no emergían en las otras, dichos momentos fueron seleccionados de ambas muestras y el material analizado contó con recursos de las dos poblaciones indistintamente, de este modo no se distingue que comentario pueda pertenecer a una u otra institución u estudiante, sino de manera colegiada.

6.1. Análisis de la pregunta 1.2.02

Estrategia de implementación: I

Ítem: 1.2.02

Una prueba atlética tiene un récord mundial de 10,49 segundos y un récord olímpico de 10,50 segundos. ¿Es posible que un atleta registre un tiempo, en el mismo tipo de prueba, que rompa el récord olímpico pero no el mundial?

Opciones de respuesta:

A. Sí, porque puede registrar, por ejemplo, un tiempo de 10,497 segundos, que está entre los dos tiempos récord.

B. Sí, porque puede registrar un tiempo menor que 10,4 y marcaría un nuevo récord.

C. No, porque no existe un registro posible entre los dos tiempos récord.

D. No, porque cualquier registro menor que el récord olímpico va a ser menor que el récord mundial.

Opción correcta: A

- ***Opción correcta***

La escogencia de opción de respuesta y su distribución para esta pregunta en este apartado del instrumento fue:

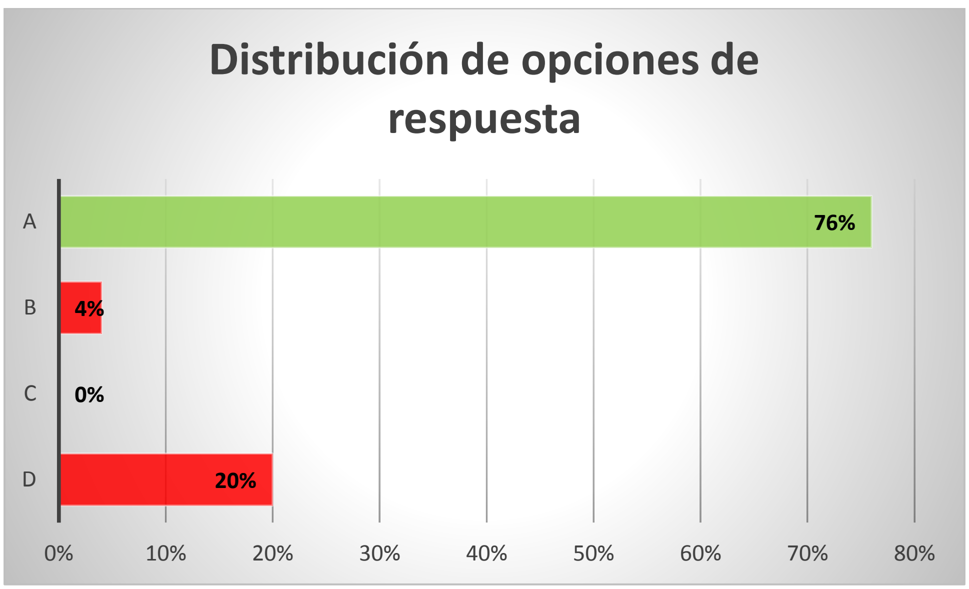


Diagrama Barras 3: Porcentaje de estudiantes según la elección de su opción de respuesta P.1.2.02.

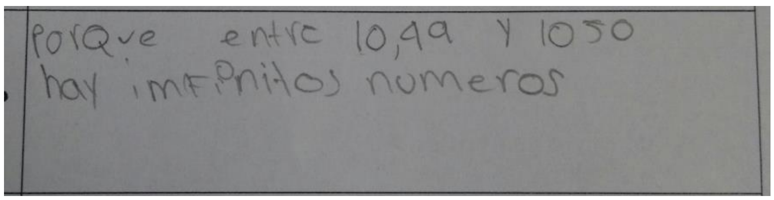
❖ ***¿Por qué eligió esa opción?***

A continuación se muestran ejemplos que sirvieron para la categorización de las respuestas y sus argumentos correspondiente al instrumento y su apartado propicio para la escritura de estos. Se comenta y distribuye la población según la opción de respuesta elegida y sus razones de escogencia.

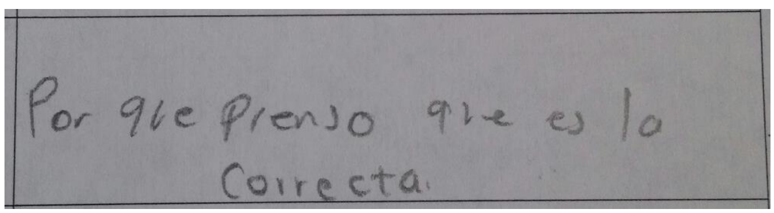
Opción A: Sí, porque puede registrar, por ejemplo, un tiempo de 10,497 segundos, que está entre los dos tiempos récord.

El 76% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

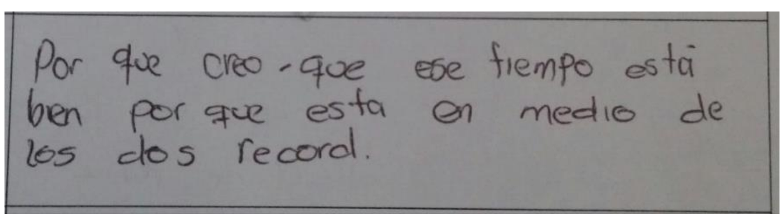
31%: “*hay infinitos números entre 10,49 y 10,50”*



52%: “*porque sí” – “no entendí la pregunta”*



17%: *“Es un tiempo medio”*



La mitad de los estudiantes centran su argumento en razones desligadas del uso de nociones o comprensiones matemáticas, donde predomina el sentido común o el asumir como suficiente para la elección de la opción de respuesta correcta su pensamiento *per sé*. Lo anterior sostiene fuertemente, dada la frecuencia de elección de esta opción y comentado en el IAI al asociar a Centeno (1988) sobre la lentitud en que los estudiantes adquieren nociones de comparación entre decimales; la idea de que el estudiante carece de herramientas discursivas que intervengan al momento de justificar su elección, de modo que es satisfactorio el valerse de su "*intuición*" para determinar la solución de la pregunta; sin embargo, elegir la opción clave puede responder a la comprensión conceptual acertada de la pregunta pero con la incapacidad de traducir su correcto razonamiento por medio de palabras constituyendo esto un *nivel básico* de argumentación; también, y esto como tendencia asociada a este tipo de razones, algunos estudiantes quienes eligieron esta opción destacan su falta de entendimiento de la misma, señalando incluso que proceden aleatoriamente, pero desestiman el poder de esta heurística que corresponde y es consecuencia de la lectura y relectura de las opciones de respuesta pero no logra deducir por qué explícito de su preferencia, sin embargo, el instrumento y la estrategia planteada para esta pregunta no logra rastrear este tipo de justificaciones, tal limitante se preveía trayendo consigo el diseño de otras (estrategias IV y V) que buscan encontrar evidencia de esta supuesta ausencia de argumento. Observar el proceso de elección dentro del aula de clase permite concluir que aunque el sujeto considera una estrategia aleatoria de elección existe un parámetro que limita el sentido de su respuesta convirtiéndose, como fue dicho en una clase de heurística comentada por Schoenfeld (1985).

En un *nivel medio* de argumentación se encuentra el 17% de la población, cuya razón prima es considerar que para estos dos números decimales existe uno en medio, entendido como "entre estos" más que su punto medio. Lo anterior se constituye, aquí suscitando las características de la *visibilización del pensamiento*, en evidencia inicial, si se desea superficial, de una primera aproximación a la densidad de los $\mathbb{R}$, donde mediado implícitamente por la ley de la tricotomía encuentra que los decimales son diferentes, por ende uno mayor que el otro (uno menor que el otro) así se puede encontrar un número (racional o irracional) entre ellos. Situados en el IAI este tipo de argumento se asemeja a la relación racional que puede establecerse entre dos números x e y por medio de $\frac{x+y}{2}$.

El sustento definido para el *nivel medio* de esta opción de respuesta es el que genera la descripción del *nivel superior*, pues la abstracción generalizada de poder encontrar un número entre dos par de números reales diferentes (en su representación decimal para este caso), trae a colación lo comentado en el IAI cuando se hace referencia a que reconocer tal cualidad implica aceptar la cantidad infinita de números que hay entre uno y otro (Stacey, 2004).

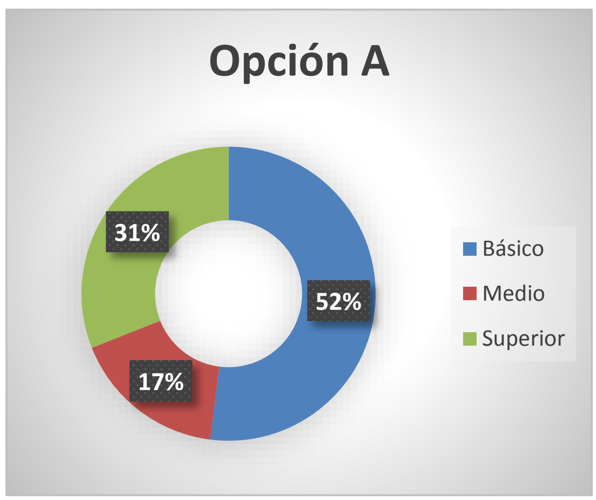
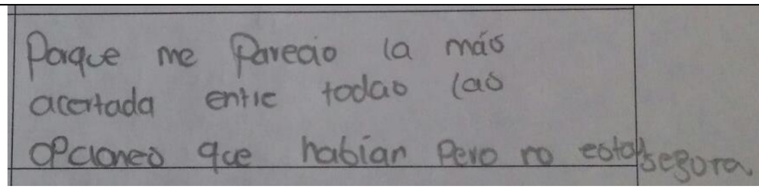


Diagrama Circular 1: Opción A, P.1.2.02.

Opción B: Sí, porque puede registrar un tiempo menor que 10,4 y marcaría un nuevo récord.

El 4% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

100%: *"la más acertada"*



Este argumento está clasificado dentro del *nivel básico*, donde por un indicio no revelado pero presente en el razonamiento del estudiante, este hace la elección. El error que se rastrea por medio de esta opción sugiere que el estudiante determina un tiempo que es menor, está por debajo; de los dos tiempos relacionados desestimando la condición establecida de encontrar un tiempo entre estos, por el contrario el IAI comentaba que la extensión de los números en su representación decimal (cifras a la derecha de la coma) era una razón para establecer el orden de este tipo de números.

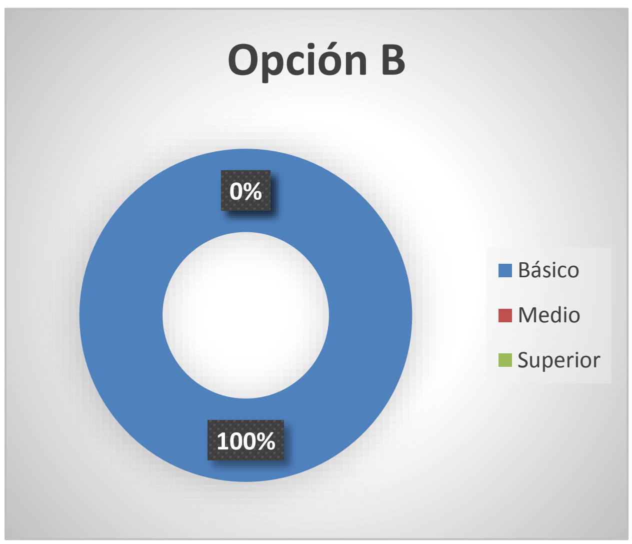


Diagrama Circular 2: Opción B, P.1.2.02.

Opción C: No, porque no existe un registro posible entre los dos tiempos récord.

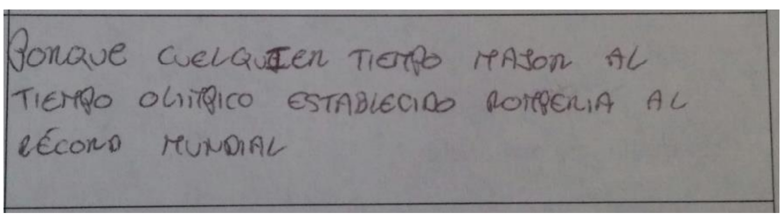
0% de la población eligió esta opción.

Si bien no existe clasificación de argumentos para tal opción de respuesta, la NO elección de esta es un indicador del rastreo que pretende hacer y la forma en qué lo hace, así, si dentro de la muestra poblacional nadie la eligió implica que los estudiantes no reconocen el símil que se puede establecer de la sucesión entre los números naturales respecto a los números decimales y la incapacidad de encontrar un número entre estos si *son consecutivos*, por ende imposible romper el record olímpico sin con ello romper el record mundial. Si bien el tamaño de la población es pequeño podemos deducir que lo situado en el IAI como rastreo del esta opción incorrecta no lo está realizando la implementación del ítem, por tal razón considerarse poco efectivo su naturaleza de **NO** clave cuando nadie la elige.

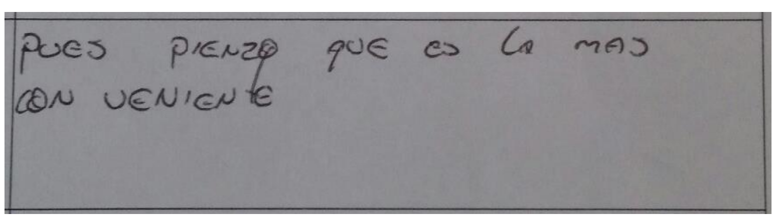
Opción D: No, porque cualquier registro menor que el récord olímpico va a ser menor que el récord mundial.

El 20% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

17%: *"rompería también el record mundial"*


PORQUE CUELQUIER TIEMPO MAYOR AL TIEMPO OLIMPICO ESTABLECIDO ROMPERIA AL RÉCORD MUNDIAL

83%: *"es la más conveniente" – "no entendí la pregunta"*


PUES PIENZO QUE ES LA MAS CON VENIENTE

En el *nivel medio* se encuentran el 17% de la población pues la razón se deriva de una comparación entre los números, donde determina la secuencia de los números decimales como estereotipo de los números naturales y dado que uno es el que le sigue inmediatamente después del otro, encontrar otro número menor a alguno y distinto de estos, es hallar un número menor a los dos. Por otra parte el 83% está asociado al *nivel básico* pues por algún indicio, no evidenciado, acepta esta opción como correcta.

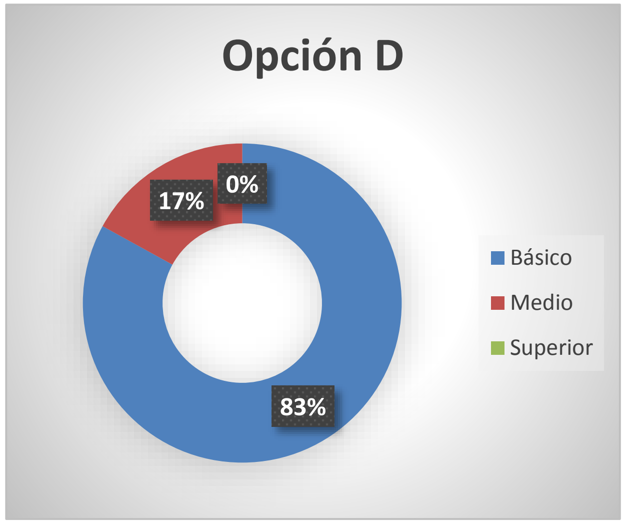


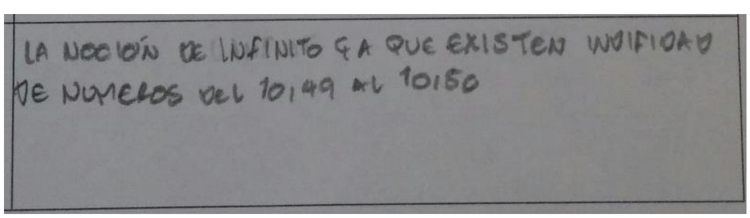
Diagrama Circular 3: Opción D, P.1.2.02.

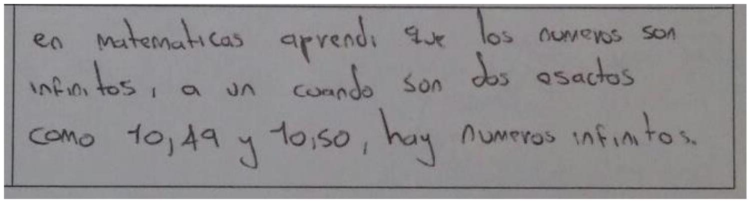
- ***¿Realizó alguna operación matemática? ¿Cuál? ¿Qué conceptos considera (temas) se involucran en la solución de la pregunta?***

En esta parte del análisis se hace referencia a la última parte del instrumento donde aparecen ejemplos y la caracterización de las respuestas en relación al *perímetro conceptual* relacionado en el IAI.

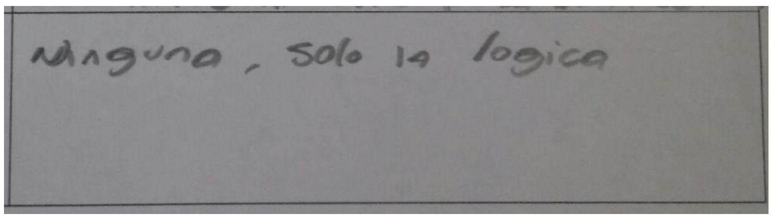
Los estudiantes se categorizaron en 3 grupos según su respuesta:

- ✓ **Grupo 1:** Reconocimiento de la densidad de los números reales o la infinidad de números que se encuentran entre dos números diferentes.

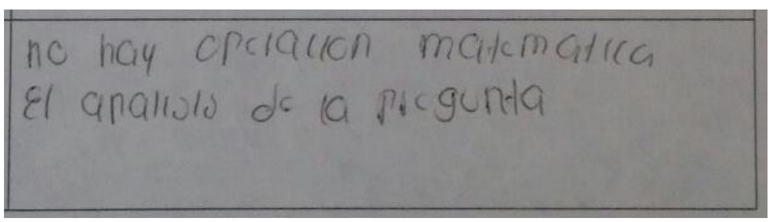



en matematicas aprendi que los numeros son
infinitos, a un cuando son dos esactos
como 10,49 y 10,50, hay numeros infinitos.

- ✓ **Grupo 2:** Asumen *la lógica* como herramienta conceptual asociada a la interpretación de la pregunta, cuando esta deberá partir de reglas inferenciales que no son definidas por el estudiante.


ninguna, solo la logica

- ✓ **Grupo 3:** Los estudiantes consideran que no existe concepto o noción matemática que se relacione con la pregunta, concluyendo que solo el análisis de la pregunta es suficiente para su respuesta.


no hay operacion matematica
El analisis de la pregunta

6.2. Análisis de la pregunta 1.3.10

Estrategia de implementación: I

Ítem: 1.3.10

En determinada zona de una ciudad se construyen edificios de apartamentos en los que cada metro cuadrado tiene un costo de $800.000, y se asegura a los compradores que esta zona anualmente, el metro cuadrado se valoriza un 5% respecto al costo del año anterior. ¿Con cuál de las siguientes expresiones se representa el costo de un metro cuadrado en esta zona, transcurridos n años?

Opciones de respuesta:

A. $800.000 + 5n$

B. $800.000(5n)$

C. $800.000\left(\frac{5}{100}\right)^n$

D. $800.000\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$

Opción correcta: D

Opción correcta

- Distribución de elección de opción de respuesta:

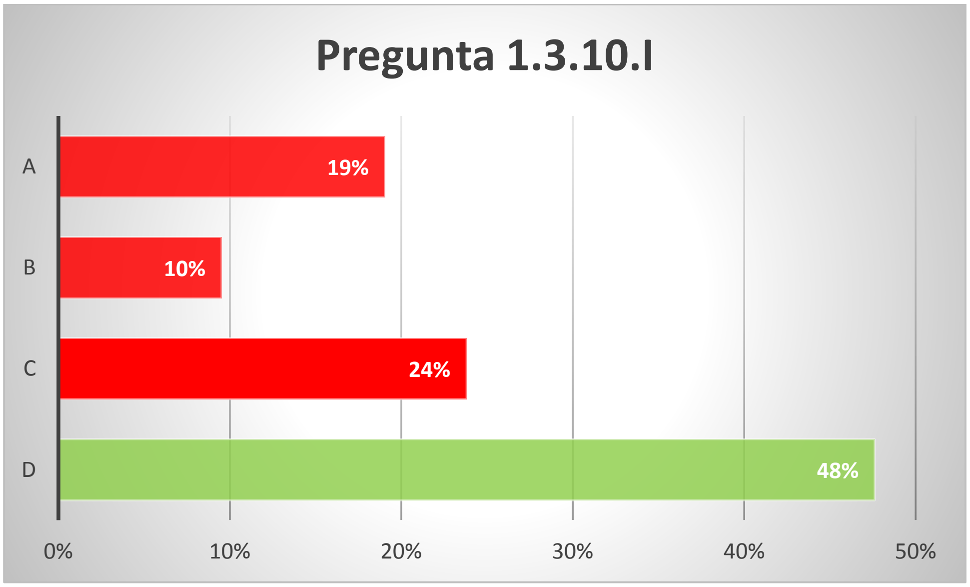


Diagrama Barras 2: Porcentaje de estudiantes según la elección de su opción de respuesta P.1.1.02.

¿Por qué eligió esa opción?

- Ejemplos de argumentos de elección respecto la opción de respuesta:

Opción A: $800.000 + 5n$

El 19% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

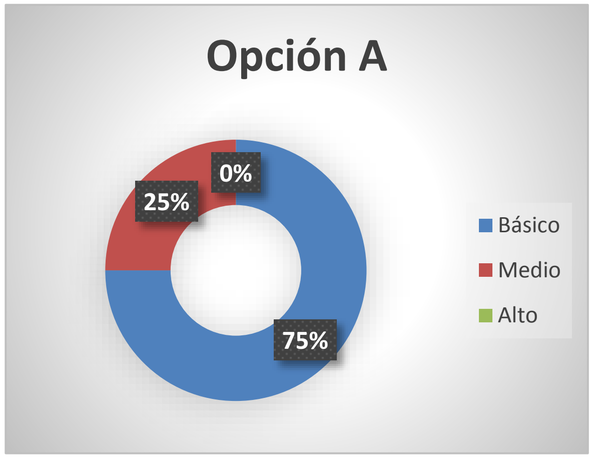
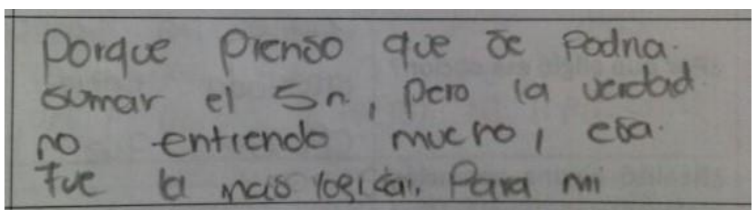
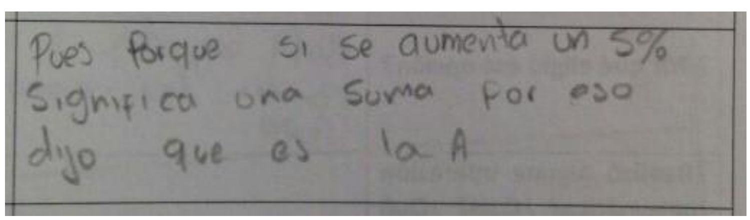


Diagrama circular 4: Opción A, P.1.1.02.

25%: *"Es la respuesta más lógica"*



75%: *"Si aumenta implica una suma"*



Evidenciamos como la falta de capacidad para argumentar de los estudiantes recae en lo que ellos denominan "lógica", convirtiéndose en una constante de argumentación a lo largo de la implementación como ya se evidenció en otros ítems, encontrando justificación en la necesidad de implementar otro tipo de estrategia (IV y V) que permita indagar un poco más en torno a este tipo de argumentaciones, pues se evidencian limitaciones en las estrategias (I, II y III) al momento de intentar explicar este tipo de argumentos. Las tres cuartas partes

de los estudiantes que asumieron esta opción como la correcta consideran que es así porque el incremento anual está dado por una suma, considerándose una premisa que permite clasificarlos en un nivel medio de argumentación.
Opción B: $800.000(5n)$

El 10% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

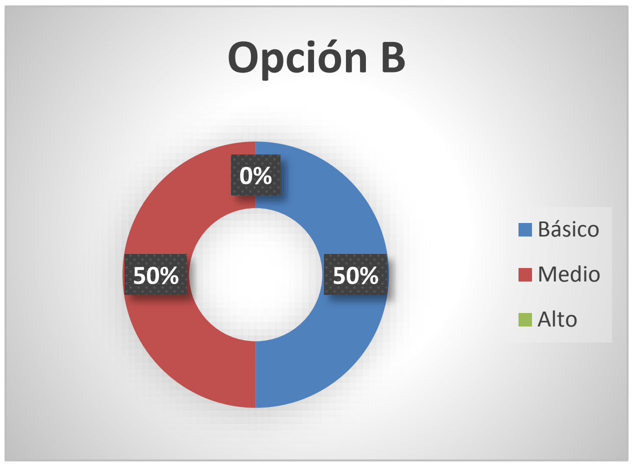
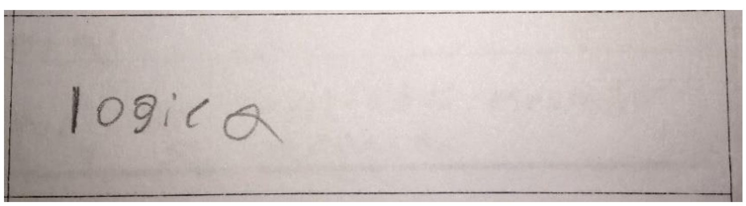
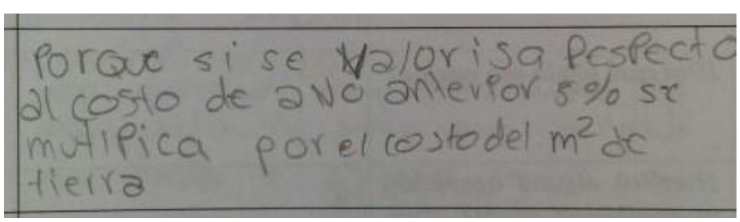


Diagrama circular 5: Opción B, P.1.1.02.

50%: *"Es la respuesta más lógica"*



50%: La valorización implica una multiplicación.



La mitad de los estudiantes sigue asumiendo la "lógica" como criterio de argumentación reflejando un nivel básico en sus explicaciones. La otra parte de los estudiantes da como premisa de sus argumentos el hecho de que *"al costo del año anterior 5% se multiplica por el costo del m^2 de tierra"* clasificándolos en un nivel medio.

Opción C: $800.000\left(\frac{5}{100}\right)^{n}$

El 24% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

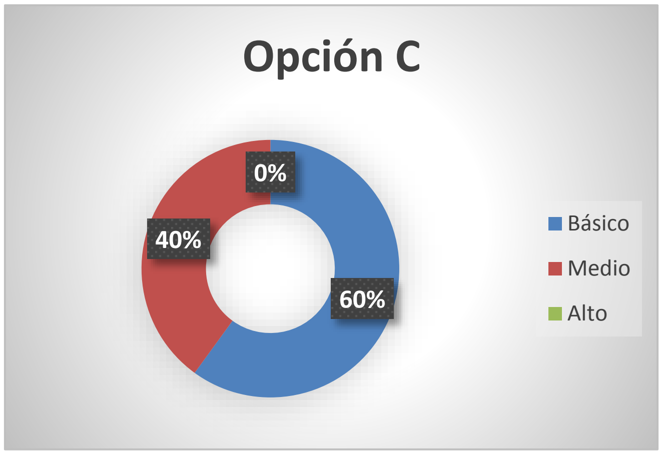
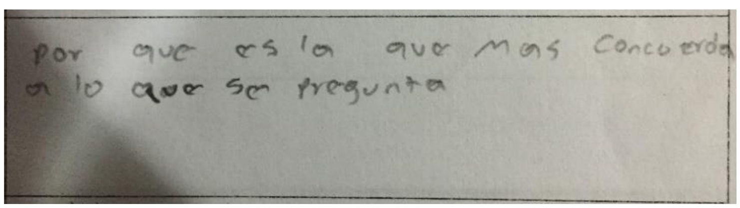
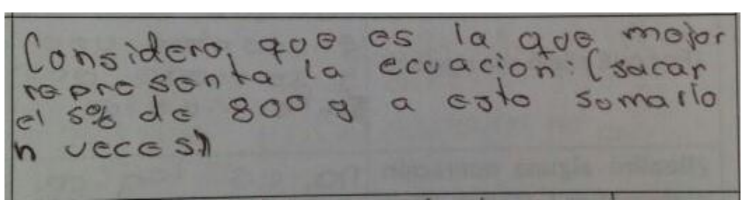


Diagrama circular 6: Opción C, P.1.1.02.

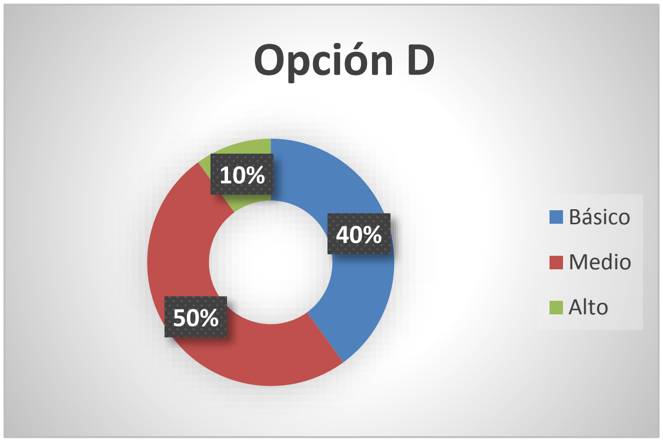
40%: *"Es la que más concuerda con la pregunta"*

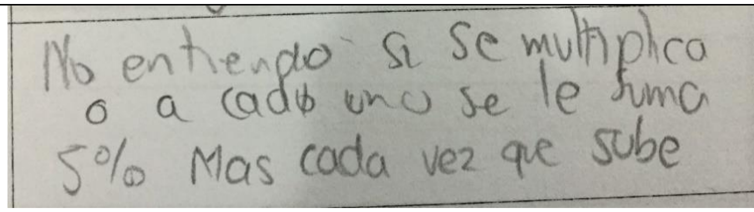

Por que es la que mas Concuerda
a lo que se pregunta

60%: *"Sacar el 5% de 800"*

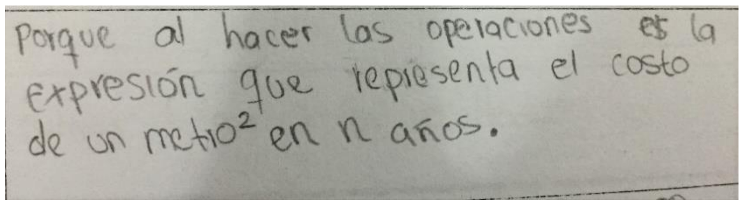

Considero que es la que mejor
representa la ecuacion: (sacar
el 5% de 800 y a esto somarlo
n veces)

El 40% de los estudiantes recurre a argumentos desligados de las matemáticas asumiendo posturas similares a las que anteriormente se asumieron como "lógicas" evidenciando un nivel básico de argumentación. El otro 60% de la población asume como argumento de

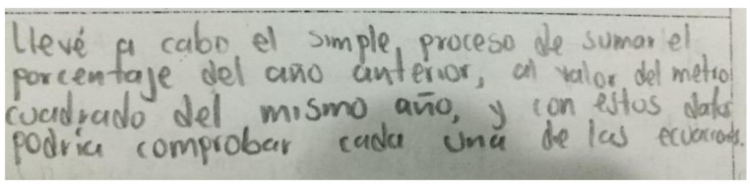
elección el hecho de que la expresión planteada sea útil para encontrar el valor del metro cuadrado en el primer año, el estudiante proporciona un caso concreto, particular, del concepto que se está exponiendo, este criterio de selección coincide perfectamente con el rastreo de errores mostrado en el IAI correspondiente a este ítem: El estudiante determina correctamente el primer de interés, y asume a lo largo del periodo restante el comportamiento será el mismo, de este modo está calculando el 5% del 5% del 5% … de n meses, esto sin tener como referente que la base es $800.000, así mismo se evidencian algunos de los errores clasificados por Mosvskovitz y Taslavsky (1987) como inferencias no validas lógicamente y falta de verificación en la solución, ambos referenciados también en el IAI del ítem. Podemos concluir a partir de la observación de los criterios de selección que el estudiante tiene en cuenta diferentes parámetros que limitan su proceso de solución, considerándose en un tipo de heurística comentada por Schoenfeld (1985).
Opción D: $800.000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{n}$
El 48% de la población se distribuye según su argumento de elección así:  *Diagrama circular 7: Opción D, P.1.1.02.* 40%: *"No entiendo"*


No entiendo si se multiplica o a cada uno se le suma 5% Mas cada vez que sube

50%: *"Es la expresión que representa el costo de un metro cuadrado en n años"*


Porque al hacer las operaciones es la expresión que representa el costo de un metro^2 en n años.

10%: *"Sumar el porcentaje del año anterior al valor del metro cuadrado del mismo año"*


Llevé a cabo el simple proceso de sumar el porcentaje del año anterior, al valor del metro cuadrado del mismo año, y con estos datos podría comprobar cada una de las ecuaciones.

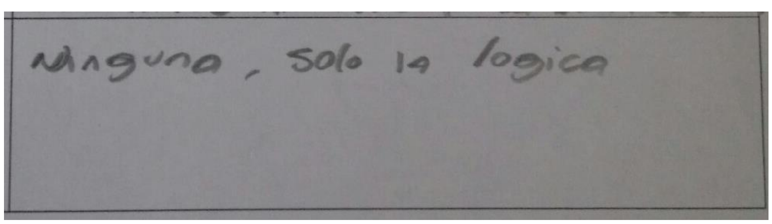
El 40% de los estudiantes que escogieron la opción D (opción correcta) manifiestan no tener claridad en la pregunta, respuestas como: no entiendo, no es clara la pregunta, creo que esta es la opción correcta pero no sé cómo argumentar mi elección son comunes en este grupo de estudiantes, luego su nivel de argumentación es básico pues no utilizan aspectos relacionados a la pregunta. Otra parte importante de los estudiantes (la mitad) manifiesta que llegaron a elegir esta opción como el resultado de una serie de operaciones, pero que al momento de hacerlas explícitas, como lo sugiere el instrumento en el siguiente apartado, no aparecen. El 10% de los estudiantes que eligieron esta opción argumentaron su elección a partir de la evaluación de las cuatro expresiones planteadas en las opciones para los años 1 y 2 (en algunos casos más), estableciendo comparaciones y verificaciones con los costos de los años 1 y 2 hallados por aparte mediante el cálculo de porcentajes. Esta forma de proceder difiere de la considerada en el IAI del ítem, lo que lleva a considerar un nuevo elemento en la red conceptual del IAI: evaluación de funciones. Podemos identificar una clase de heurística descrita por Polya (1965) donde el estudiante manipula las diferentes opciones con el fin de descartar algunas de ellas suponiendo que es la correcta para después entrar a evaluar si satisface las condiciones del problema.

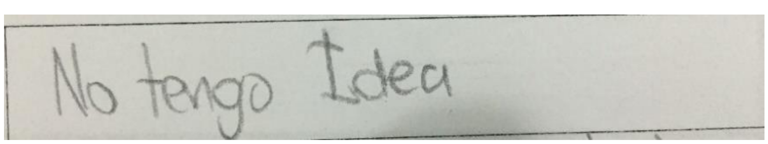
¿Realizó alguna operación matemática? ¿Cuál? ¿Qué conceptos considera (temas) se involucran en la solución de la pregunta?

- Ejemplos y caracterización de las respuestas en relación al *perímetro conceptual* (IAI).

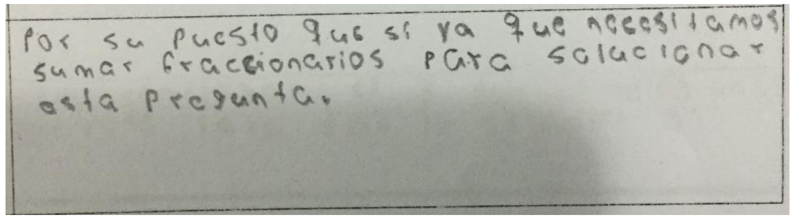
Los estudiantes se categorizaron en 3 grupos según su respuesta:

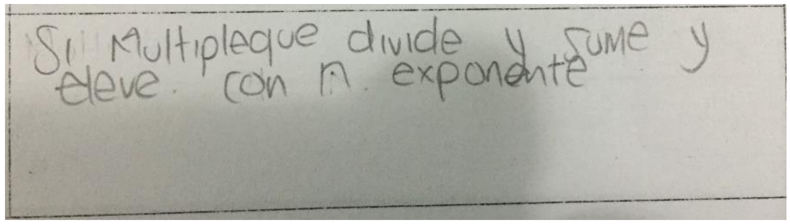
- ✓ **Grupo 1:** Este grupo de estudiantes asume la lógica como un argumento válido para justificar su elección que supondría acudir a ciertas reglas inferenciales pero dichas reglas no se manifiestan en ningún espacio del instrumento. Adherimos a este grupo el conjunto de respuestas nulas, aquellos estudiantes que no manifiestas la aplicación de algún concepto matemático.



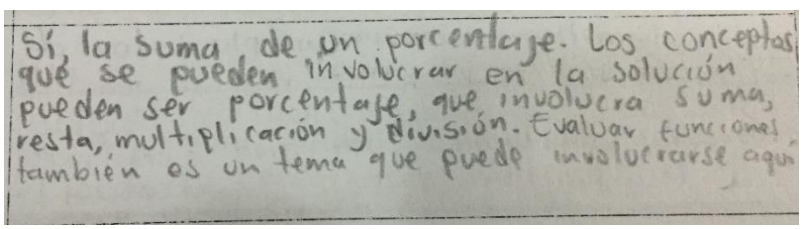


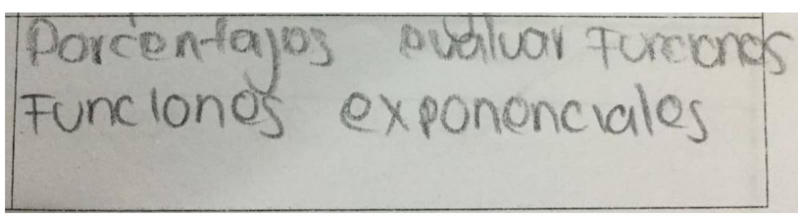
- ✓ **Grupo 2:** Aquellos estudiantes que manifiestan aplicar las diferentes operaciones aritméticas y el tratamiento con números fraccionarios como conceptos aplicables en la solución de la situación.

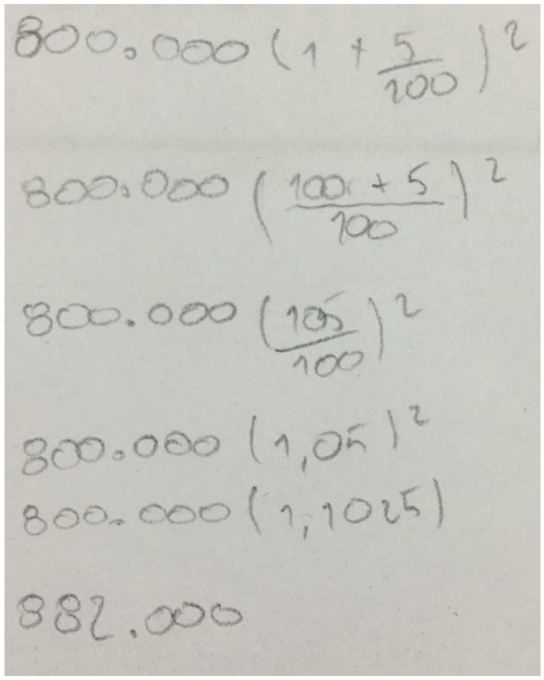


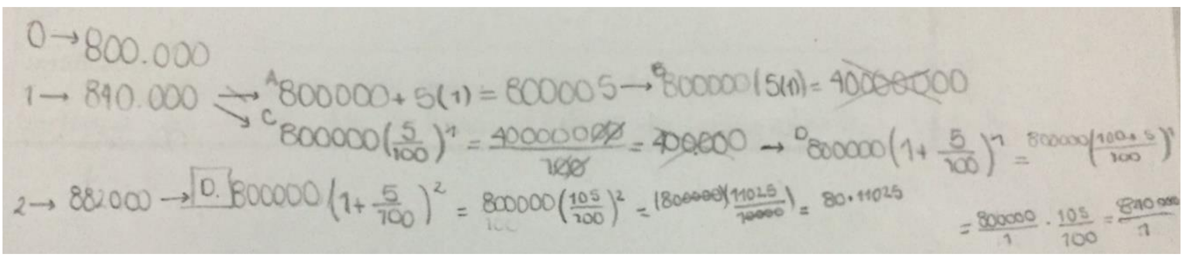


- ✓ **Grupo 3:** Este grupo de estudiantes están en la línea de los conceptos considerados en la red conceptual del IAI: Porcentajes, funciones exponenciales, evaluación de funciones, adicionalmente adjuntan un proceso coherente que los lleva a la elección de la opción correcta; el primer grupo de evidencias presentadas reflejan la coherencia de este grupo de estudiantes con los aspectos conceptuales considerados en el IAI, el segundo grupo de evidencias manifiestan los aspectos estructurales y metodológicos considerados por los estudiantes:









En relación con los aspectos estructurales observamos que los estudiantes evalúan de forma correcta cada una de las funciones presentadas en las opciones de respuesta encontrando un indicador del uso correcto de las funciones, respecto a los metodológicos se mantiene la tendencia de descartar cada una de las opciones por medio de la manipulación de cada una de ellas y así constatar si cumple con las condiciones presentadas en el problema.

Las explicaciones empleadas por los estudiantes para sustentar sus elecciones se asocian, en su mayoría, con los *niveles básicos* de argumentación, tal consideración está asociada a las características de la estrategia I que imposibilitan la descripción de algunas elecciones o razones del porqué de estas, por ende se puede vislumbrar que algunos resultados basados en elecciones aleatorias de las opciones de respuesta no dejan rastro visible (*visibilización del pensamiento*) para su caracterización, sin embargo otras estrategias podrán dar cuenta de estos vestigios argumentales.

6.3. Análisis de la pregunta 1.1.01

Estrategia de implementación: II

Ítem: 1.1.01

En un experimento se toman dos muestras $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ de una misma población de bacterias en condiciones ambientales distintas. Inicialmente, en la muestra $\boldsymbol{E}$ hay 4.000 bacterias y en la muestra $\boldsymbol{F}$ hay 500 bacterias. Las expresiones $2^t(4.000)$ y $2^{2t}(500)$ representan las cantidades de bacterias que hay en las muestras $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$, respectivamente cuando han transcurrido $\boldsymbol{t}$ horas. Las muestras $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$ tendrán la misma cantidad de bacterias para $\boldsymbol{t}$ igual a:

Opciones de respuesta:

- **A.** 1
- **B.** 3
- **C.** 4
- **D.** 8

Opción correcta: B

- *Distribución de redacción de opciones de respuesta*

Dado que cada estudiante propone cuatro opciones de respuesta justificando su decisión se tiene un total 224 opciones distribuidas así ($56\ estudiantes \times 4 \frac{opciones}{estudiantes} = 224\ opciones$), hubo un total de 20 opciones de respuestas que cumplían con las condiciones que despliega el ítem, en la tabla se relacionan éstas con dos tipos de porcentaje, uno, respecto a las 224 opciones y otra respecto a la población.

	Opción de respuesta	**Opciones: Porcentaje (Cantidad)**	**Población: Porcentaje**
1.	−3	1,3% (3)	5%
2.	1	4% (9)	16%
3.	1,5	0,4 % (1)	1%
4.	2	7,5% (17)	30%
5.	2,5	0,4% (1)	1%
6.	3	22% (49)	87%
7.	4	12,5% (28)	50%
8.	5	6,2% (14)	25%
9.	6	4% (9)	16%
10.	7	2,7% (6)	10%
11.	8	2,7% (6)	10%
12.	10	0,9% (2)	3%
13.	12	0,9% (2)	3%
14.	13	0,4% (1)	1%
15.	19	0,4% (1)	1%
16.	20	0,4% (1)	1%
17.	27	0,9% (2)	3%
18.	30	3,1% (7)	12%
19.	40	1,3% (3)	5%
20.	51	0,4% (1)	1%
21.	*"No se encuentra una misma cantidad"*	0,9% (2)	
22.	Propone cantidades de bacterias (población)	6,2% (14)	
23.	***NO*** propone opciones de respuesta	20,5% (45)	
	Total:	**100**% (224)	

Tabla 2: Distribución de opciones para la pregunta P.1.1.01.

Las opciones de respuesta clasificadas en los numerales **22** y **23** se consideran de *diferente naturaleza* pues evidencian una comprensión de la pregunta donde no se busca el valor de la variable *t* siendo exponente sino, el valor de la expresión resultante de reemplazar la variable, de modo que realizar la comparación respecto a las opciones que propone el ítem en su IAI es poco plausible sin querer decir que no pueda caracterizarse a los estudiantes que diseñaron estas opciones ya que asumen un rastreo de errores diferentes y evidencian un entendimiento distinto de la pregunta; la anterior acepción sirve al momento de estimar las cuatro opciones de respuesta más empleadas por los estudiantes para asociarlas con las ofrecidas por el ICFES.

- *Opciones de respuesta más usuales propuestas por los estudiantes*:

Opciones ICFES (IAI)	**Coincidencia estudiantes**	**Mayor % propuestas (estudiantes)**
A. 1	✔ (16%)	- 3 (87%) - 4 (50%) - 2 (30%) - 5 (25%)
B. 3 *(Clave)*	✔ (87%)	
C. 4	✔ (50%)	
D. 8	✔ (10%)	

Tabla 3: Comparativo opciones del ítem/opciones estudiantes P.1.1.01.

Las cuatro opciones más frecuentes ofrecidas por los estudiantes no son las mismas que las dispuestas en el IAI, sin embargo, dos de las coincidencias (B y C) corresponden justamente a las dos más ofrecidas por los estudiantes, es decir; la mayoría de estudiantes encuentran la solución correcta y tienen claro que un error común puede ser rastreado por medio de la opción C, luego, aunque cerca de un 26% también reconoce el rastreo de errores por medio de las opciones A y D, un 55% de los estudiantes encuentran en otros valores de la variable *t* las razones de elección más posible rastreando entonces otros tipos de error. Con lo anterior es necesario la descripción y análisis de los argumentos y opciones sugeridas y ofrecer evidencias del rastreo de, eventualmente, nuevos errores.

- *Análisis de los argumentos para la definición de cada opción de respuesta*

Poco más de la quinta parte (20,5%) de los espacios dispuestos para la formulación de opciones de respuesta en los instrumentos no tenían sugerencias, y por ende ausencia de argumentos; estos estudiantes se caracterizan en dos tendencias:

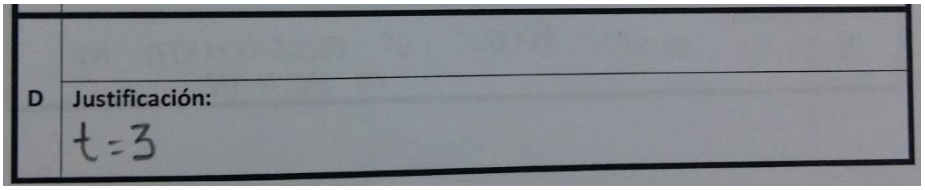
- **Tendencia 1:** Estudiantes que no proponen ninguna opción de respuesta al no entender lo que pide el ítem y, a la ausencia de no existir opciones de respuesta se mitiga el factor de elección aleatoria que pueden desvirtuar en algunos casos las medidas estadísticas (frecuencias) de aquellas, como ocurre con la Estrategia I, que si lo hacen; siendo así más confiables los resultados que pueden obtenerse por medio de esta estrategia, cuando se dice confiables se está refiriendo a la naturaleza de la información que provee esta estrategia, que al no mostrar opciones de respuesta cierra el umbral, o margen, en que la elección aleatoria afecta la comprensión de las estadísticas que aparecen para la estrategia I de modo que aquí con mayor veracidad se puede determinar el porcentaje que aciertan en el designio de la opción correcta.
- **Tendencia 2:** Estudiantes que proponen la opción de respuesta correcta para el ítem, pero no encuentran tres opciones que rastreen un posible error, existiendo algunos casos donde solo sugieren un distractor. Esto implica que hay estudiantes que no precisamente se guían de las opciones de respuesta para solucionar dicha pregunta, sino que al encontrar la clave del ítem desestiman las demás opciones, este aspecto se considera de manera más amplia en los análisis de la estrategia III.

Del resto de estudiantes junto con aquellos de la tendencia 2 descrita anteriormente se realiza la distribución de las argumentaciones haciendo hincapié en los tipos de razones que hubo lugar en la opción correcta.

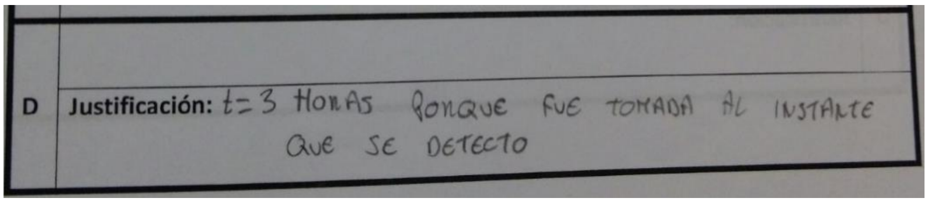
Distribución para la opción correcta:

El 22% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

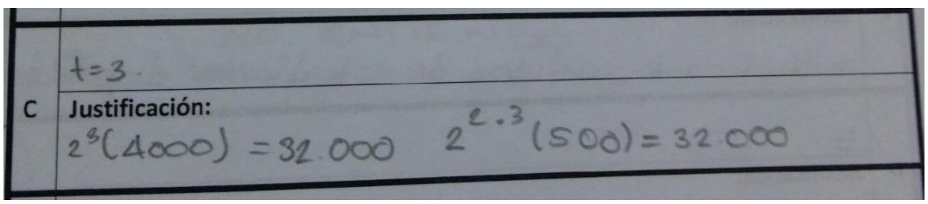
- 37%: "*t=3" – "3"*

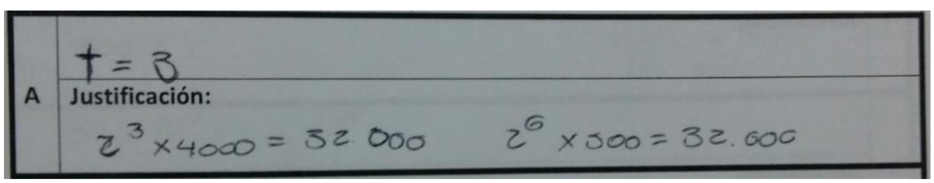

D Justificación:
t=3

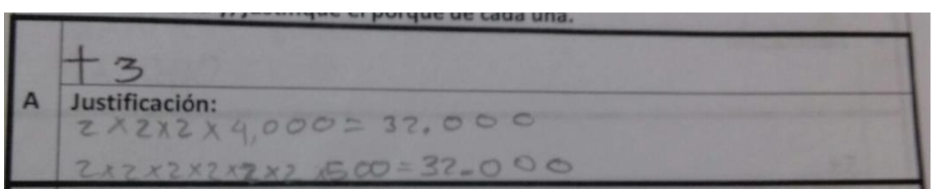
- 30%: “*allí tienen igual cantidad*” – “*muestras tomadas en ese instante o tiempo*”


D Justificación: t=3 HORAS PORQUE FUE TOMADA AL INSTANTE QUE SE DETECTO

- 33%: “$2^3(4000) = 32.000 \qquad 2^{2\cdot3}(500) = 32.000$”


t=3.
C Justificación:
2³(4000) = 32.000 2^2.3 (500) = 32.000


t = 3
A Justificación:
2³ x 4000 = 32.000 2⁶ x 500 = 32.600


t 3
A Justificación:
2x2x2x4,000= 32,000
2x2x2x2x2x2 x500=32.000

El *nivel básico* corresponde a la formulación correcta de la respuesta pero que carece de algún tipo de argumento, al igual se incluyen aquellas que refieren a razones enajenadas de aspectos matemáticos y restan fuerza argumentativa a la respuesta de forma tal que pueden considerarse consolidadas por medios distintos al esfuerzo y entendimiento propio del estudiante.

El evidenciar la igualdad de cantidad de bacterias para la hora 3 puede considerarse el resultado de un proceso de ensayo de varios valores a la variable hasta encontrar la igualdad que asociado a los tipos de argumentos se ajusta al *ejemplo* como razón explicativa de esta opción de respuesta, siendo caracterizadas estas explicaciones como de *nivel medio*.

Por último, el *nivel superior* concierne, y esto relacionado a los aspectos metodológicos alrededor de la comprensión del estudiante sobre el ítem, al uso de procedimientos matemáticos sobre igualación y tratamiento algebraico de ecuaciones que ofrezcan pruebas de obtención del valor de la variable; algunos ejemplos de este tipo de estrategia están contenidos en el IAI de la pregunta, ya que utilizan la relación de igualdad al momento que $4000 \cdot 2^3 = 500 \cdot 2^{2 \cdot 3}$, designando dos expresiones de igual valor respecto a $t = 3$.

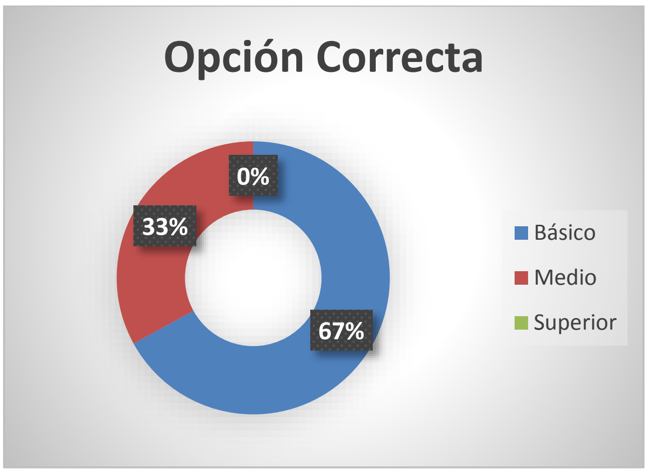


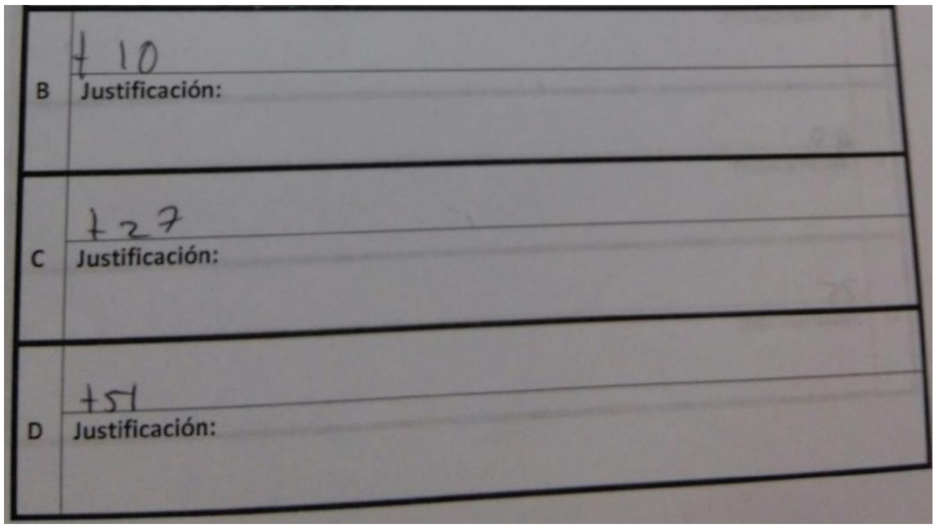
Diagrama Circular 8: Opción correcta P.1.1.01.

Distribución para las demás opciones

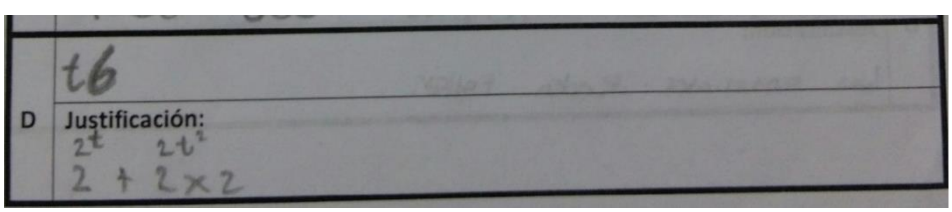
El 57,5%* de la población se distribuye según su argumento de elección así:

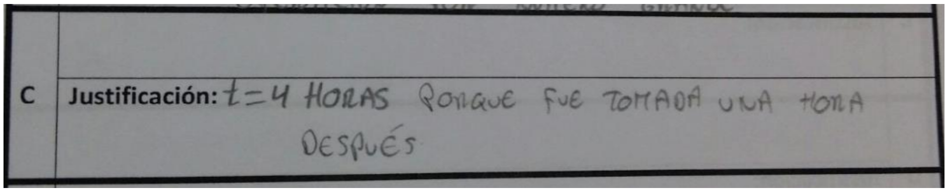
* Comprende la población disminuía por las clasificaciones de *opción correcta* y ***NO propone opciones de respuesta***.

- 21%: *"t=6" – "t=27" – "t=10"*

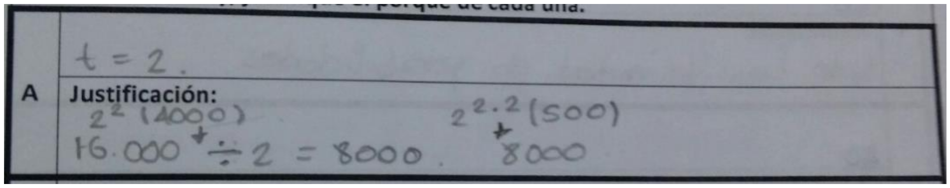


- 78,1% "$2^2 = 4$ $\quad 2^{2\cdot 1} = 4$" – "$t_1 \times t_2 = t_2$"




C

Justificación: t=4 HORAS PORQUE FUE TOMADA UNA HORA DESPUÉS


A

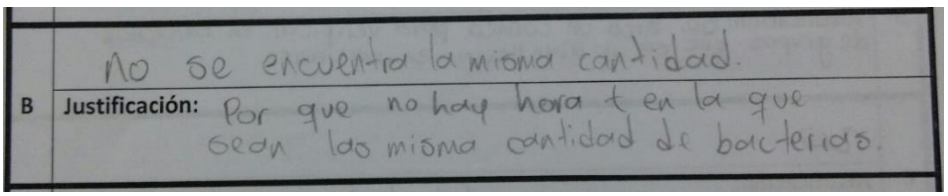
t = 2.

Justificación:

$2^2(1000)$ $2^{2\cdot 2}(500)$

16.000 ÷ 2 = 8000. 8000

- 0,9%: *“No se encuentra la misma cantidad”*


B

No se encuentra la misma cantidad.

Justificación: Por que no hay hora t en la que sean las misma cantidad de bacterias.

Algunos estudiantes proponen opciones de respuesta sin argumento alguno, clasificándose así en la *tendencia 1* mostrada en la forma de respuesta **22** clasificando estas en el *nivel básico*; por su parte las caracterizadas dentro del *nivel medio* corresponden a ejemplos y analogías basadas en las asociaciones que el estudiante puede hacer en relación al entendimiento del ítem o al manejo de las cantidades y expresiones mostradas en la pregunta, en esta categoría recae la mayoría de los estudiantes; sin embargo, existe una mínima población que está enmarcada en el *nivel superior* de argumentación para la propuesta de una opción incorrecta basada en el uso de la *autoridad* referido a la imposibilidad de igualar ambas expresiones, es decir que no existe tiempo *t* que asegure una misma cantidad de bacterias.

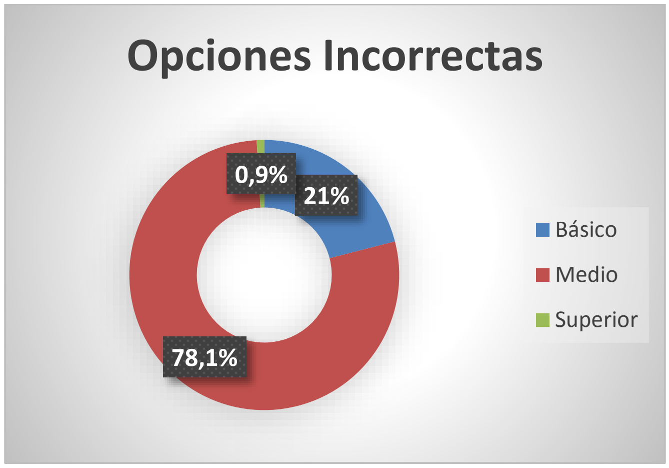


Diagrama Circular 9: Niveles de argumentación para opciones incorrectas P.1.1.01.

6.4. Análisis de la pregunta 1.3.08

Estrategia de implementación: II

Ítem: 1.3.08

Un colegio necesita enviar 5 estudiantes como representantes a un foro sobre la contaminación del medio ambiente. Se decidió que 2 estudiantes sean de grado décimo y 3 de grado undécimo. En décimo hay 5 estudiantes preparados para el foro y en undécimo hay 4. ¿Cuántos grupos diferentes pueden formarse para enviar al foro?

Opciones de respuesta:

- **A.** 9
- **B.** 14
- **C.** 20
- **D.** 40

Opción correcta: D

- *Distribución de redacción de opciones de respuesta*

El número de opciones nuevamente es de 224 dado que cada uno de los 56 estudiantes que conforman la población deberá proponer cuatro justificando su decisión, las 224 opciones presentadas están distribuidas de la siguiente manera:

	Opción de respuesta	**Porcentaje (Cantidad)**	**Población porcentaje**
1.	1	2,6% (6)	10%
2.	2	1,7% (4)	7%
3.	3	1,7% (4)	7%
4.	4	3,1% (7)	12%
5.	5	4,4% (10)	17%
6.	6	1,3% (3)	5%
7.	9	0,8% (2)	3%
8.	10	3,1% (7)	12%
9.	14	2,2% (5)	8%
10.	15	1,7% (4)	7%
11.	16	1,7% (4)	7%
12.	19	1,3% (3)	5%
13.	20	2,2% (5)	8%
14.	21	1,3% (3)	5%
15.	22	1,7% (4)	7%
16.	30	7,1% (16)	28%
17.	39	1,3% (3)	5%
18.	40 *(Clave)*	15,1% (34)	60%
19.	41	1,3% (3)	5%
20.	42	2,6% (6)	10%
21.	45	2,2% (5)	8%
22.	46	0,4% (1)	1%
23.	49	1,3% (3)	5%
24.	50	5,8% (13)	23%
25.	53	1,3% (3)	5%
26.	60	3,1% (7)	12%
27.	120	9,3% (21)	37%
28.	150	1,7% (4)	7%
29.	168	1,3% (3)	5%
30.	320	0,4% (1)	5%
31.	Propone números decimales	1,3% (3)	
32.	Propone dos números al mismo tiempo	3,1% (7)	
33.	**NO** propone opciones de respuesta	8,9% (20)	
	Total:	**100%** (224)	

Tabla 4 Distribución de opciones para la pregunta P.1.3.08

Las opciones de respuesta correspondientes a los numerales **31, 32** y **33** son clasificadas de manera diferente dado que demuestran un nivel de comprensión de la pregunta en el que no se busca el número de grupos que pueden conformarse sino el resultado de operar deliberadamente con los datos suministrados en el ítem, entonces realizar la comparación respecto a las opciones que propone el ítem en su IAI es poco estimable, pero esto implica que no puedan caracterizarse pues demuestran una comprensión diferente de la pregunta; la anterior acepción sirve al momento de estimar las cuatro opciones de respuesta más empleadas por los estudiantes para asociarlas con las ofrecidas por el ICFES.

- *Opciones de respuesta más usuales propuestas por los estudiantes*:

Opciones ICFES (IAI)	**Coincidencia estudiantes**	**Mayor % propuestas (estudiantes)**
A. 9	✓ (3%)	- 40 (60%) - 120 (37%) - 30 (28%) - 50 (23%)
B. 14	✓ (8%)	
C. 20	✓ (8%)	
D. 40 *(Clave)*	✓ (60%)	

Tabla 5: Comparativo opciones del ítem/opciones estudiantes P.1.3.08.

Observamos que las cuatro opciones que más proponen los estudiantes no corresponden a las proporcionadas en el ítem, pero se demuestra que la opción correcta es la de mayor acogida por los estudiantes, se deduce entonces que gran parte de los estudiantes está en capacidad de encontrar la opción de respuesta, a pesar de estar alejados considerablemente del resto de las opciones suministradas por el ítem.

Una parte considerable de los estudiantes propone a la opción 120 como la segunda de mayor oferta, opción que no corresponde a las propuestas en el ítem y que posibilitará el rastreo de errores no considerados.

Análisis de los argumentos para la definición de cada opción de respuesta

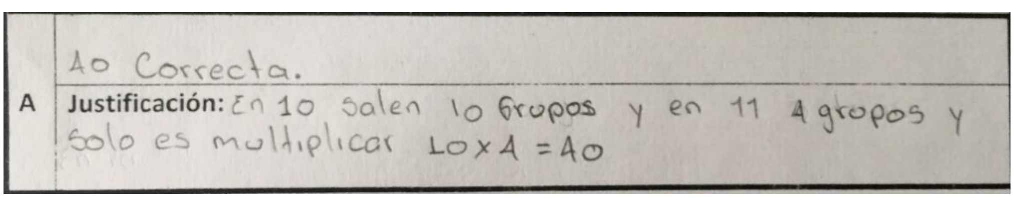
Cerca del 9% de los espacios dispuestos para la formulación de opciones de respuesta en los instrumentos no tenían sugerencias, y por ende ausencia de argumentos; estos estudiantes se caracterizan en las mismas tendencias expuestas en el análisis del ítem 1.1.01.

Del resto de estudiantes junto con aquellos de la tendencia 2 descrita anteriormente (en el análisis del ítem 1.1.01) se realiza la distribución de las argumentaciones haciendo hincapié en los tipos de razones que hubo lugar en la opción correcta.

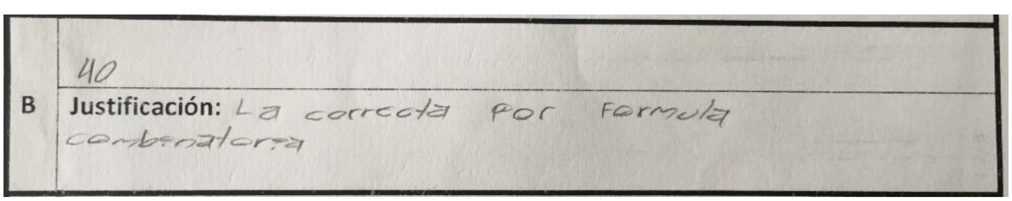
Distribución para la opción correcta:

El 15,1% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

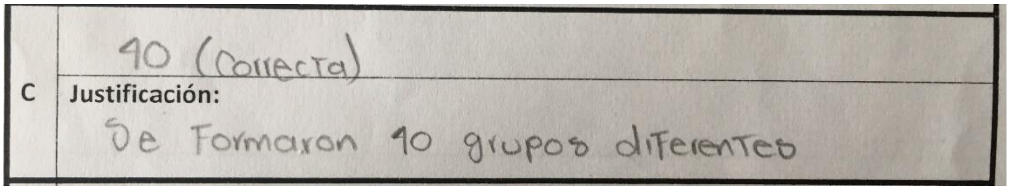
- 22,2%: "*En 10° salen 10 grupos y en 11° 4 grupos*"


A
40 Correcta.
Justificación: En 10 salen 10 Grupos y en 11 4 grupos y solo es multiplicar 10x4 = 40

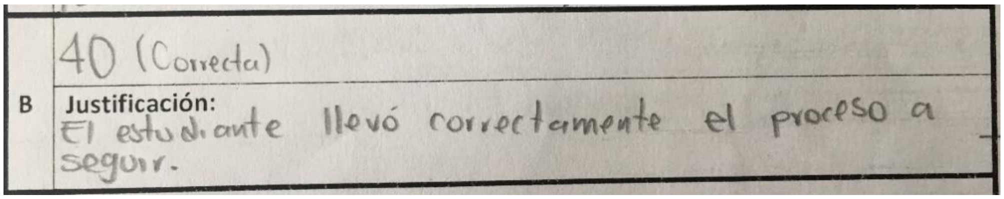
- 11,1%: "*Por fórmula combinatoria*"


B
40
Justificación: La correcta por formula combinatoria

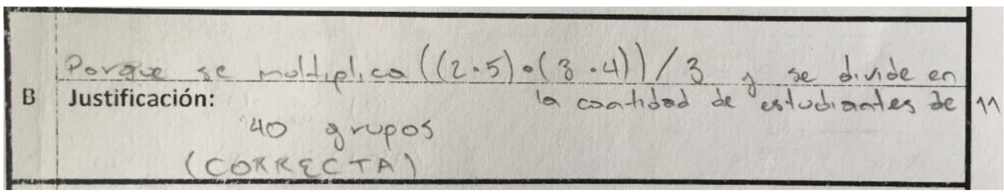
- 44,4%: *"Se forman 40 grupos diferentes"*


40 (Correcta)
C Justificación:
Se Formaron 40 grupos diferentes

- 5,5%: *“Llevó a cabo correctamente el proceso”*


40 (Correcta)
B Justificación:
El estudiante llevó correctamente el proceso a seguir.

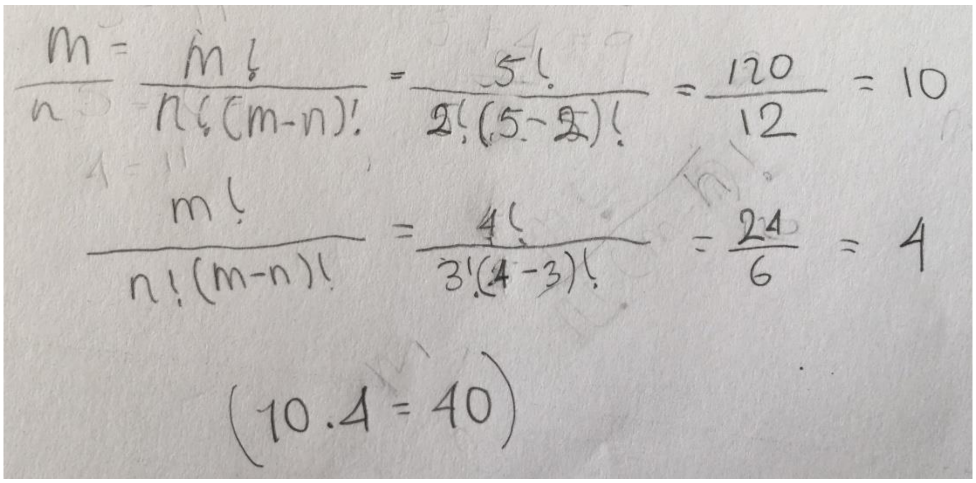
- 16,6%: “$\frac{((2\times5)\times(3\times4))}{3}$”

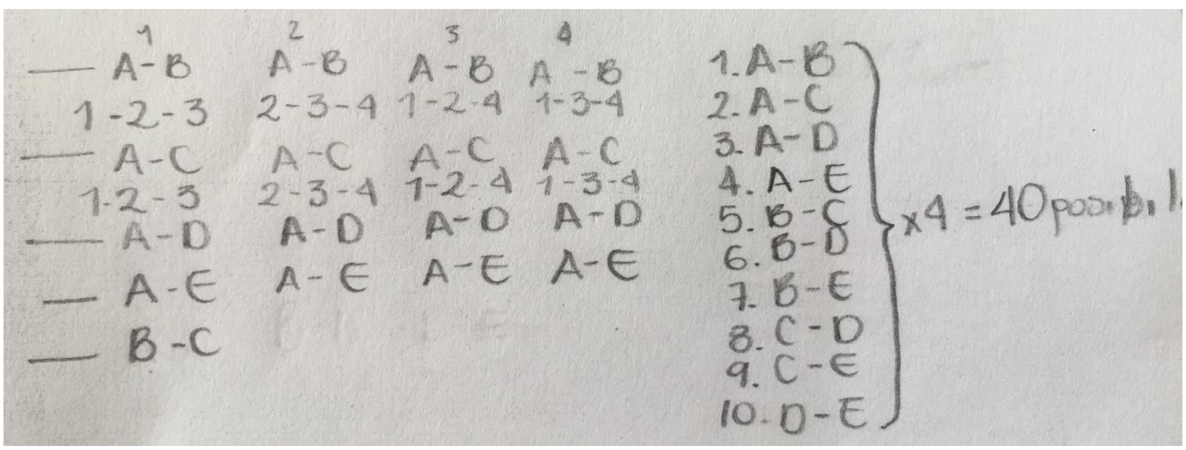

Porque se multiplica ((2·5)·(3·4))/3 y se divide en
B Justificación: la cantidad de estudiantes de 11
40 grupos
(CORRECTA)

El *nivel básico* corresponde a la formulación correcta de la respuesta pero que carece de algún tipo de argumento, al igual se incluyen aquellas que refieren a razones enajenadas de aspectos matemáticos y restan fuerza argumentativa a la respuesta de forma tal que pueden considerarse consolidadas por medios distintos al esfuerzo y entendimiento propio del estudiante, en este nivel ubicamos también al grupo de estudiantes que argumenta desde algún tipo de operación matemática utilizando los datos suministrados por la pregunta deliberadamente alejados de la teoría combinatoria.

Usar como premisa de argumentación el hecho de que para el grado 11° hay 4 grupos posibles, para grado 10° hay diez posibles y adicionalmente a que el número total de posibles grupos está dado por el producto de estos dos refleja un *nivel medio* de argumentación a pesar de que no evidencia la manera en que se llega a tal punto.

Finalmente, el *nivel superior* de argumentación lleva implícito el hecho de que el estudiante hace uso correcto de las técnicas de conteo y fortalece su argumento adjuntando el proceso que lo llevó a plantear esta opción, bien sea usando la fórmula de la combinatoria o un posible diagrama de árbol, así:





Los niveles de argumentación están distribuidos de la siguiente manera:

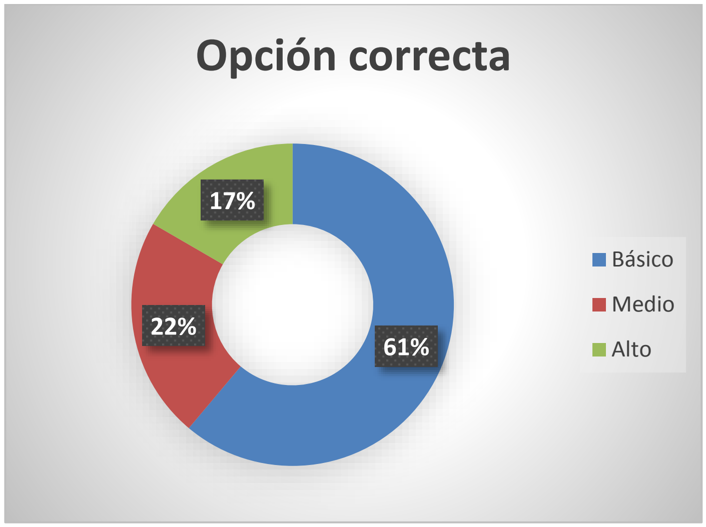


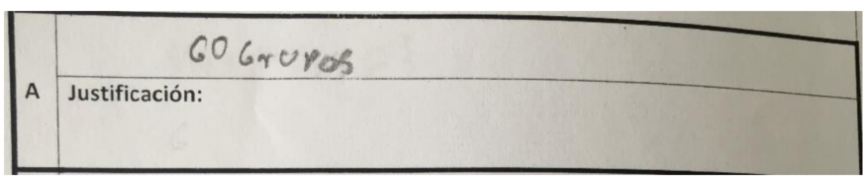
Diagrama circular 10: Opción correcta P.1.3.08.

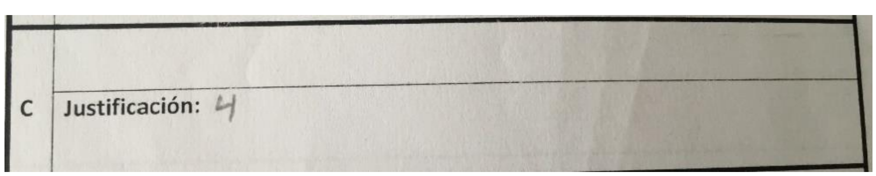
Distribución para las demás opciones

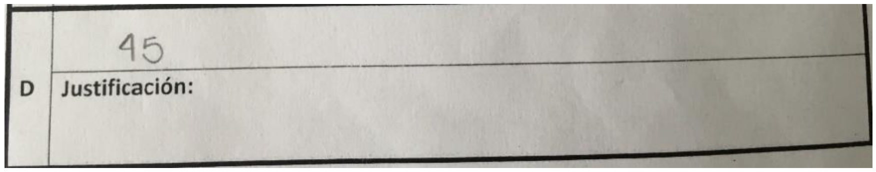
El 75,9%* de la población se distribuye según su argumento de elección así:

* Comprende la población disminuía por las clasificaciones de *opción correcta* y ***NO propone opciones de respuesta***.

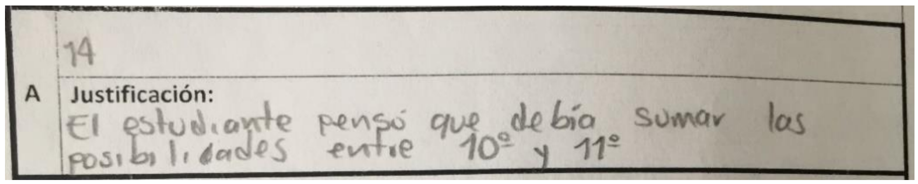
- 55%: “60 grupos” ”30 grupos” ”4” ”45”

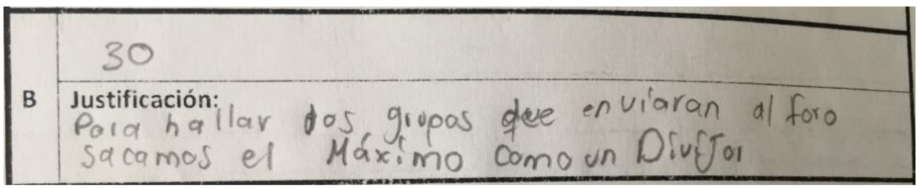


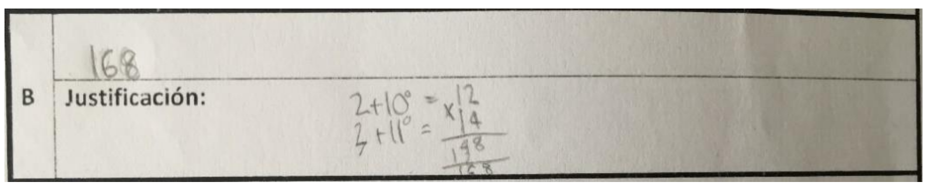



D
45
Justificación:

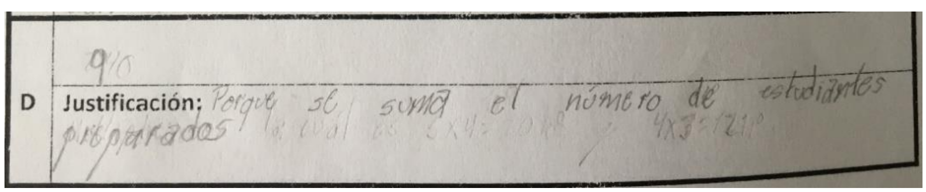
- 40%: “14” ”30” ”168”


A
14
Justificación: El estudiante pensó que debía sumar las posibilidades entre 10° y 11°


B
30
Justificación: Para hallar dos grupos que enviaran al foro sacamos el Máximo como un Divisor


B
168
Justificación: 2+10° = 12 ; 2+11° = 14 ; 12 × 14 = 168

5%: “Se suma el número de estudiantes preparados”


D
Justificación: Porque se suma el número de estudiantes preparados

Algunos estudiantes proponen opciones de respuesta sin argumento alguno, pareciéndose a la *tendencia 1* mostrada en la forma de respuesta **33** clasificando estas en el *nivel básico*; por otro lado encontramos que gran parte de los estudiantes proponen diversas opciones de respuesta respaldadas por argumentos aritméticos que involucran los datos proporcionados por la pregunta pero que poco o nada están en relación con la teoría combinatoria de fondo estos estudiantes estarían clasificados en un *nivel medio* de argumentación; una mínima parte de la población está en concordancia con el rastreo de errores propuesto en el IAI del ítem, planteando implícitamente que: *El estudiante asume que la cantidad de grupos diferentes que pueden formarse está dado por la suma del número de estudiantes que hay en grado décimo y undécimo 5 + 4 = 9* reflejando un nivel de argumentación *superior*.

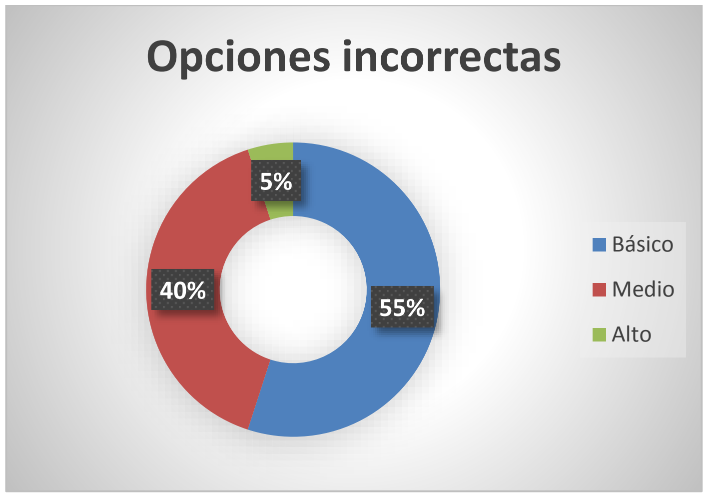


Diagrama circular 11: Opción incorrecta P.1.3.08.

La implementación de la estrategia II permitió ampliar la caracterización de los aspectos que tienen en cuenta los estudiantes al momento de resolver las situaciones propuestas, tras la aplicación de la estrategia observamos que los estudiantes presentan dificultades al momento de proponer diferentes opciones de respuesta, pues como evidenciamos en la estrategia I los estudiantes tienden a descartar cada una de las opciones asumiendo que cada una es correcta para entrar a evaluar si cumple o no con las condiciones del problema, el hecho de presentar el ítem sin sus opciones de respuesta implica que el estudiante resuelva el problema y proponga su solución como opción correcta de respuesta, pero también que genere tres opciones de respuesta de modo que asumiendo el rol de constructor parcial del ítem sean planteadas haciendo evidentes los errores más comunes a lo que se vería enfrentado si estas se le presentaran, encontrando aquí una fuerte tendencia por operar deliberadamente con los datos que proporciona el ítem al momento de proponerlas.

Las diferentes argumentaciones de los estudiantes nuevamente están relacionadas con los *niveles básicos* de argumentación, al pedir a los estudiantes proponer las opciones de respuesta se da paso a un conjunto de posibilidades muy amplio, la estrategia utilizada permite parcialmente describir los factores de construcción de algunas de las opciones presentadas, sin embargo en la mayoría de los casos no hay evidencia de los factores que inciden en el planteamiento de las opciones presentadas.

Las explicaciones empleadas por los estudiantes para sustentar sus elecciones se asocian, en su mayoría, con los *niveles básicos* de argumentación, tal consideración está asociada a las características de la estrategia I que imposibilitan la descripción de algunas elecciones o razones del porqué de estas, por ende se puede vislumbrar que algunos resultados basados en elecciones aleatorias de las opciones de respuesta no dejan rastro visible (*visibilización del pensamiento*) para su caracterización.

6.5. Análisis de la pregunta 1.1.09

Estrategia de implementación: III

Ítem: 1.1.09

La expresión $10^3 = \frac{I}{I_0}$ relaciona la sonoridad de un sonido de 30 decibeles con su intensidad (I) y la menor intensidad (I_0) que percibe el oído humano. ¿Cuántas veces es el valor de I respecto a I_0?

Opciones de respuesta:

A. Una milésima.

B. Un tercio.

C. Tres veces.

D. Mil veces.

Opción correcta: D

Distribución de respuestas correctas e incorrectas:

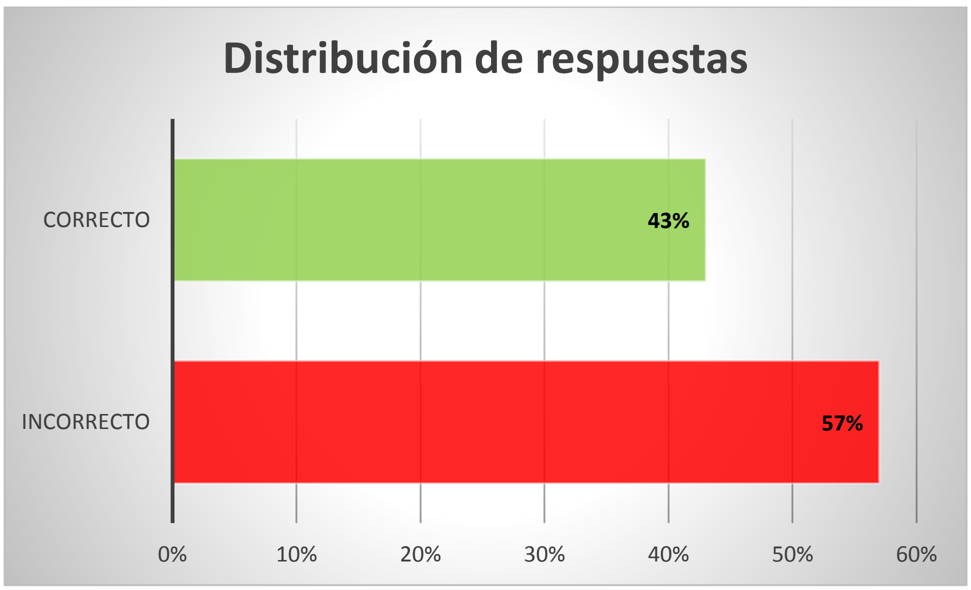


Diagrama Barras 4: Distribución respuesta correcta/incorrecta P.1.1.09.

La *estrategia III* pondera por la búsqueda de la respuesta al ítem sin ninguna opción de respuesta que podrían considerarse estímulos, guías u orientaciones de solución; así, el estudiante adquiere una libertad distinta respecto al carácter cerrado de la prueba donde convergen de primera mano los aspectos relacionados en la pregunta de investigación, conceptuales, estructurales y de método por parte del estudiante. La comprensión de la pregunta y su eventual tratamiento disminuye, y esto comentado en análisis previos, factores aleatorios o exógenos de elección de opción de respuesta, es decir, que las inferencias que realiza el estudiante visualizan su pensamiento de forma fehaciente constituyéndose en evidencias objetivo de clasificación.

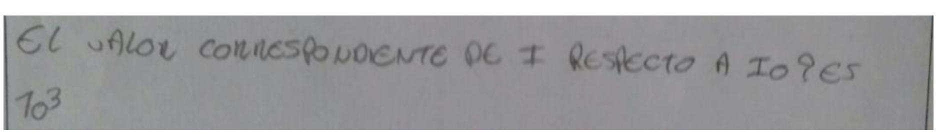
Por las características de la estrategia existirán dos posibles respuestas directas, correcta e incorrecta, pero de cada una se desprenden diferentes análisis pedagógicos y didácticos que vendrán sostenidos por la forma en que el estudiante argumenta su elección.

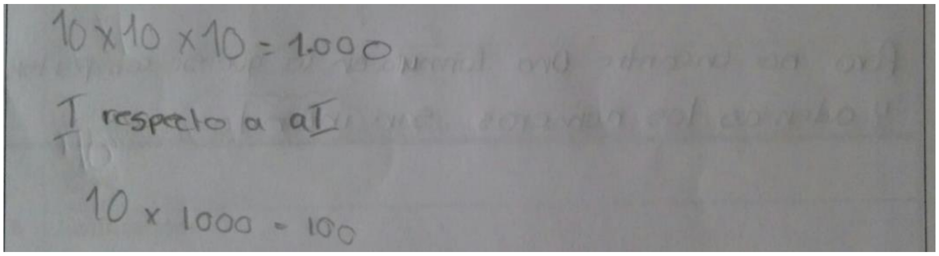
- *Distribución de argumentos (Respuesta correcta)*

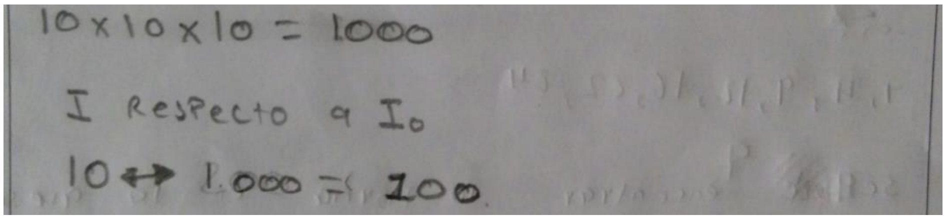
Los estudiantes quienes determinaron de manera correcta la solución a la pregunta evidencian la comprensión de significante "*¿Cuántas veces equivale…?*" considerado en el IAI de la pregunta, entendiendo conceptualmente lo que sugiere el ítem, donde una comparación mediada por una expresión racional relaciona las cantidades. Los argumentos alrededor de la respuesta correcta se clasifican en quienes proponen un argumento mediado por la forma o ejemplificación de su cálculo y, por aquellos que solo ofrecen la respuesta; de los primeros se encuentran aspectos estructurales interesantes de observar sobre el uso y tratamiento de la expresión mostrada en el ítem que sirven de desglose de categorías argumentativas.

El 43% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

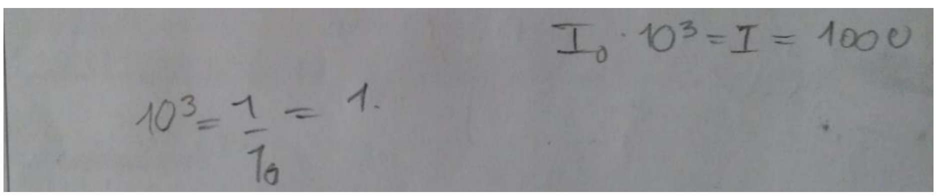
- 45%: "10^3" – "$10 \times 10 \times 10 = 1.000$"

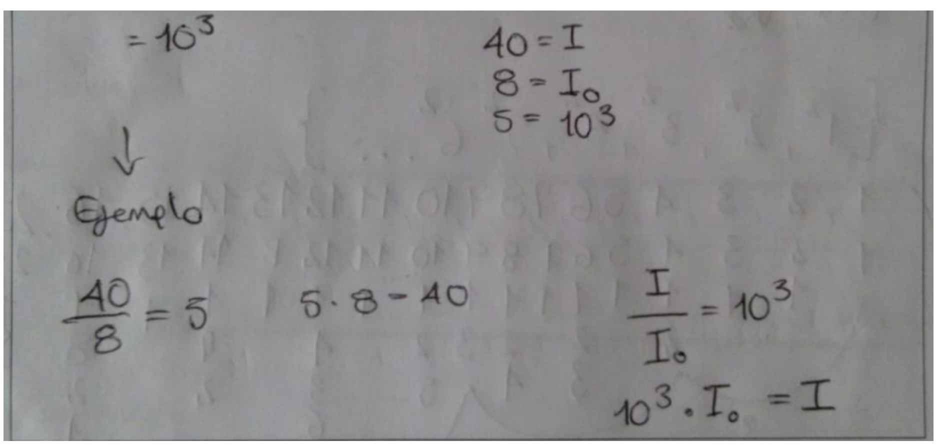




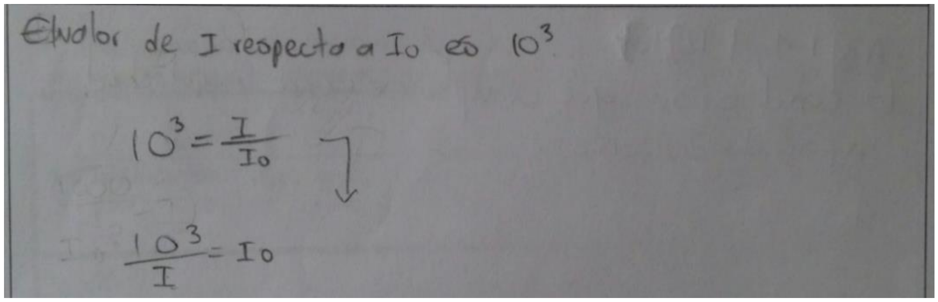


- 27%: "$I_0 \cdot 10^3 = I$"





- 28%: "$I_0 \times I = 10^3$"



Por indicio, al observar dentro del ítem la única cantidad que se relaciona en la expresión acuden a ésta como respuesta a la pregunta cuya forma la expresan en potencia o producto de varios 10, este tipo de argumentación recae en un *nivel básico*. Para el *nivel medio* se encuentran errores de naturaleza estructural en el modo de argumentar la respuesta, razones que recaen en dificultades alrededor del tratamiento algebraico de ecuaciones; esta característica se recogió en los trabajos de Schoenfeld (1985) donde el estudiante en aras de encontrar la relación conceptual que fortalezca su respuesta muestra problemas de otra índole, aunque por medio de sus conocimientos y el proceso por el cual la concluyó le resulta evidente la solución. Por último, el *nivel superior* de argumentación se encuentran los estudiantes que muestran, por lo que se entiende como *por definición*, un uso del despeje de la expresión racional y la relación existente entre el cociente y producto para hablar de *cuantas veces es…*, comprensiones comentadas en el IAI cuando se asocia en una igualdad el producto entre el divisor y el cociente (más el residuo) para determinar el dividendo, y alguno de los factores puede considerarse el indicador de *cuánto necesita ser* el otro factor comparado a, en este caso, I.

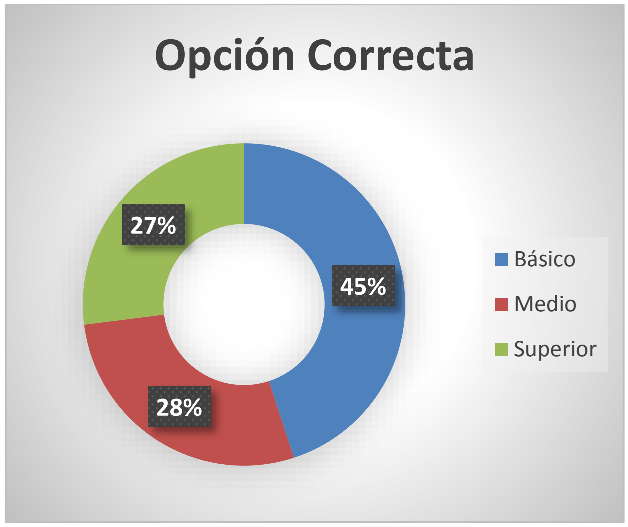


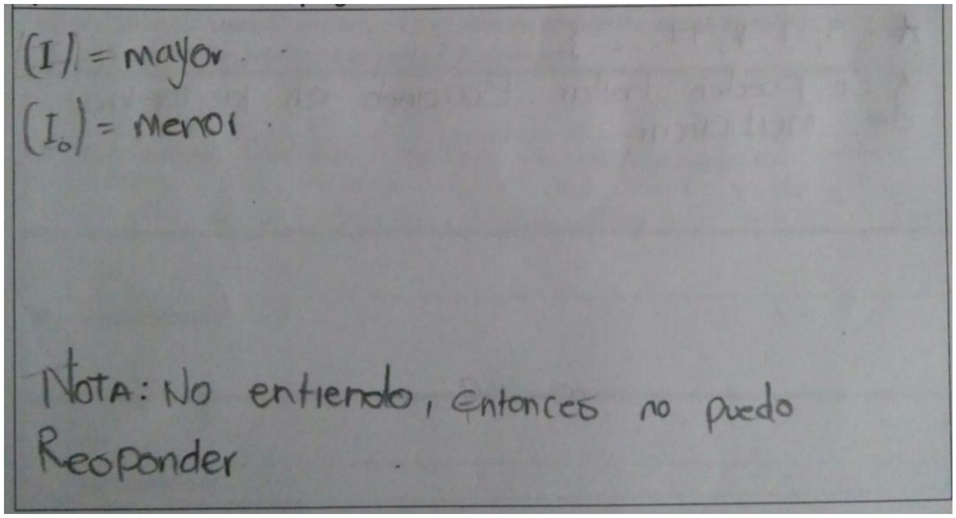
Diagrama Circular 12: Porcentajes para los niveles de argumentación para la opción correcta P.1.1.09.

- *Distribución de argumentos (Respuestas incorrecta)*

En esta población se distinguen dos comportamientos, uno, que asocia valores distintos a los que ofrece la expresión racional en la pregunta y quienes emplean la relación del sonido en decibeles con el fraccionario; de allí surgen aspectos de orden conceptual y de método al no comprender lo que se pide en la pregunta y a la forma en que responde el estudiante sin fuertes bases de cohesión del ítem respecto al conocimiento matemático. Por otro lado, se considera dentro de este cuerpo de argumentos y respuestas incorrectas, los instrumentos que no poseen sugerencias de respuestas de los estudiantes o que se observa la declaración de falta de entendimiento del ítem.

El 43% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

- 80%: *"no entiendo"*

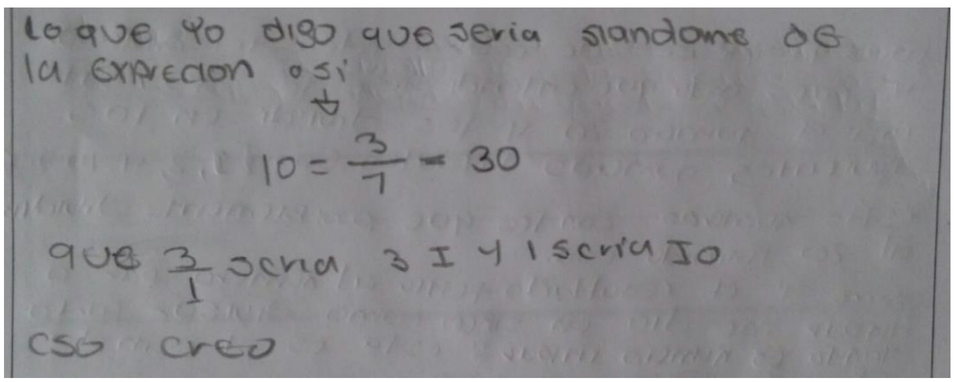


$(I) =$ mayor

$(I_0) =$ menor

Nota: No entiendo, entonces no puedo Reoponder

- 20%: "$\frac{30}{10} = 3$"

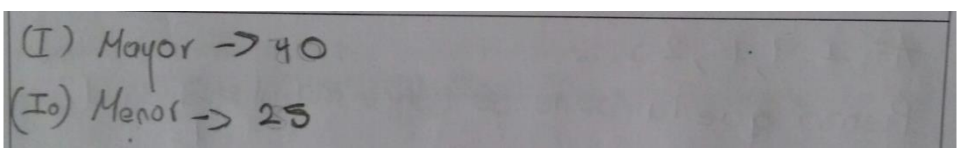


lo que yo digo que seria guiandome de la expresion asi

$10 = \frac{3}{1} = 30$

que $\frac{3}{1}$ seria 3 I y 1 seria Io

eso creo



(I) Mayor -> 40

(Io) Menor -> 25

Aunque no es observable el indicio de elección, se considera *nivel básico* las argumentaciones que parten de la falta de entendimiento del ítem y aquellos de instrumentos vacíos, pues se asumen como prueba de bajas competencias argumentativas al momento de justificar la opción, también, comparándose con lo suscitado en el IAI se aprecia que las opciones de respuesta y sus rastreos no son conformes con lo evidenciado en las sugerencias de solución de los estudiantes, por ejemplo; el tipo de respuestas esperados están en cantidades comparativas como *"una milésima"*, *"un tercio"*, *"tres veces"* y *"mil veces"* y haciendo uso de algunos datos del ítem, pero los instrumentos no evidencian rastros de estas opciones, sino respuestas numéricas, prueba de articulaciones con aspectos estructurales del estudiante frente a la pregunta, pues no tuvo la capacidad de prever la cualidad que deberían tener las opciones de respuestas. El *nivel medio* comprende aspectos erróneos de estructuras matemáticas (manejo de expresiones racionales) y de relación (asociación de datos) de la información disponible dentro del ítem que emergieron como respuesta, mostrándose así *por ejemplo* (tipo de argumentación) soluciones diseñadas por los estudiantes.

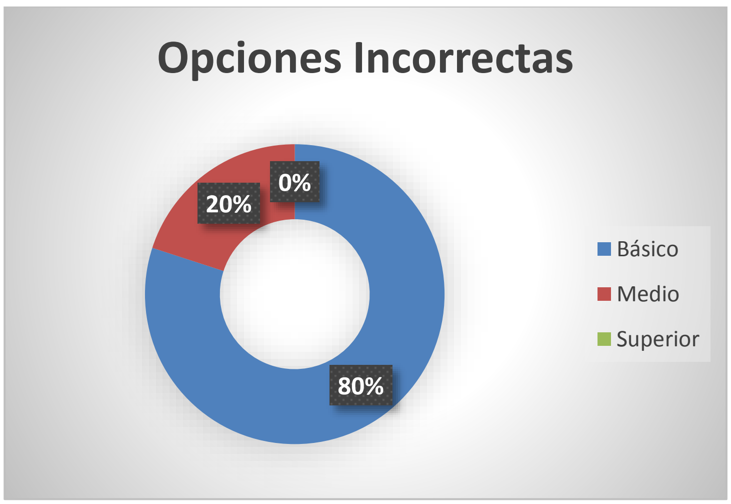


Diagrama Circular 13: Porcentajes para los niveles de argumentación para la opción incorrecta P.1.1.09.

6.6. Análisis de la pregunta 1.3.07

Estrategia de implementación: III

Ítem: 1.3.07

El conjunto de divisores de un número natural es finito. Este conjunto puede tener un número par o impar de divisores. El subconjunto de los números naturales en que **todos** sus elementos tienen un número impar de divisores es:

Opciones de respuesta:

A. Triangulares: $\{1, 3, 6, 10, 15, \ldots\}$

B. Cuadrados: $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

C. Impares: $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

D. Cubos: $\{1, 8, 27, 64, 125, \ldots\}$

Opción correcta: B

Opción correcta

Distribución de respuestas correctas e incorrectas:

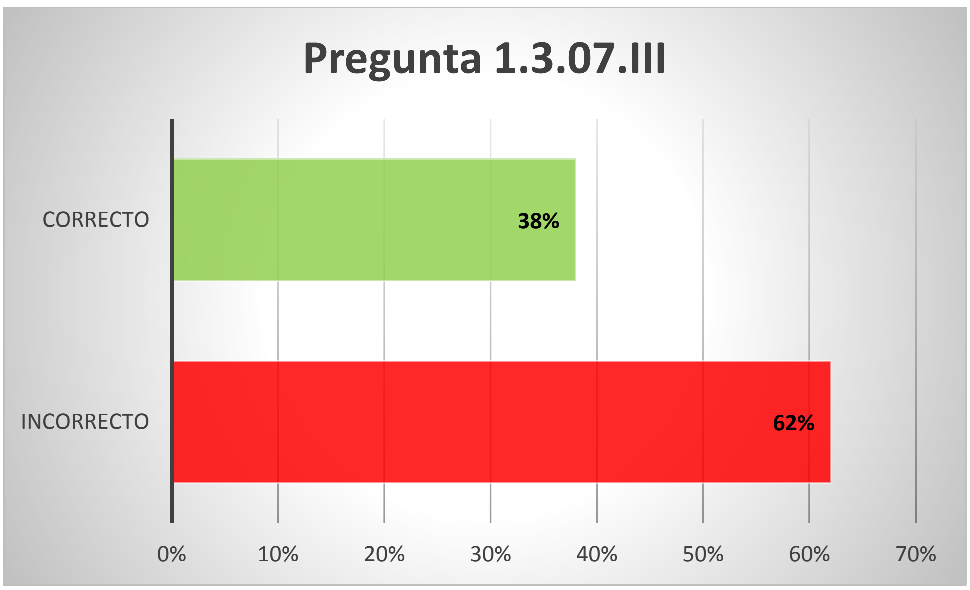


Diagrama Barras 4: Distribución respuesta correcta/incorrecta P.1.3.07.

En la *estrategia III* el ítem es presentado al estudiante sin ninguna opción de respuesta acotando la forma en que aborda el proceso de solución a la pregunta, pues no podrá recurrir al descarte de las diferentes opciones presentadas y que de alguna manera lo orientan en la búsqueda de la solución, de esta manera el estudiante asume un rol diferente frente al carácter cerrado de la prueba donde esperamos evidenciar de manera más concreta los aspectos enunciados en la pregunta de investigación: conceptuales, estructurales y de método por parte el estudiante.

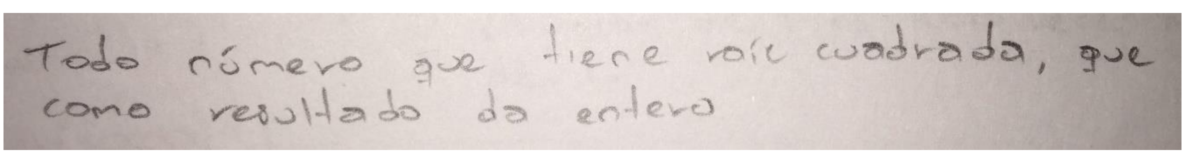
Por las características de la estrategia existirán dos posibles respuestas directas, correcta e incorrecta, pero de cada una se desprenden diferentes análisis pedagógicos y didácticos que vendrán sostenidos por la forma en que el estudiante argumenta su elección.

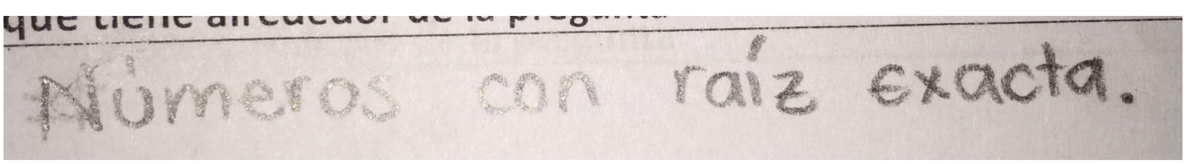
- *Distribución de argumentos (Respuesta correcta)*

Los estudiantes quienes determinaron de manera correcta la solución a la pregunta muestran evidencias de la comprensión de significante *"El conjunto de divisores…"* considerado en el IAI del ítem entendiendo conceptualmente lo que sugiere el ítem donde dado un conjunto de números se debe establecer el número de divisores de cada elemento del conjunto. Los argumentos en relación con la repuesta correcta se clasifican en quienes proponen un argumento basado en la construcción del conjunto pedido y la ejemplificación del cálculo de los divisores de cada elemento del conjunto y, por aquellos que solo proponen la respuesta.

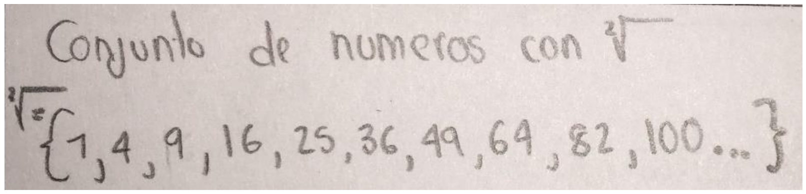
El 38% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

- 50%: *"Números con raíz exacta" "Todo número que tiene raíz cuadrada"*

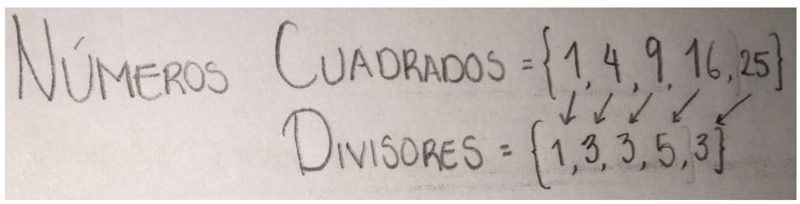


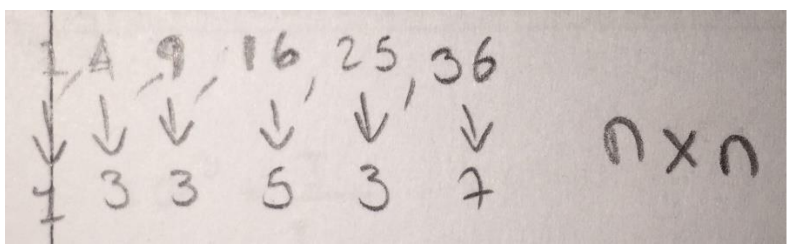


- 37,5%: *"El conjunto de números con raíz cuadrada"*



- 12,5%: "*Números cuadrados*", "$n \times n$"





En un *nivel básico* de argumentación se encuentran los estudiantes que pese a manifestar cuál es el conjunto que cumple con las condiciones establecidas en la pregunta no ejemplifican ni hacen explícito algún otro indicador de comprensión. El *nivel medio* de argumentación está dado por aquellos estudiantes que además de manifestar cuál es el conjunto en cuestión ejemplifican el conjunto. Finalmente, en el *nivel superior,* encontramos a aquellos estudiantes que además de cumplir con los indicadores del nivel medio están en capacidad de generalizar el conjunto o denominarlo, estos estudiantes están en plena concordancia con la opción de respuesta correcta propuesta en el IAI del ítem.

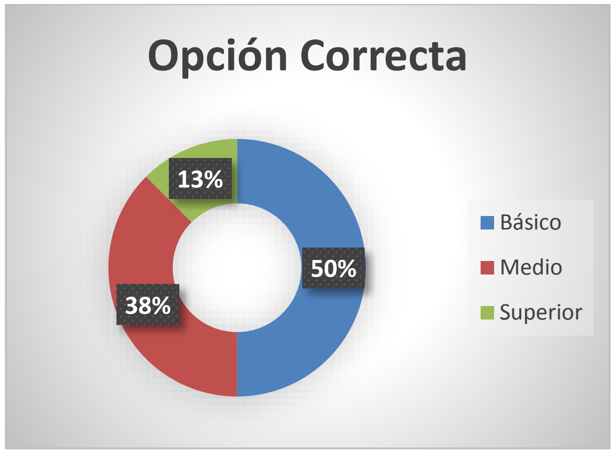


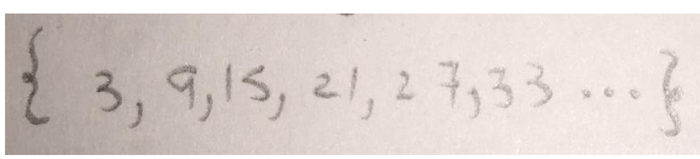
Diagrama circular 14 Porcentajes para los niveles de argumentación para la opción correcta P.1.3.07.

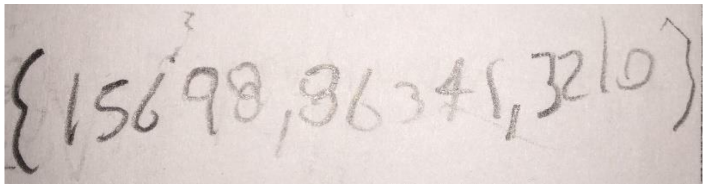
- *Distribución de argumentos (Respuestas incorrecta)*

En esta población se distinguen dos comportamientos, uno, que propone conjuntos numéricos sin reflexionar sobre las condiciones dadas en la pregunta, este grupo de estudiantes no considera la condición fundamental para determinar los elementos del conjunto, es decir, no tienen en cuenta el número de divisores para cada elementos del conjunto. El otro comportamiento está dado por aquellos estudiantes que comprenden que los divisores de cada elemento del conjunto juegan un papel importante en la solución de la pregunta, sin embargo, presentan dificultades al momento de establecer los divisores de cada elemento y su número total de divisores, también se presenta un intento por generalizar el conjunto aunque carezca de validez.

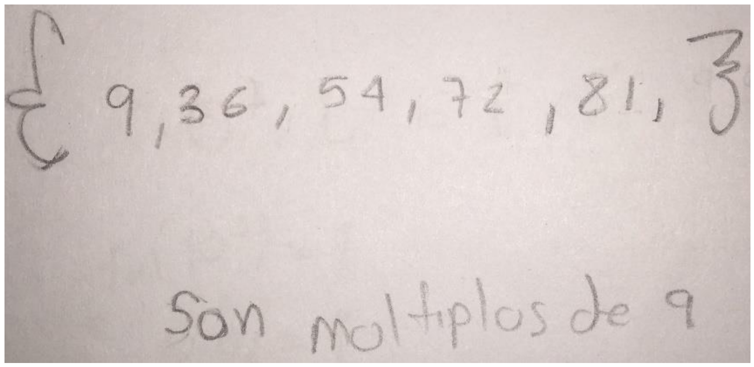
El 62% de la población se distribuye según su argumento de elección así:

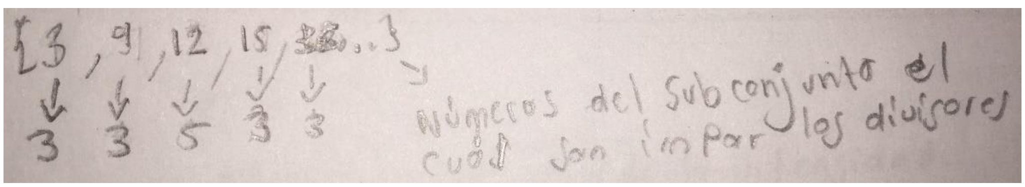
- 61%: *"*{3,9,15,21,27,33}*" "*{156,98,81,345,3210}*"*





- 39%: *"Son múltiplos de 9" "*{3,9,12,15,36 ...}*"*





Aunque no es observable el indicio de elección, se considera *nivel básico* las argumentaciones que parten de la falta de entendimiento del ítem y aquellos de instrumentos vacíos, pues se asumen como prueba de bajas competencias argumentativas al momento de enfrentarse a la situación problema, los estudiantes que construyen los diferentes subconjuntos pedidos sin considerar las condiciones de la pregunta también están es este nivel. El *nivel medio* comprende aspectos erróneos de estructuras matemáticas, los estudiantes de este nivel presentan dificultades para calcular los divisores de un número y otros tantos hacen un intento de generalizar el conjunto pero desconociendo las condiciones iniciales de la pregunta.

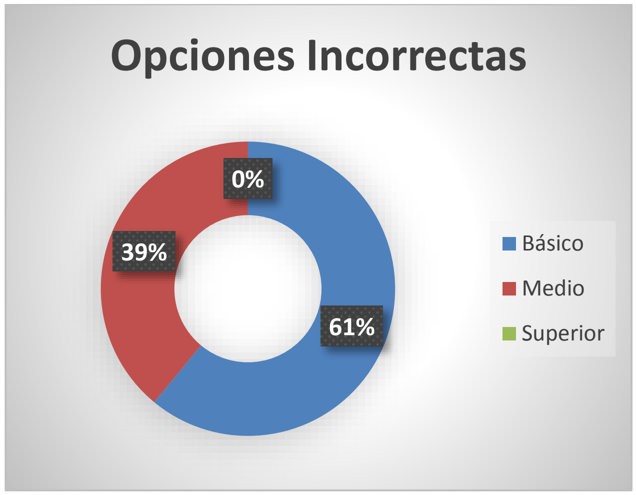


Diagrama circular 15: Porcentajes para los niveles de argumentación para la opción incorrecta P.1.3.07

Respecto a la estrategia III podemos afirmar que es una fuerte herramienta de recolección de la información, la estrategia desvía la atención del estudiante de las opciones de respuesta llevándolo a considerar otras formas de solución, pues como se comentó con anterioridad se rompe con la tendencia que tiene el estudiante cuando se le presentan las opciones de respuesta de asumir que cada una es válida para empezar a descartar una por una las otras opciones, tendencia que se evidencia en la estrategia I. En relación con la estrategia II, el estudiante no opera de forma deliberada para formular las diferentes opciones de respuesta, la manipulación que se le da a la información suministrada por el ítem es mucho más cuidadosa, pues la manera en que se plantea la estrategia exige al estudiante asumir la tarea de resolver el problema.

El instrumento utilizado permitió hacer un análisis cuidadoso de los aspectos comentados en la pregunta de investigación sobre todo los de tipo estructural, en contraste, los aspectos metodológicos de los que menor evidencia se presenta.

6.7. Análisis de la pregunta 1.1.04

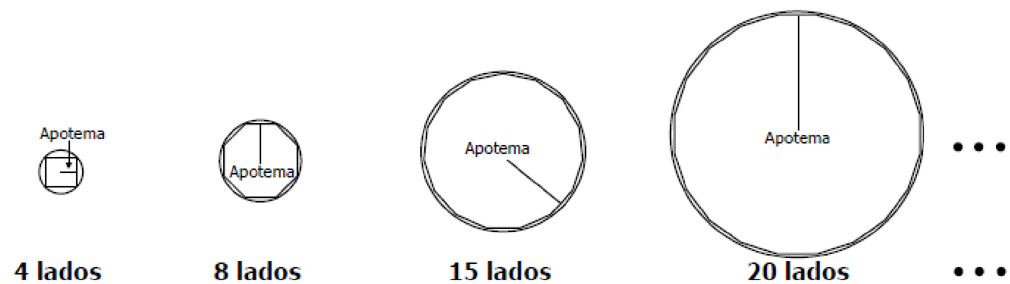
Este análisis está dado por una sesión de trabajo con el grupo general de estudiantes en la que el docente asume el papel de mediador entre la pregunta y el grupo buscando evidenciar algo de los aspectos señalados en la pregunta de investigación.

La pregunta se proyecta a los estudiantes junto con sus opciones de respuesta en un contexto similar al de una clase de matemáticas, siendo registrada mediante una grabación de video capturando todos los momentos en los que se desarrolló la intervención.

Estrategia de implementación: IV

Ítem: 1.1.04

En la secuencia de figuras que aparecen a continuación, se representan polígonos regulares de lado 6, cada uno de ellos inscrito en una circunferencia. En cada polígono se señala la apotema.



Si se continúa la secuencia, y el número de lados del polígono aumenta indefinidamente, la razón entre el perímetro del polígono y su apotema tiende a:

Opciones de respuesta:

- **A.** π
- **B.** 2π
- **C.** 3π

D. 6π

Opción correcta: B

La sesión de trabajo está dividida en cuatro momentos: 1. Presentación y familiarización del ítem 2. Búsqueda de estrategias de solución 3. Ejecución de las estrategias de solución 4. Elección de la opción de respuesta. Para cada momento se extraerán fragmentos de la intervención de los estudiantes que puedan considerarse aportes cualitativos que permitan evidenciar el rastreo de los aspectos considerados en el IAI.

Momento 1: Presentación y familiarización del ítem
El ítem es presentado a los estudiantes por medio de la proyección de una presentación, el docente invita a los estudiantes a leer la información dada y a manifestar inquietudes respeto a su lectura. Para los estudiantes es comprensible que la longitud del lado del polígono es constante, el carácter regular de cada polígono, el concepto de perímetro, que la secuencia evidencia un crecimiento en el número de lados y que los conceptos relacionados con las características de la circunferencia serán aplicados en el proceso de solución, considerándose como *aspectos conceptuales* que tienen en cuenta los estudiantes, pero manifiestan dificultades en la comprensión de los términos **apotema** y **razón.** **Estudiante 1:** *"Profe, primero que todo qué es una apotema"* **Estudiante 2:** *"Yo tampoco entiendo que viene siendo la razón ahí"* Cuestionando al grupo general sobre el significado de los términos desconocidos se encuentra que ningún estudiante está familiarizado con ellos, lo que podría implicar un obstáculo en sus procesos de solución y en la argumentación de la selección de la opción.

Para este momento de la clase logramos evidenciar uno de los errores descritos por Radatz (1979) y expuestos en el IAI de la pregunta: E1: errores debido a la dificultad del lenguaje.

Momento 2: Búsqueda de estrategias de solución
Al preguntar al grupo de estudiantes si hasta el momento alguno de ellos tendría algún indicio de la opción correcta la totalidad manifestó que no era posible dado el desconocimiento de los términos, así la argumentación de la elección de respuesta estaría asociada los *niveles básicos* mencionados en anteriores estrategias, luego, la comprensión de los términos en cuestión y su relación con la pregunta constituyen un factor fundamental dentro del proceso de solución. Dado lo anterior fue necesaria la intervención del docente pues definir los términos implicó la superación del escollo presentado, así fue posible evidenciar algunos de los *aspectos estructurales* desarrollados por los estudiantes que fueron emergiendo a media que los estudiantes iban interviniendo: **Estudiante 1:** *"La apotema es como el radio entonces…"* La anterior deducción se constituye en una premisa importante de argumentación pues el estudiante establece similitud entre la apotema y el radio. **Estudiante 2:** *"Lo que veo es que en la gráfica mientras el número de lados aumenta, el polígono se parece más a una circunferencia"* En esta deducción es observable que el estudiante relaciona el polígono con la circunferencia a medida que este aumenta su cantidad de lados. **Estudiante 3:** *"Si es así, el perímetro del polígono viene siendo el de la circunferencia entonces"*

El estudiante establece una conexión entre el perímetro del polígono y la longitud de la circunferencia, evidenciándose implícitamente el siguiente *aspecto estructural*: $2\pi r = P$

Momento 3: Ejecución de las estrategias de solución
Dadas las premisas establecidas por los estudiantes se empezó a cuestionar por la función que tiene el concepto razón en el problema, comprendiendo razón como: *la relación entre dos magnitudes que puede expresarse mediante una fracción.* **Estudiante 1:** *"yo entiendo que la razón puede ser entonces una fracción"* **Estudiante 2:** *"sí, yo también, pero ¿cuál sería el numerador y el denominador?"* **Estudiante 1**: *"profe yo creo que la razón de la que habla el problema es una fracción entre el perímetro y la apotema, así:*$\frac{P}{A}$ *"* En este instante de la *clase* fue necesaria la intervención del docente buscando que los estudiantes lograran establecer una conexión entre la representación gráfica del polígono y su apotema con la representación de la circunferencia y su radio. **Estudiante 1:** *"pues reemplacemos el perímetro del polígono por el de la circunferencia y la apotema por el radio"*

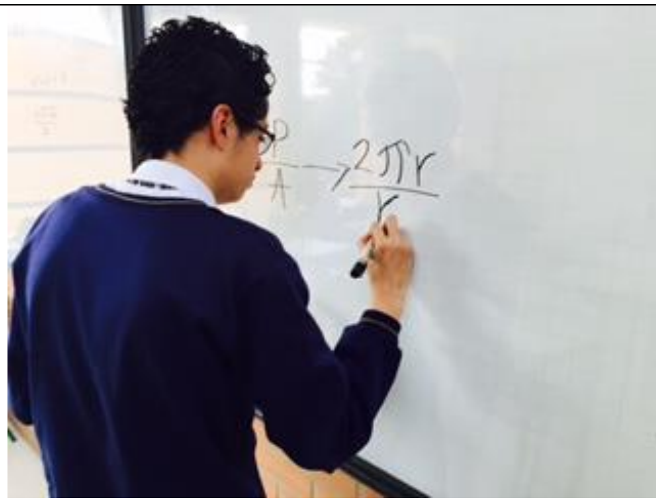


Ilustración 1: Procedimiento del estudiante (fragmento de video)

Evidenciamos un aspecto de tipo *estructural*, pues el estudiante logra establecer una relación entre el perímetro (P) y la longitud de la circunferencia $(2\pi r)$ así como entre la apotema (A) y el radio (r).

Momento 4: Elección de la opción de respuesta

Estudiante 1: *"r y r se cancelan"*

Ilustración 2: Procedimiento del estudiante (fragmento de video)

La elección de la respuesta correcta está ligada con el aspecto estructural evidenciado en la ilustración 2. El grupo de estudiantes legitima el proceder de su compañero manifestando coherencia en el proceso de solución construido por el grupo de estudiantes.

Los aportes de los estudiantes reflejaron las consideraciones didácticas expuestas en el IAI de la pregunta; se evidenció que los estudiantes tienen un *esquema conceptual* Vinner (1991) definido respecto al concepto circunferencia en el que identifican claramente las propiedades de la circunferencia así como sus elementos. Un punto importante de la intervención en el aula y la puesta en marcha de esta estrategia se dio en el tercer momento de la *clase* en la que el docente tuvo que intervenir ante la imposibilidad de que los estudiantes encontraran conexión entre las representaciones de la circunferencia y el polígono, es en este momento donde se hace explicito el error descrito por Radatz (1979) como E4: errores debidos a la rigidez del pensamiento.

6.8. Análisis de la pregunta 1.2.06

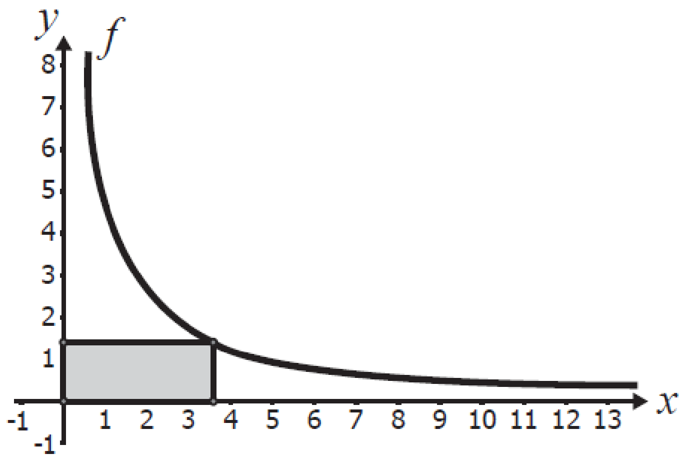
El análisis de esta pregunta está enmarcado por la construcción de un proceso de solución a través de la interacción entre los estudiantes del grupo y el docente propiciando un contexto similar al de una clase de matemáticas.

La pregunta es proyectada a los estudiantes junto con sus opciones de respuesta, todos los momentos en los que se desarrolló la intervención fueron registrados en grabación de video prestando atención especial a los aspectos mencionados en la pregunta de investigación.

Estrategia de implementación: IV

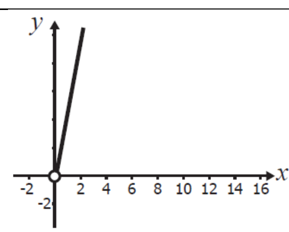
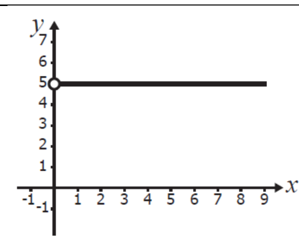
Ítem: 1.2.06

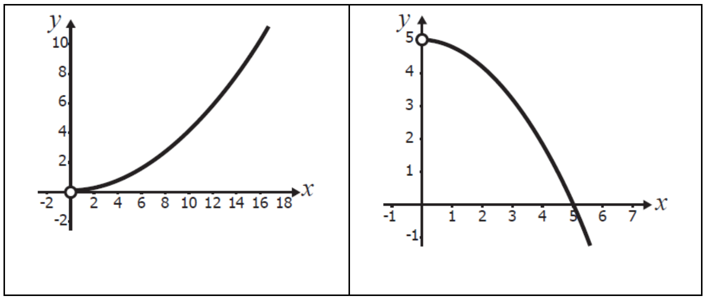
El área de los rectángulos que se pueden construir a partir del origen, los ejes y un punto que pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \frac{5}{x}$, donde $x > 0$, se describe con la expresión $A_x = x \cdot f(x)$.



¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a A_x?

Opciones de respuesta:

A.	**B.**
	
C.	**D.**



Opción correcta: B

Al igual que la anterior pregunta, la sesión de trabajo está dividida en cuatro momentos:

Momento 1: Presentación y familiarización del ítem
El ítem es presentado a los estudiantes a través de la proyección de una presentación, el primer momento da inicio con la lectura de la pregunta y la participación de los estudiantes alrededor de posibles preguntas que se generen. Para los estudiantes es claro que el área del rectángulo está limitada por la curva generada por la función $f(x) = \frac{5}{x}$, que la función puede clasificarse como racional, y que presenta un comportamiento asintótico respecto a los ejes, encontrando rastro de los *aspectos conceptuales* a los que el estudiante recurre. Los estudiantes manifiestan comprensión en que el área de los rectángulos generados tiene un carácter variacional pero les cuesta identificar las dimensiones del mismo. **Docente:** *"¿Cuáles serán las longitudes de los lados de los rectángulos generados?"* **Estudiante 1:** *"3,5 y 1,5"* La opinión del estudiante 1 evidencia la existencia del *nivel 1* de la comprensión de la gráfica descrito por Curcio (1994) en el IAI de la pregunta: "Leer los datos" pues

claramente el estudiante hace una lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo. **Estudiante 2:** *"lo que pasa es que x viene siendo la base del rectángulo pero no sé cuál es su altura"* **Docente:** *"Miren la información que les da el ítem, el área se describe por la expresión* $A_x = x \cdot f(x)$ *y si x es la base, la altura será...?"* **Estudiante 3:** *"pues* $f(x), no?$ *"* Los estudiantes 2 y 3 estarían ubicados según las categorías expuestas por Curcio (1994) en el nivel 3, "leer más allá de los datos" pues realiza inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.

Momento 2: Búsqueda de estrategias de solución
Estudiante 1: *"Es que a medida que x va creciendo el área del rectángulo también"* Al preguntar a los estudiantes por la opción de respuesta a la que más se inclinaban se encontró que la mayoría estaban distribuidos entre la opción A y C, sus argumentos estaban relacionados con el carácter creciente de las gráficas de tales opciones asumiendo que el carácter variacional de los rectángulos generados iba en crecimiento, encontrando concordancia con el rastreo de errores expuesto en el IAI de las opciones A y C. **Estudiante 2:** *"Profe yo lo que hice fue reemplazar a* $f(x)$ *por* $\frac{5}{x}$*"* Evidenciamos un aspecto estructural en el aporte del estudiante 2 estableciendo conexiones entre los tipos de representación puestos en juego en la pregunta, la premisa del estudiante 2 es un aporte valioso en la construcción del correcto proceso de solución de la pregunta.

El docente centra la atención de los estudiantes en el aporte del estudiante 2 y los invita a evaluar y aplicar la premisa en sus procesos.

Momento 3: Ejecución de las estrategias de solución

Se consolida la idea de que el área de los diferentes rectángulos no necesariamente varía de forma creciente. La premisa del estudiante 2 en el momento 2 conlleva a pensar que:

$$A_x = x \cdot f(x) \rightarrow A_x = x \cdot \frac{5}{x}$$

Ilustración 3: Procedimiento del estudiante (fragmento de video)

Evidenciamos un aspecto estructural del estudiante al momento de relacionar la función con la altura del rectángulo y hacerla explícita $f(x) = \frac{5}{x}$.

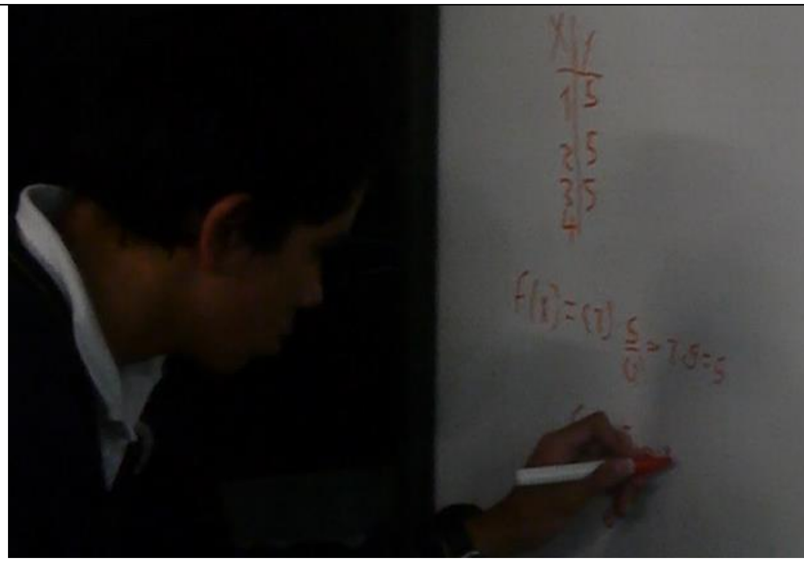


Ilustración 4: Procedimiento del estudiante (fragmento de video)

La ilustración 4 explicita otro *aspecto estructural* del estudiante al momento de evaluar la expresión encontrada para diferentes valores de x. Evidenciamos las observaciones hechas por Peralta García (2002) en el IAI de la pregunta quien señala que los estudiantes consideran el registro tabular como una herramienta inmediata que permite localizar puntos en el plano, más que otro tipo de representación.

Momento 4: Elección de la opción de respuesta

Estudiante 1: *"Eso siempre va a dar cinco"*

Estudiante 2: *"Sí, es una función constante"*

Estudiante 1: *"Es la B"*

De esta manera los estudiantes establecen una traducción entre los diferentes tipos de representación de la función manifestados en la pregunta y la correcta deducción de la opción de respuesta.

La aplicación de esta estrategia reflejó algunos de los aspectos didácticos manifestados en el IAI de la pregunta; se evidencio que aunque los estudiantes explicitan que el concepto función interviene en la solución del problema, no tienen la habilidad de pasar de una representación a otra de forma espontánea y flexible, luego, según Janvier (1987) no han integrado totalmente el concepto de función.

La aplicación de la estrategia IV permitió recolectar información valiosa en aras de determinar los aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos que tienen los estudiantes al momento de resolver preguntas de este tipo. Una de las limitaciones de esta estrategia reside en que la participación de los estudiantes es limitada, pues aunque todos vivencian el proceso de solución no hay una participación absoluta del grupo pese a los esfuerzos del docente por generar motivación y que se refleje en participación, luego son por lo general los estudiantes con mejor desempeño en la clase de matemáticas quienes se apropian de las intervenciones de la sesión, encontrando una desventaja frente a las demás estrategias en las que sin juzgar la calidad, se logró la participación de la totalidad de los estudiantes. Una ventaja de esta estrategia está dada por el rol del docente quien puede ejercer control sobre el proceso de solución guiándolo y formulando preguntas orientadoras. El hecho de presentar el ítem en un contexto familiar y similar al de la clase de matemáticas hace que la participación (aunque sea parcial) sea de manera natural en contraste con la formalidad de la aplicación de un instrumento escrito. Evidenciamos que existen serias dificultades cuando el estudiante desconoce el significado de algunos términos propios de las matemáticas pues reconocen verse limitados en sus procesos.

6.9. Análisis de la pregunta 1.2.03

Este análisis comprende una sesión de trabajo con dos grupo focales de 5 estudiantes cada uno que responden a diferentes características en relación a su desempeño y competencias en el área de matemáticas, al igual que algunas aptitudes evidenciadas sobre ellos en la implementación de ítems basados en otras estrategias. Algunas cualidades de los estudiantes son:

- Desempeños *Bajo* y *Alto* para las calificaciones periódicas en la asignatura de matemáticas.
- Estudiantes que han sido categorizados con *nivel básico*, *medio* y *superior* de argumentación en las estrategias I, II y III.
- Estudiantes que han mostrado particular interés en la investigación como respuesta a su preocupación frente al desarrollo de habilidades que puedan adquirir respecto a la presentación del examen.

La pregunta se presenta en un formato para cada estudiante donde aparecen el ítem y sus opciones de respuestas al igual que un espacio para las eventuales conjeturas que realice el alumno, siendo registrado en grabación de audio las ideas, premisas, discusiones y preguntas que advierten los estudiantes durante la lectura y desarrollo de la pregunta.

Estrategia de implementación: V

Ítem: 1.2.03

Se puede encontrar números racionales mayores que *k*, de manera que sean cada vez más cercanos a él, calculando $k + \frac{1}{j}$ (con j entero positivo). Cuanto más grande sea j, más cercano a k será el racional construido. ¿Cuántos números racionales se pueden construir cercanos a k y menores que $k+\frac{1}{11}$?

Opciones de respuesta:

- **A.** 10, que es la cantidad de racionales menores que 11.
- **B.** Una cantidad infinita, pues existen infinitos números enteros mayores a 11.
- **C.** 11, que es el número que equivale en este caso a j.
- **D.** Uno, pues el racional más cercano a k se halla con $j = 10$, es decir, con $k + 0{,}1$.

Opción correcta: B

Algunos episodios que sugieren especial mención y que guiados por la *visibilziación del pensamiento* a través del protocolo *Thinking-aloud*, ofrecen insumos cualitativos que logran evidenciar el rastreo de aspectos adscritos al IAI o a los intereses propios de esta estrategia, se presentan a continuación.

Estudiante 1: *Voy a plasmar en letricas lo que dice acá, como para poderlo entender mejor*. *Episodio 1: Transcripción estudiante (archivo de audio)*
El estudiante tiene la necesidad de traducir en símbolos propios y de mejor manejo y entendimiento para sí la información que ofrece el ítem. Tal evidencia adquiere significativo valor de caracterización al momento de describir cómo los estudiantes dan uso a los espacios diseñados para operaciones o comentarios de las preguntas y cuáles son las primeras acciones que tienen frente al ejercicio de comprender lo que se tiene y pide.

Estudiante 1: *Usted entendió esto (hablando hacia el estudiante 2) ¿Cuáles son los números racionales?*

Estudiante 3: *Yo también tenía la misma pregunta*

Estudiante 1: *Son los que no son infinitos (respondiéndose para sí), los que no son periódicos, y los que no son… digamos raíz de 3… que es una cosa "largota"*

Episodio 2: Transcripción de conversación entre estudiantes (archivo de audio)

En esta conversación varios estudiantes intervienen buscando definir el conjunto numérico de los racionales ($\mathbb{Q}$), sin embargo aunque se describen varias características que deberían cumplir o no tales números la intervención de un estudiante finiquito la lluvia de ideas al preguntarse si era necesario o no saber qué es un racional, así, entre ellos releyendo la pregunta dedujeron que no era necesario pues en la pregunta y opciones de respuesta no había vínculo con conocer o no la definición de un número racional. Aquí, si bien varios estudiantes centraron su pensamiento en descifrar y entender lo que ofrece la pregunta, solo un estudiante empleo una heurística diferente, mostrando otro tipo de pensamiento al momento de dar respuesta a una pregunta, y era establecer la pertinencia y necesidad de saber el significado de un concepto alrededor de la teoría de conjuntos, así ambas tendencias se consideran de orden estratégico y de método. A su vez aspectos conceptuales también relucen, pues se capta cómo *recursos defectuosos* (Schoenfeld, 1985) algunas de las características que los estudiantes comentan que debe tener un número racional.

Estudiante 1: *Un ejemplo, digamos planteo k más 0,001 esto sería un número mayor que k y cercano a él.* *Episodio 3: Transcripción estudiante (archivo de audio)*
Este estudiante interpreta la pregunta por medio de un ejemplo que asocia a lo que pide el ítem, sin embargo, se aleja de la expresión que ofrece el estímulo y construye un número muy cercano a k en expresión decimal que representada por medio de fraccionario $\left(\frac{1}{100}\right)$ y que cumple con lo estipulado en la pregunta cuando asegura que "[…] *cuanto más grande sea j, más cercano a k será el racional construido* […]" pero no es reconocido por el estudiante propiamente. Es decir, que para este caso, el estudiante tiene claro el concepto de números cercanos a otro, representados por medio de una suma y que si desea puede construir otro. Su método no responde a las representaciones explícitas en la pregunta, pero utiliza una equivalente cuyo transito no le es evidente. Ambos aspectos, el conceptual y metodológico correspondiente a un alto nivel de comprensión se reflejan en el quehacer de este estudiante, pero no por ello sintetiza la solución a la situación problema.

Estudiante 3: *Profe, yo lo veo como lo que usted nos estaba explicando en clase* […] (aquí el estudiante dice un ejemplo asociado al hallazgo de números muy cercanos a otro, por derecha e izquierda, estudiados en clase de cálculo durante las últimas sesiones) *pues yo creo que serían infinitos* *Episodio 4: Transcripción estudiante (archivo de audio)*
El estudiante realizó la lectura completa de la pregunta relacionando el cuestionamiento "*¿cuántos números* […]*?"* con una noción matemática asociada a los números reales descrita en sesiones de clase de matemáticas alrededor de la construcción de límite, donde se puede acercar cuanto desee a un número por derecha o izquierda de este. El estudiante

logra abstraer la idea de clase y la conjuga con la solución de la situación, sin tener en cuenta que las condiciones hablaran sobre cualidades propias de los números a construir, racionales, desestima esto, pues considera que no importa si se hablan de ellos o no, sino de la cantidad y de los procesos que se pueden realizar para acercarse a un número, concluyendo la cantidad infinita de elementos solución y determinando la opción B. Así se comprueba que los estudiantes realizan inferencias directas con conceptos matemáticos desarrollados en sesiones de clase pero aunque en un principio no les son evidente tales relaciones, con la relectura de la pregunta y un posible ambiente controlado de sus emociones, ellos logran mostrar aspectos de distinto índole (conceptuales, estructurales y metodológicos) y logran clasificar información que resulte relevante o no al momento de dar respuesta a un ítem.

Los comentarios realizados por los estudiantes tuvieron gran cohesión con las dimensiones didácticas reflejadas en el IAI de esta pregunta; esto es explícito al momento de contrastar las conclusiones de Escalona (1975) cuando, por medio de las cajas divisorias, entre más pequeño fuese la medida de una de estas, debido a la división en muchas partes de la unidad, más cerca estará el número al parámetro dado, en este caso k.

6.10. Análisis de la pregunta 1.3.05

Al igual que la pregunta anterior, y esto debido a pertenecer a la estrategia V, el grupo focal está constituido por estudiantes cuyas características se comentaron previamente. El ítem se planteó bajo el protocolo *Thinking-aloud* descrito en la propuesta de intervención por medio de un formato escrito.

Estrategia de implementación: V

Ítem: 1.3.05

Se desea adquirir un terreno de forma cuadrada con un perímetro entre 4 y 20 metros. Si x representa el lado del terreno, los valores que puede tomar x para que el perímetro del terreno cumpla la condición dada son:

Opciones de respuesta:

- **A.** $4 < x < 20$
- **B.** $0 < x < 16$
- **C.** $2 < x < 10$
- **D.** $1 < x < 5$

Opción correcta: D

De la sesión de trabajo se extrajeron los episodios que permiten el rastreo de aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos que evidencian los estudiantes al solucionar esta pregunta.

Estudiante 3: *Yo nunca he aprendido cómo son esos signos ¿cuál es más y cuál es menos?* *Episodio 5: Transcripción estudiante (archivo de audio)*
Este estudiante comprende el significado de que un número sea mayor o menor que otro, pero existe una debilidad asociada, y reconocida por él, a la gramática formal de las matemáticas respecto a las cadenas de caracteres, específicamente a los símbolos que sirven de eslabón entre dos números cuando se establece una relación de orden, mayor que y menor que; lo anterior implica que una dificultad fuerte sobre la comprensión de la

pregunta recae en el lenguaje que esta utilice, donde, aunque el estudiante entienda lo que se pide, estos factores pueden intervenir en la elección de respuesta; el IAI recoge estas ideas al hablar del sentido semántico (Grupo Azarquiel, 1991) alrededor de la interpretación de los signos. Sin embargo el estudiante sobrepone a su dificultad heurísticas sobre el uso de los signos mediante la siguiente explicación "*Lo abierto va al número más grande…*", omitiendo en la elección del símbolo la grafía de este, sustituyéndola por la funcionalidad de estos (símbolos) al momento de comparar dos números. Por medio de una discusión con sus compañeros del grupo focal el estudiante despejó sus dudas y conjuntamente tradujeron lo que significa cada una de las opciones de respuesta.

Estudiante 1: *Profe ¿Qué es perímetro?*

Estudiante 5: *El área es todo, y perímetro…*

Estudiante 1: *¿la línea total?*

Episodio 6: Transcripción de conversación entre estudiantes (archivo de audio)

La anterior conversación donde aparece al final una expresión interrogativa que sugiere la interpretación del estudiante frente al concepto de perímetro no está del todo descrita en el IAI, pues allí se sugiere que la dificultad sobre la distinción entre ambos conceptos no se rastrea de forma directa en el ítem, ya que las opciones de respuesta no están atadas a los cuadrados o productos de las dimensiones sugeridas en el estímulo; sin embargo, el conocer qué significa perímetro resalta como primer lugar conceptual que centre al estudiante en la comprensión de la pregunta. Nuevamente se reconoce un *recurso defectuoso* (Schoenfeld, 1985) que posee el estudiante, mediado por la duda que aparece de inmediato sobre el significado de este concepto; aunque, otro estudiante demarca qué significa el concepto área asociado al anterior, de modo que ubica al primer estudiante comprendiendo por medio de una pregunta la distinción entre ambas nociones.

Estudiante 3: *Obvio, es la A, porque dice si "se desea adquirir un terreno de forma cuadrada con un perímetro entre 4 y 20", por eso, x es mayor que 4 y menor que 20, entonces aquí le están diciendo* [Señalando la opción A] *que 4 es menor que x, que es lo mismo a decir que x es mayor a 4, y a la vez es menor que 20, entonces es la A.*

Episodio 7: Transcripción estudiante (archivo de audio)

El estudiante demuestra una clara comprensión sobre las posibles comparaciones que pueden realizarse por medio de las relaciones de orden al momento de hablar en ambos sentidos de estás "[…] *4 es menor que x, que es lo mismo a decir que x es mayor a 4* […]", que no corresponde a la desembocadura de un análisis trivial, sino a la capacidad de leer inecuaciones de izquierda a derecha y viceversa. Lo anterior sustentado en el IAI como una usual dificultad descrita por Garrote (2004) en estudiantes que no reconocen la equivalencia entre las expresiones $x > 1$ y $1 < x$. Si bien las interpretaciones del estudiante son correctas no son completas, ya que desestima la segunda parte de la pregunta donde establecen la correspondencia de la variable x respecto a la situación problema, y esto ocurrió en todos los demás miembros del grupo focal, quienes asociaron directamente la primera parte del ítem con una expresión (inecuación) que respondiera a las condiciones establecidas donde erróneamente consideran la variable x como el perímetro y no el lado del cuadrado.

Todos los estudiantes, por razones expresadas anteriormente, eligieron la opción A como correcta, sin embargo en aras a la comprensión correcta de la pregunta y la identificación, por parte de ellos, del error cometido en sus análisis el docente comenta sobre las cualidades de la variable que se asocia en ítem, y que esta no refiere a la medida del perímetro, sino, a la del lado de los posibles cuadrados, de modo que mínimo y máximo este podría medir entre 1 y 5 metros.

Al cerrar los análisis de las preguntas implementadas con la estrategia V cabe resaltar la importancia de la información que en esta se recoge, mediada por la intervención investigativa consiente e interesada en descifrar las razones y los aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos que los estudiantes tienen al momento de resolver este tipo de preguntas. Si bien las demás estrategias apuntan a la búsqueda de estos aspectos, en su implementación quedan limitadas a las versiones, en ocasiones, desinteresadas de los estudiantes o sin explicaciones concienzudas y compartidas con demás compañeros. Por medio de esta estrategia se puede determinar que los estudiantes poseen dudas conceptuales específicas que le impiden la comprensión parcial o total del ítem, evidencia de ello se rescata en los episodios 2 y 6 transcritos de las intervenciones hechas por los estudiantes, más que dificultades asociadas a lo que pide la pregunta, pues sobre lo último se mostró como varios de ellos desestiman condiciones que consideran innecesarias al momento de dar respuesta o elegir la opción correcta. Parte de los alcances de esta estrategia se deben a sus características, pues le resulta más fácil y natural al estudiante exponer sus dudas, ideas de solución, descarte y elección de opción de respuesta de forma verbal a un colectivo de pares y el docente investigador en comparación a realizarlo frente a un instrumento escrito.

7. Conclusiones

El trabajo concluye varias ideas asociadas al pensamiento circundante y no formalizado sobre el rendimiento de los estudiantes en la prueba de matemáticas del examen SABER 11. La elección aleatoria de opciones de respuesta es común denominador en los estudiantes y esto confirmado por la incapacidad de ellos al argumentar usando algún tipo de razón, independiente la naturaleza de esta (diagramas, dibujos, operaciones, relaciones, etc.), el porqué de su escogencia; sin embargo, existen casos considerables donde la elección o propuesta de solución de una pregunta es acertada, pero ello no es indicio suficiente o directo de que el estudiante pueda transmitir o representar de alguna forma argumentos que soporten su decisión; así, herramientas teóricas y metodológicas como *think aloud* adquieren especial protagonismo al momento de identificar debilidades y fortalezas en los aspectos conceptuales o metodológicos que el estudiante aplica en la resolución preguntas de este tipo.

Finalizada la implementación por medio de las diferentes estrategias diseñadas se evidencia la importancia que adquieren los IAI, pues a través de ellos es posible establecer parámetros de diferente índole que controlan las variables que pueden establecerse en la aplicación de preguntas tipo SABER en el aula; por otro lado resaltamos la importancia de las estrategias utilizadas en la implementación, pues fueron sus características las que permitieron evidenciar los aspectos considerados en la pregunta de investigación, siendo unas más útiles para identificar algunos de los aspectos mencionados que otras.

Las particularidades de cada una de las estrategias implementadas permitieron dar cuenta de los aspectos conceptuales, estructurales y metodológicos que consideran los estudiantes al momento de resolver preguntas tipo SABER 11. En relación con los aspectos metodológicos la estrategia I reveló que existe una fuerte tendencia por asumir cada una de las opciones presentadas por el ítem como correcta para entrar a constatar si la opción cumple con las condiciones propuestas en la pregunta y así descartar cada una de las opciones hasta llegar a la correcta; las argumentaciones dadas por los estudiantes para justificar la elección de la que consideran como opción correcta suele acudir a nociones intuitivas y de sentido común asociándose con un nivel básico de argumentación. Tras la implementación de las estrategias II y III se evidenció que la forma de aproximarse a la pregunta cambia considerablemente cuando el estudiante no cuenta con las diferentes opciones de respuesta llevándolos a cometer errores que usualmente están considerados en los diferentes IAI de cada pregunta. La estrategia II mostró que los aspectos estructurales están asociados con la información que presenta la pregunta, de esta manera, los estudiantes utilizan los datos proporcionados por la pregunta para entrar a operar deliberadamente con ellos y encontrar relaciones con las diferentes opciones de respuesta. La aplicación de la estrategia III permitió vislumbrar algunos de los aspectos estructurales pues hace que el estudiante asuma la tarea de resolver un problema haciendo explícito en su proceso de solución los aspectos conceptuales que utiliza y la forma en que los aplica, por lo general relacionados con el rastreo de errores construido en el IAI de la pregunta. Evidenciamos tras la aplicación de las estrategias IV y V que aunque los estudiantes manifiestan coherencia entre los aspectos conceptuales manifestados por ellos y los considerados en el IAI no necesariamente hay apropiación e integración de los conceptos; otro aspecto relevante es que el desconocimiento de terminología matemática en el planteamiento de las preguntas conlleva a la incomprensión de lo que busca la pregunta, luego los estudiantes acuden a razones intuitivas para la argumentación de su elección.

Emplear preguntas testeadas y parametrizadas por el ICFES dentro del aula de clase tiene gran potencial pedagógico si en ello se invierten esfuerzos previos al análisis de los ítems que genere un rango (perímetro, límites) de su alcance, pues sirven en dos vías reconocibles; una, de actual excusa pragmática para la preparación concienzuda y responsable de los estudiantes para este tipo de evaluaciones y no como el mero uso instructivo contextual del examen sin que ello vaya más allá a la elección correcta de la opción de respuesta y una simple estadística de cuántos acertaron; la segunda vía es delineada por la funcionalidad que tienen estos ítems, que una vez tratados en sus posibles dimensiones didácticas, servirán de excusa para la introducción o ejemplificación de conceptos o nociones y temario matemático escolar, donde se podrían extrapolar las condiciones de este trabajo investigativo sobre las pruebas SABER 11 a otros exámenes de características similares (SABER 3, SABER 5, SABER 9, SABER PRO, PISA), de modo tal que las bondades sugeridas aquí sirvan para vislumbrar un camino lleno de posibilidades con el manejo de estas preguntas.

El trabajo asumió que las diferentes preguntas diseñadas por el ICFES (y utilizadas a lo largo de la investigación) cumplen con los requerimientos para la construcción de indicadores de calidad de la educación, no intentó en ningún momento establecer la pertinencia, calidad o fiabilidad de las preguntas que diseña el ICFES, labor que podrá prever otra investigación donde se puedan construir nodos entre la presente investigación y aquella, que posibiliten mayor cantidad de argumentos teóricos y pedagógicos sobre la variedad de aspectos que giran entorno de estas pruebas estatales; dejándose la ventana abierta a docentes y nuevos investigadores que estén interesados en este tipo de evaluaciones y sus relaciones con el rendimiento académico de los estudiantes.

8. Reflexión pedagógica

Los intereses que confluyen en una investigación de orden pedagógico parten del principio fundamental en la preocupación, desarrollo y mejoría sustancial de la práctica y quehacer docente, decimos sustancial dado que la envergadura del cambio que genere, o no, se refleja intrínsecamente en los procesos de enseñanza-aprendizaje dentro y fuera del aula de clase. Porque, también, el docente debe pensar su práctica, su estilo y metodología fuera del aula, reflexión que suscita una reconstrucción de hechos al finalizar sesiones de trabajo con los estudiantes producto de una intervención prevista y las relaciones descritas por la triada didáctica, así; los diarios de campo, formales o informales, constituyen fuente de información valiosa al momento de establecer una campo de investigación o inquietud pedagógica. Estos diarios de campo, dentro del trabajo investigativo, fueron materia prima de recolección y análisis de información, vestigio metodológico que se acopla de manera necesaria y conveniente a la responsabilidad diaria de nuestra labor profesional.

Lo anterior implica una asociación directa con lo que se denominó inquietud pedagógica, esta noción refiere al "*cosquilleo*" que suele tener el docente preocupado por su práctica e interacción con los estudiantes y demás profesores al momento de cuestionarse sobre la viabilidad, conveniencia, importancia, forma, método, etc., de aspectos relacionados con la labor de enseñanza. Este "*cosquilleo*" resulta ser la punta del iceberg que vendrá a recubrir el planteamiento de un problema de investigación. Dicha consecuencia está plasmada en este trabajo de investigación, que nació por el "*cosquilleo*" de intentar descubrir, o por lo menos describir, qué consideraciones (conceptuales, estructurales y metodológicas) realiza el estudiante al enfrentarse a preguntas de la prueba de matemáticas del examen SABER 11. Sin embargo esta inquietud pedagógica también se deriva de la interpretación de resultados que pueden realizarse anualmente y encontrar en este examen una posibilidad latente para el ingreso a la educación superior por parte de los pupilos y, que se ha visto desvanecida por el bajo rendimiento en las pruebas estales.

Para este momento de la reflexión pueden afluir dudas sobre la confianza, intenciones y principios de un examen como el SABER 11, su carácter evaluativo y diciente de los estudiantes o el factor homogeneizador que pueda contener, la inquietud investigativa no derogaba ni afirmaba los anteriores posibles interpretaciones, fundamenta su origen en la importancia que tienen estos resultados en el eventual desarrollo académico de los estudiantes después de su vida escolar que resume un detonante de preocupación educativa e indicador, quiérase o no, de la calidad de educación que reciben los alumnos. Para nosotros, la investigación compone un umbral académico fuerte sobre la pertinencia e intencionalidad que existe en la preparación de los estudiantes frente a este tipo de exámenes, que no sólo es SABER 11, sino demás dispositivos símiles, como forma de ingreso a la universidad.

Preguntarse sobre lo que se pregunta el estudiante, o acerca de lo que entiende cuando se le formula preguntas (al estudiante), es base fundamental del texto; sus conclusiones y demás aristas pedagógicas recaen en el campo de la constante retroalimentación, cuyos alcances y enfoques vendrán dados por aquellos interesados en el tema, dejándose así un constructo teórico alrededor de cómo la implementación de preguntas en el aula deberá ser meditado y el uso de ítems no solo recae en el diseño y contextualización de una prueba, sino, como introducción, de fuerte sustento pedagógico, de temáticas y actividades de salida.

La corresponsabilidad social que tiene nuestra profesión docente sirve de diente en el engranaje que mueve o define el futuro de la niñez y adolescencia colombiana, al igual que cigüeñal en el motor de promover nuevas metodologías y preocupaciones (*“cosquilleos”*) alrededor de los procesos de enseñanza-aprendizaje que existen dentro del aula de clase.

Por último, se muestra un cuadro comparativo donde aparecen actitudes de índole profesional desarrolladas previamente a la generación del trabajo investigativo y después de este.

Cuadro comparativo	
Solía hacer…	***Hago y haré…***
Resolver un par de preguntas tipo ICFES, sin importar la procedencia de éstas, por medio de un instrumento escrito, donde al final se comentaba cuál era la opción correcta. Conocer el promedio del puntaje obtenido por los estudiantes en la prueba de matemáticas. Se identifica las débiles condiciones de contextualización del estudiante respecto a este tipo de preguntas, pero el fortalecimiento de estas habilidades no es precisamente de mi interés. Las causas que subyacen en los errores conceptuales de los estudiantes son ajenos	Encontrar sentido en la elección de las preguntas que correspondan a los parámetros del ICFES y sus pruebas estatales, donde su aplicación del aula estén asociados a objetivos claros y no al simple hecho de cuantificar cuántos estudiantes eligieron o no la opción correcta; sino al rastreo de posibles errores de orden conceptual, estructural o metodológico. Tener la necesidad de interpretar con mayor profundidad los resultados de este tipo de pruebas, pues no basta con conocer el promedio del puntaje de los estudiantes, cuando éste responde a diferentes condiciones de estructura del examen; así,

al actual proceso de enseñanza, por ende su mejoría está puesta en otros actores y su descripción pertenece a esferas académicas alejadas de la realidad docente.	poder determinar conscientemente las fortalezas y debilidades de los estudiantes. Poseer una actitud de *acecho investigativo*, donde las situaciones en el aula de matemáticas se conviertan en materia prima y fuente para generar interrogantes pedagógicos que intenten describir las causas y consecuencias de las fortalezas, debilidades u oportunidades que se evidencian en relación a los procesos de enseñanza-aprendizaje.

- **Reflexión pedagógica *investigador Alfa* (Andrés Felipe Peña)**

La investigación proporcionó fuertes elementos de reflexión alrededor de la labor pedagógica, las implicaciones del desarrollo del proceso investigativo derivan concretamente en que el accionar de los procesos de enseñanza aprendizaje se encaminen a que los estudiantes interpreten, argumenten y propongan aspectos que se consideran fundamentales al momento de organizar el conocimiento matemático. También se busca una mayor complejidad que se fundamente desde el conocimiento matemático, en el significado de conceptos y estructuras matemáticas cada vez más complejas, y el manejo y uso de reglas de formación y de diferentes lenguajes asociados a estructuras matemáticas de manera rigurosa y precisa desde las situaciones problema que pueden proponerse a través de los diferentes ítems, en el sentido de las relaciones y conexiones matemáticas que impliquen y exijan el manejo de la situación y el lenguaje, tanto común como matemático.

El uso consiente e intencional de preguntas diseñadas bajo los parámetros del ICFES en el aula ejecutando las estrategias de implementación propuestas en el trabajo puede considerarse como un trampolín a los conceptos asociados a la pregunta, de esta manera se constató que hay una mayor motivación por parte de los estudiantes si se pone de manifiesto el carácter del ítem y su relación con la prueba de estado.

El trabajo investigativo invita a la implementación de continuos planes de mejoramiento que cobijen la capacitación y seguimiento de los docentes de la educación básica y media, esto puede conducir al mejoramiento de la competencia comunicativa de los estudiantes, para esto es necesario el compromiso institucional y del docente en general, que posibilite la puesta en marcha de las diferentes estrategias que se planteen.

El proceso de investigación contribuyó a la comprensión de las diferentes dimensiones que componen una prueba de estado, pues se dispone de una fundamentación conceptual y una estructural que permite vislumbrar niveles de logro de competencias y extensiones de pensamiento, las cuales tienen como punto de partida los lineamientos curriculares expedidos por el ministerio, entonces los resultados de las pruebas se constituyen en un referente orientador y de consulta para los docentes. De esta manera, los docentes contarán con las herramientas necesarias para participar de manera activa en la revisión del currículo y plan de estudios, que guían la labor docente en su desempeño como líderes y mediadores de los procesos de aprendizaje y desarrollo de competencias en los estudiantes.

- **Reflexión pedagógica *investigador Épsilon* (Camilo Carmona Rodríguez)**

El trabajo de investigación realizado colindó con varios de mis intereses laborales, pues durante los últimos años he estado asociado al ICFES en diferente roles dentro de la producción de la prueba de matemáticas del examen SABER en sus distintas versiones. Aunque en tal contexto laboral se establecen afirmaciones del porqué de los resultados y elecciones de las distintas opciones de respuestas no he tenido la oportunidad de acercarme dentro del aula para la comprobación de tales conjeturas, así; por medio de la investigación se amplió el espectro y alcance pedagógico que posee la implementación de preguntas tipo SABER.

Ser parte del desarrollo y diseño de este examen genera una visión distinta a la que posiblemente demás docentes (de matemáticas) tienen del mismo, donde se relacionan intereses didácticos y profesionales de índole escolar, pues construir una pregunta implica establecer la población, el objetivo y grado de dificultad donde la experiencia en el aula sirve de insumo, en primera instancia, de la creación de ítems; sin embargo la aplicación de estos y su eventual análisis no eran efectuados en mi quehacer docente. Ahora, con la experiencia y sistematización del ejercicio investigativo abre el abanico de posibilidades del uso de las preguntas en el aula y las comprensiones que los estudiantes realizan alrededor de estas. Si bien durante mi práctica había trabajado el uso de algunos ítems ofrecidos por el ICFES, no realizaba cambios a la presentación de estos, acción que demostró el desarrollo de la investigación un alto potencial en la mejoría del entendimiento y comprensión que el estudiante puede realizar de este tipo de cuestionamientos siendo así uno de los principales cambios en el accionar pedagógico del aula de matemáticas.

Asociado a esto y retomado en otros apartes, establecer como práctica constante el cuestionar los alcances de las herramientas que se usan para las distintas sesiones de trabajo con los estudiantes en clase de matemáticas y pensando en la bondad que existe en la transformación continua y benéfica de las metodologías empleadas para esto, contribuirá al enriquecimiento y crecimiento pedagógico que el docente investigador preocupado e interesado por su quehacer puede obtener con dichas ideas de cambio ya que delimita las fortalezas y debilidades de sus destrezas, donde la humildad frente a las aptitudes que se poseen profesionalmente es baluarte para identificar los aspectos a mejorar.

El estudio de la pedagogía viene a revitalizar los *engranajes didácticos* usados dentro del aula, donde *aceitan* tuercas y tornillos conceptuales y metodológicos que en ocasiones, oxidados, entorpecen o lentifican las relaciones asociadas en la triada didáctica entre el saber (conocimiento), el estudiante y el docente y, mediados por objetivos claros, para este caso, la presentación de los exámenes estatales hacen de la investigación dentro del aula una peana fundamental de reflexión y la construcción de una red amplificada por todos quienes se hacen participes de tales análisis y preocupaciones.

Referencias

Abrate, R. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Córdoba.

Armengol, L. (2007). Los protocolos de pensamiento en voz alta como instrumento para analizar el proceso de escritura. *RESLA*, 27-35.

Aznar, M. M. (1990). Perpectivas sobre tipos y resolución de problemas. *Cambio educativo y desarrollo profesional: actas VII Jornadas de Estudio sobre la Investigación en la Escuela* (págs. 38-44). Rafael Porlán y Pedro Cañal.

Bargalló Márquez, C., & Roca Tort, M. (2006). Plantear preguntas: Un punto de partida para aprender ciencias. *Revista Educación y Pedagogía*, 61-71.

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas: El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*(1).

Batanero, M., Godino, J., & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Bell F., H. (1978). *Teaching and learning mathematics (in secondary schools).* USA: Wm. C. Brown Co. Pub.

Benander, L., & Clement, J. (1985). *Error Patterns: Observed in basic arithmetic and algebra courses. Fund for the improvement of post secondary education.* New York: EXXON Education Foundation.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Caballero Carrasco, A., & Blanco Nieto, L. J. (2007). Las actitudes y emociones ante las matemáticas de los estudiantes para maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. *Conocimiento y desarrollo profesional del profesor.* Universidad de la Laguna.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad. Tesis de Doctorado. Universidad de Valencia.*

Cuevas Mendoza, M. L. (2013). *Sesgo cultural en los ítems de las pruebas del examen Saber 11° en Colombia.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Cuevas Mendoza, M. L. (2013). *Sesgo cultural en los ítems de las pruebas del examen SABER 11° en Colombia.* Bogotá D.C.

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension.* Reston: VA: N.C.T.M.

Del Puerto, S., Minnaard, C., & Seminara, S. (2004). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas.* Revista Iberoamericana de Educación: OEI.

Dwyer, R. C., & Elligett, J. K. (1970). *Teaching children through natural mathematics.* West Nyack, N.Y.: Parker Pub. Co.

Escalona, F., & Noriega, M. (1975). *Didáctica de la matemática en la Escuela Primaria 2.* Buenos Aires: Kapelusz S.A.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1988). *The combinatorial solving capacity in children and adolescents.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v. 5, pp. 193-198.

FUVEST, F. u. (2013). Exame de transferência - EXATAS. Brasil.

Garrote, M., Hidalgo, M. J., & Blanco, L. J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desiguldades e inecuaciones. *Suma, n° 46*, 37-44.

Grupo Azarquiel. (1991). *Ideas y actividades para enseñar algebra.* Madrid: Síntesis.

Guzmán Ozámiz, M. d. (1992). *Selectividad, Matemáticas I. Pruebas 1991.* España.

Guzman, R. J., & Tatiana, G. (2012). Uso de la tecnología en la alfabetización de niños con déficit congnitivo leve. *Editorial UD*, 25 - 31.

Hadar, N., & Hadass, R. (1981). *The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls.* Educational Studies in Mathematics, v. 12, pp. 435-443.

Hernández, R., & Mendoza, C. P. (2008). El matrimonio cuantitativo-cualitativo: el paradigma mixto. *Documento presentado en el Sexto Congreso de Investigación en Sexología.* Villahermosa, Tabasco, México.

ICFES. (2013). *ICFES - Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación.* Obtenido de www.icfes.gov.co: http://www.icfes.gov.co/examenes/component/docman/doc_download/385-matematicas?Itemid=

ICFES. (2013). Sistema Nacional de Evaluación Estandarizada de la Educación - Alineación del examen SABER 11°. Bogotá, Colombia.

ICFES. (Junio de 2014). SABER 11° 2014 - Cuadernillo de prueba - Ejemplo de preguntas 11° grado. Bogotá D.C., Colombia.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (26 de Noviembre de 2013). Obtenido de ICFES: http://www.icfes.gov.co

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Jimeno, M. (2006). ¿Por qué las niñas y niños no aprenden matemáticas? Barcelona: Octaedro.

Krulik, S., & Rudnick, K. (1980). *Problem solving in school mathematics.* Virginia.

Llivina L., M. J. (1998). *Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos.* La Habana, Cuba.

Mazarío Triana, I. (2002). *La resolución de problemas en la Matemática I y II de la carrera de Agronomia.*

Míguez, Á. (2003). Los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas en las actividades de aprendizaje de matemática. *Revista Educación y Pedagogía*, 143-149.

Molina González, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Granada.

Moreno Jiménez, B. (2000). La evaluación del estrés y el burnout del profesorado: el CBP-R. *Revista de psicología del trabajo y de las organizaciones, 16*(2), 151-172.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavksy, O., & Inbar, S. (1987). *An empirical classification model for errors in High School Mathematics.* Journal for Research in Mathematics Education, Vol 18, 3-14.

Muñoz, N., & Musci, M. (2013). Manual de lectura y escritura argumentativas. Esquel, Argentina: Rio Gallegos.

Niss, M. (1997). ¿Por qué enseñamos matematicas en la escuela? *Investigar y Enseñar (Variedades de la Educación Matemática)*, 7-16.

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números, n° 40,* 3-28.

Peralta García, J. (2002). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal. Memorias de la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Universidad de Sonora. México, pp. 166 – 173.*

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La génèse de l'idée d'hasard chez l'enfant.* París: Presses Universitaire de France.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Mexico: Trillas.

Radatz, H. (1979). *Error analysis in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, Vol 10 (3), pp.163-172.*

Rico, J., Herrera, A. N., & Padilla, J. L. (2012). Estudio de sesgo pruebas SABER 2009. *V Seminario internacional de investigación sobre calidad de la educación.* Bogotá D.C.

Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro, & E. Castro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas en la educación primaria* (págs. 231-254). España: Síntesis.

Sampieri, R., Fernández, C., & Pilar, B. (2002). *Metodología de la investigación.* México: McGraw Hill.

Sánchez Restrepo, H., & Espinosa Rodríguez, J. D. (2012). *Construcción de Ítems de opción múltiple para pruebas objetivas.* Universidad Politécnica Salesiana, Quito.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 125-154). ICE/Horsori.

Speranza, F. (1987). La geometria dalle cose alla logica. En B. D'Amore, *La matematica e la sua didattica* (págs. 105-114). Bologna: Pitagora.

Steinle, V., & Stacey, K. (2004). *Persistence of decimal misconceptions and readiness to move to expertise.* Bergen: Norway: PME.

Tarapuez, L. C., Marmolejo, G., & Blanco, H. (2010). *Pruebas saber 2009. Análisis del tópico de geometría y medición.* Pasto.

Taylor, S., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos de investigación. La búsqueda de significados.* Barcelona: España: Paidós.

Tishman, S., & Palmer, P. (Julio de 2005). Pensamiento visible. *Leadership Compass*.

Universidad Nacional de Colombia. (5 de Mayo de 2007). Programa de pregrado - Prueba de Admisión. Bogotá D.C., Colombia.

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.* Londres: Kluwer Academic Publishers.