PROMOVIENDO LA COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA LETRA EN POLINOMIOS QUE REQUIEREN DE PROCESOS DE FACTORIZACIÓN A TRAVÉS DEL MARCO DE ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

MILTON JAVIER FAJARDO MOSQUERA

UNIVERSIDAD DE LA SABANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
Chía, Cundinamarca
2016

PROMOVIENDO LA COMPRENSIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA LETRA EN POLINOMIOS QUE REQUIEREN DE PROCESOS DE FACTORIZACIÓN A TRAVÉS DEL MARCO DE ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

MILTON JAVIER FAJARDO MOSQUERA

ASESOR

HENRY ALEXANDER RAMÍREZ BERNAL

UNIVERSIDAD DE LA SABANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

Chía, Cundinamarca
2016

AGRADECIMIENTOS

Agradezco infinitamente a mi asesor, el profesor Henry Alexander Ramírez Bernal por su dedicación y paciencia durante todo el proceso de la presente investigación, sé que sin su constante orientación y amplios conocimientos en el campo de la matemática y de la pedagogía, habría sido imposible culminar esta meta que Dios puso en mi camino.

A mis jurados John Alexander Alba y Yimmy Triana por sus aportes en pro de fortalecer este proyecto.

A mi familia y amigos, quienes constantemente me dieron su voz de aliento para continuar con fuerza y entusiasmo durante cada etapa de esta maestría.

A mis compañeros del grupo dos y profesores de quienes tuve la fortuna de recibir clase, por compartir sus conocimientos y experiencias, haciendo de cada encuentro un momento inolvidable.

A la Universidad de la Sabana y a la doctora Rosa Julia Guzmán por el respeto y la dignidad que siempre mostraron durante mi proceso de formación.

A mis queridos hijos de 903 por permitirme llevar a cabo cada etapa de esta maestría.

A la Secretaría de Educación de Bogotá, por permitirme ser agente de cambio y capacitarme para ser un mejor maestro.

TABLA DE CONTENIDOS

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

El presente documento corresponde a una propuesta de investigación acción participativa, desarrollada con un grupo de estudiantes de un colegio público de Bogotá. quienes actualmente están en el curso 903; así, se buscaba identificar y promover la comprensión que presentaban frente al significado de la letra ante polinomios susceptibles de ser factorizados y de cada elemento que lo conforman.

Se diseñó una unidad didáctica desde el marco de Enseñanza para la Comprensión, presentando actividades que orientaran a deducir y comprobar las fórmulas que acompañan a dos casos de factorización para posibilitar la comprensión de la variable como número generalizado y la equivalencia existente entre un polinomio antes de ser factorizado -reconociendo su estructura- y una vez realizada su transformación mediante los procesos de factorización pertinentes, evidenciando además los cambios que en su práctica refleja el docente investigador.

Palabras clave.

Número generalizado, polinomio, factorización, Enseñanza para la Comprensión

Abstract

This document corresponds to a research proposal participatory action, it was developed with a group of students from a public school in Bogota who currently attend ninth grade, through this, sought to identify and promote the understanding that the students had against the meaning of the letter to susceptible polynomials to be factored and every single element which make it up.

A didactic unit was designed from the framework of teaching for understanding model, introducing activities that guided to deduct and check the formulas that accompany two cases of factoring; to facilitate the understanding of the variable as a general number and existing equivalence between a polynomial before being factored - recognizing the structure - and once made the transformation through the relevant processes of factoring, also showing the changes in their practice reflects the researcher teacher.

Key words.

Generalized number, polynomial, factoring, The teaching for understanding.

Introducción

El presente proyecto de investigación surge luego de reconocer el bajo desempeño académico que año tras año muestran los estudiantes de grado octavo del Colegio San Francisco I.E.D. de Bogotá D.C. de la jornada tarde en la asignatura de Álgebra.

Con el propósito de reconocer posibles causas para tal desempeño y haciendo uso de instrumentos diagnósticos, se indagó sobre la comprensión que manifestaban los estudiantes de grado octavo del año 2015 y noveno 2016 frente a la variable algebraica, vista desde diferentes significados que ésta tiene en múltiples contextos[1], para determinar cómo dicha comprensión se refleja en el uso adecuado de procesos de factorización, reconociendo en este caso la variable como una letra que representa un número generalizado.

Una vez realizado dicho diagnóstico, se tomaron elementos del modelo de Enseñanza para la Comprensión (E.p.C.) para presentar una propuesta de estrategia metodológica en la cual se buscaba fortalecer la comprensión que los estudiantes tenían acerca de la letra y sus significados en los procesos de factorización.

Para contextualizar la problemática, se hizo un análisis de la población objeto de estudio de este proyecto, vista desde una mirada local, pasando luego por la institucional y terminando con la descripción del aula. Otros insumos que también se tuvieron en cuenta partieron de los resultados de pruebas PISA 2012 nacionales y SABER PRO 2015 de la institución, así como de los resultados académicos de los estudiantes de grado octavo del Colegio en Matemáticas en el período 2015 una vez terminados los procesos de nivelación que en él se realizan. Cabe aclarar que, aunque en 2015

[1] En este trabajo se incluyen contextos propios de la matemática y otros de situaciones cotidianas o hipotéticas, cercanas a la realidad de los estudiantes.

se realizó la más reciente aplicación de las pruebas PISA, la OCDE, organización que lidera estas pruebas, anunció la publicación de resultados en diciembre de 2016.

Para iniciar el trabajo, se realizaron pruebas escritas que buscaban determinar cuál era la comprensión que dichos estudiantes tenían frente al papel que desempeña la letra en diferentes situaciones, tales como hallar perímetros que involucraban en sus valores expresiones algebraicas, así como hacer uso de una variable dentro de una expresión algebraica, para generalizar situaciones repetitivas, es decir, evaluar el estado inicial de los estudiantes y con estos resultados poder plantear una propuesta de unidad didáctica a la luz del modelo de Enseñanza para la Comprensión en la que se incluyeran actividades que posibilitaran la comprensión que al respecto de la variable se pudiera dar, incluyendo además ejercicios que requerían de la factorización en los cuales se buscaba reflejar la adquisición y uso de sus procesos, así como el papel que en este ámbito desempeña la letra.

Con la intervención se buscaba determinar el avance conceptual y procedimental que los estudiantes mostraban para determinar aciertos y falencias de la propuesta y así poder reformularla para utilizarla a futuro en grupos de estudiantes que reflejen esta misma problemática.

También se buscaba realizar cambios significativos en las prácticas realizadas habitualmente por el docente investigador, pretendiendo entonces enriquecerlas a partir de la documentación teórica, tanto desde el campo propio del álgebra, como desde los avances en el campo de la didáctica de la matemática, con miras a consolidar una propuesta innovadora que posibilite mejorar sus experiencias de aula, las cuales se reflejarían en mayores grados de motivación, conceptualización y operatividad, tanto en los estudiantes, como en el mismo docente.

CAPÍTULO UNO

1. Planteamiento del problema

1.1. Descripción del problema de investigación.

Diferentes investigadores han mostrado que los estudiantes afrontan problemas en la interpretación de la variable como número generalizado; por ejemplo Socas (1997, como se cita en Kieran, 2011) señala desde una postura histórico-epistemológica la necesidad de establecer distinción entre: usar letras para representar incógnitas en resolución de ecuaciones, usarlas para representar datos en los que se expresen soluciones generales y usar letras como herramienta para proveer reglas que expresen las relaciones numéricas que hayan surgido del lenguaje algebraico en momentos históricos diferentes, donde se denota como un sistema simbólico las cuales son utilizadas estructuralmente como objetos. Con este análisis concluye que "el estudio del Álgebra escolar puede ser interpretado como una serie de adaptaciones proceso-objeto (por ejemplo, procedimental – estructural) que los estudiantes deben asumir para llegar a comprender el aspecto estructural del Álgebra".

Por otra parte, Filloy y Kieran (1988) hacen una mirada del aprendizaje del Álgebra escolar, desde una perspectiva psicológica; Bosch, Gascón y Ruiz (2015) hacen un estudio del mismo tema pero desde una mirada antropológica; los dos estudios coinciden en identificar como un problema frecuente en la formación inicial del álgebra, la dificultad que se evidencia en los estudiantes ante la comprensión de la igualdad por tener el significado de ésta desde la Aritmética la cual exige un resultado, por ejemplo al totalizar una suma o una multiplicación, entre otros; sumado a esto se presenta la dificultad que muestran para operar la variable debido a la poca comprensión sobre sus significados, vista como número específico o número generalizado.

De otra parte, el informe PISA 2012, revela además que los promedios en Latinoamérica se encuentran por debajo del estándar promedio de la OCDE siendo de 494 para comprensión en matemáticas frente al puntaje máximo obtenido por Shanghái de 600 puntos. A continuación, se presentan los resultados de algunos países latinoamericanos en los que se pueden ver los bajos desempeños tanto en la posición ocupada como en la prueba de Matemáticas.

Tabla No 1. Posición y Resultados en matemáticas de pruebas PISA 2012 en Latinoamérica

	MATEMÁTICAS	
PAÍS		
Chile	51	423
México	53	413
Uruguay	55	409
Costa Rica	56	407
Brasil	58	391
Argentina	58	388
Colombia	62	376
Perú	65	368

Fuente OECD, PISA 2013

Para el caso de Colombia y haciendo uso de la información de los resultados de las pruebas PISA para 2012, el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES, 2103) revela que:

En Matemáticas, el 74% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2 y el 18%, en el nivel 2. Esto quiere decir que sólo dos de cada diez estudiantes pueden hacer interpretaciones literales de los resultados de problemas matemáticos; además, emplean algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas de números enteros, e interpretan y reconocen situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. En contraste, apenas 3 de cada mil alcanzaron los niveles 5 y 6. Quienes están en estos niveles tienen pensamiento y razonamiento matemático avanzados: pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas; conceptúan, generalizan y utilizan información; aplican conocimientos en contextos poco estandarizados; reflexionan sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos. (p. 8)

1.1.1. Análisis de resultados en pruebas PISA según niveles de solución en matemáticas.

Para interpretar estos resultados, se presentan los niveles de clasificación que para el área de Matemáticas hace la OCDE (2009), tales niveles son:

Tabla No 2. Niveles de clasificación en matemáticas de acuerdo con pruebas PISA 2009

Nivel	Acciones que realizan:
Nivel 6 (más de 668 puntos)	Los estudiantes que alcanzan este nivel son capaces de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en su elaboración de modelos para resolver problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información. Demuestran pensamiento y razonamiento avanzado. Pueden aplicar sus conocimientos y destrezas en matemáticas para enfrentar situaciones novedosas. Pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones.
Nivel 5 (de 607 a 668 puntos)	En este nivel los estudiantes pueden desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas complejos relacionados con estos modelos. Pueden trabajar de manera estratégica al usar ampliamente habilidades de razonamiento bien desarrolladas, representaciones de asociación y caracterizaciones simbólicas.
Nivel 4 (de 545 a 606 puntos)	Los estudiantes son capaces de trabajar efectivamente con modelos explícitos para situaciones complejas concretas. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo símbolos y asociándolos directamente a situaciones del mundo real. Pueden usar habilidades bien desarrolladas y razonar flexiblemente con cierta comprensión en estos contextos. Pueden construir y comunicar explicaciones y argumentos.
Nivel 3 (de 483 a 544 puntos)	Quienes se sitúan en este nivel son capaces de ejecutar procedimientos descritos claramente, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias simples de solución de problemas. Pueden interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, así como razonar directamente a partir de ellas. Pueden generar comunicaciones breves para reportar sus interpretaciones.
Nivel 2 (de 421 a 482 puntos)	En el segundo nivel los alumnos pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren únicamente de inferencias directas. Pueden extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo tipo de representación. Pueden emplear algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos básicos. Son capaces de hacer interpretaciones literales de los resultados.
Nivel 1 (de 358 a 420 puntos)	Los estudiantes son capaces de contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y todas las preguntas estén claramente definidas. Son capaces de identificar información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a cabo acciones que sean obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo.

Creación propia a partir de los niveles de clasificación en las pruebas Pisa. OCDE (2009)

Los estudiantes que están por debajo del nivel 1, con menos de 358 puntos, no son capaces de realizar las tareas más elementales que pide PISA, es decir, las suficientes para acceder a estudios superiores y para las actividades que exige la vida en la sociedad del conocimiento.

No se puede desconocer que el nivel en Latinoamérica y para este caso en Colombia es realmente preocupante el ver cómo estos resultados no se alejan de la realidad de nuestras aulas.

Así, por ejemplo, el álgebra escolar busca generalizar modelos numéricos, pero al encontrarse los estudiantes en el nivel 2, se puede reconocer que no han desarrollado esta destreza quedándose con interpretaciones directas y atribuyendo sólo un significado al papel que desempeña la letra como variable, mostrando una comprensión literal del resultado y utilizando los algoritmos que pueden presentarse durante la factorización en un nivel muy básico. Para el caso de los estudiantes del Colegio San Francisco, estos resultados al contrastarse con los resultados internos, tanto en pruebas Saber 11 de 2015, como en la evaluación interna para grado octavo, coinciden al identificar que son bajos los resultados, siendo claro que de acuerdo con el MEN y el ICFES (2013), las primeras se centran en:

> Capacidad de comprender y producir representaciones de información cuantitativa y objetos matemáticos en términos numéricos, gráficos, diagramas y esquemas.
>
> Diseño y ejecución de estrategias para el análisis o resolución de problemas que involucren información cuantitativa y objetos matemáticos.
>
> Modelación de forma abstracta situaciones reales, escoger y realizar procedimientos.
>
> Capacidad de justificar afirmaciones a partir de las propiedades matemáticas o de la conceptualización de un modelo o un procedimiento. (p. 42).

1.1.2. Contraste entre pruebas PISA 2009 y pruebas SABER 11 2009.

Un estudio realizado por Galvis, Ramírez y Silva (2009) quienes se basaron en los resultados de las pruebas SABER 11 2009 del segundo semestre, específicamente para las áreas de Matemáticas, encontraron que los estudiantes de colegios privados presentan mejores resultados con respecto a los públicos; afirman que los niveles socio económicos influyen parcialmente en los resultados, así como la formación académica de los padres, el estrato en que viven, el tiempo de permanencia en el colegio, es decir, lo extensa de la jornada; el carácter del colegio, si es técnico, académico o de otra modalidad, la edad de los estudiantes, la cantidad de estudiantes por aula, entendida como hacinamiento y algunas condiciones de la vivienda como el contar con computador en casa, con internet, televisión, entre otras. Estas apreciaciones son corroboradas recientemente por Barrera, Maldonado y Rodríguez (2012) quienes encuentran que:

> La gran mayoría de los estudiantes colombianos que participaron en PISA 2009 obtuvieron por debajo del nivel de competencia 2. Este resultado muestra que la inversión en educación y el cambio en la forma en que se está ofreciendo la educación en Colombia son temas urgentes. De acuerdo con PISA una proporción muy alta de los jóvenes escolarizados que tienen 15 años en Colombia carece de conocimientos y competencias básicas para desenvolverse en una sociedad moderna. Son jóvenes que no están en capacidad de entender un texto (47%), no son capaces de tomar resultados científicos simples y relacionarlos con su cotidianidad (55%) y que no son capaces de hacer inferencias simples a partir de resultados matemáticos (71%)". (p. 7)

1.1.3. Relación entre pruebas PISA 2009, SABER 11 2009 y el Colegio San Francisco I.E.D

El Colegio san Francisco I.E.D. coincide parcialmente con la caracterización por ser una entidad de carácter público que ofrece formación académica, cuenta con cursos promedio de 40 estudiantes pertenecientes a niveles socio económicos ubicados en estratos 1 y 2, contando con alguna población víctima de violencia y desplazamiento, tienen núcleos familiares diversos, en muchos casos uniparentales con un nivel básico de educación, pocas condiciones de estudio en la vivienda, contando además con alto porcentaje de estudiantes extra edad y que sumado a las pocas condiciones y recursos con que cuenta la institución, se convierten en la motivación para hacer el presente estudio.

Es pertinente, haciendo uso de este análisis, reconocer que al coincidir esta población con la de la problemática descrita resulta válido plantear estrategias que disminuyan esta brecha social a partir, en este caso, del acercamiento de los estudiantes al significado de la letra como variable, para fortalecer las capacidades de comprensión, producción, diseño, ejecución y justificación de la información cuantitativa y de objetos matemáticos en modelos y representaciones dadas que redunden en la efectividad al solucionar problemas del ámbito algebraico.

Los resultados de las pruebas SABER 11 2015 se evidencian en la siguiente tabla: Tabla No 3. Resultado pruebas SABER 11 2015 Colegio San Francisco I.E.D., Jornada tarde

RANGO	**MATEMÁTICAS**	**RAZONAMIENTO CUANTITATIVO**
(40 O MENOS)	15	10
(41 – 45)	14	15
(46 - 50)	12	12
(51- 55)	11	12
(56 – 60)	13	7
(61 – 65)	2	9
(66 – 70)	5	6
(71 O MÁS)	2	3
TOTAL	74	74

Fuente: Datos agrupados de acuerdo con los resultados publicados por el ICFES 2015

En total 74 estudiantes de esta institución presentaron la prueba, obteniendo promedio en Matemáticas de 48,73 y en razonamiento cuantitativo de 50,07 frente al promedio nacional en Matemáticas de 48,79 y en razonamiento cuantitativo de 49,67. Es pertinente resaltar que en estas pruebas se evalúa la competencia matemática relacionada con el uso flexible y comprensivo del conocimiento matemático escolar en contextos variados tanto desde el campo propio de la matemática, como en su relación con otras ciencias, así se hace referencia a los componentes y competencias presentadas en los lineamientos curriculares.

Los componentes evaluados y de los cuales se hace alusión en esta investigación son:

- El numérico-variacional que se refiere al significado de número y sus diferentes usos, al manejo de sistemas de numeración y su operatividad, propiedades y relaciones que entre ellos se establecen, así como al reconocimiento de regularidades y patrones, a la identificación de variables y al concepto de función principalmente.
- El geométrico-métrico que se relaciona con la comprensión y manipulación de objetos bidimensionales y tridimensionales con sus características, relaciones y transformaciones. De igual forma se evalúa la comprensión del espacio mediante la observación de patrones y regularidades, además problemas de medición a partir de patrones de medida determinados.

Así mismo, las competencias valoradas son:

- Comunicación y representación en donde se evalúa la capacidad para identificar la coherencia de una idea respecto a los conceptos matemáticos pertinentes para representarlos y establecer relaciones a partir de tablas, gráficas u otras representaciones simbólicas que provienen del lenguaje natural.

- Razonamiento y argumentación que se refieren a la identificación y uso de estrategias para solucionar problemas, así como la formulación de hipótesis y conjeturas a partir de ejemplos y contraejemplos que permiten la deducción de generalizaciones y establecimiento de propiedades.
- Solución de problemas y modelación en la cual se busca plantear y resolver problemas a partir de contextos variados, haciendo traducción de la realidad a lenguajes matemáticos para verificar e interpretar resultados que den lugar a la solución de nuevas situaciones.

Los anteriores resultados revelan el deficiente desempeño en Matemáticas de la Institución en cuanto a los componentes y competencias a que se hace referencia desde el ICFES. En el caso específico de Álgebra los resultados académicos de finalización del año 2015 tuvieron los siguientes resultados para grado octavo:

Tabla No 4. Valoración final en Matemáticas de grado octavo 2015 del Colegio San Francisco I.E.D. de acuerdo con la escala nacional

No de estudiantes matriculados	146	100%
No de estudiantes con desempeño alto o superior	25	17,1%
No de estudiantes con desempeño básico	61	41,7%
No de estudiantes con desempeño bajo	48	32,9%
No de estudiantes retirados	12	8,2%

Fuente: Adaptación de sábana final de notas según el S.I.E institucional a la escala nacional

Así, tan solo el 10% de estudiantes alcanzan altos desempeños en las pruebas SABER 11 y 17% en los procesos de evaluación interna, predominando los niveles básicos y con altos porcentajes de reprobación.

Los resultados de las pruebas PISA Y SABER 11, así como los resultados finales de aprobación y reprobación 2015 posiblemente ratifican las apreciaciones de Silva, Galvis y Ramírez (2009) y de Barrera, Maldonado y Rodríguez (2012), desde donde se puede reconocer que estos factores afectan el desempeño académico de los estudiantes seleccionados para este estudio.

En el Colegio San Francisco I.E.D., los estudiantes de grado octavo, desde 2001 hasta 2016 han evidenciado poca comprensión en álgebra durante los procesos de factorización trayendo consigo bajo desempeño en la asignatura en tareas del momento y futuras, llevándolos a dejar de lado su uso en situaciones que permitan su modelación.

De este modo, debido al bajo desempeño que presentan los estudiantes del Colegio San Francisco I.E.D. del grado octavo en la asignatura de Álgebra, se busca determinar si esta situación se presenta porque se les dificulta:

- Transformar y representar algebraicamente información a partir de problemas.
- Realizar operaciones.
- Organizar y reproducir la información obtenida luego de realizar operaciones.
- Interpretar y comunicar los resultados de acuerdo con el planteamiento del problema.
- Hacer el uso correspondiente de la variable, dadas sus diversas interpretaciones, bien sea como incógnita, como constante, como número general, como relación entre variable independiente dado el valor de una dependiente, como número general y como incógnita, entre otros significados y usos a que hacen alusión Ursini y Trigueros (2006)

Teniendo en cuenta la problemática anteriormente descrita, se crea la necesidad de ofrecer una alternativa que posibilite la comprensión en los significados de los polinomios y de la variable durante los procesos de factorización, de tal manera que, como lo afirman Godino, Batanero y

Font (2007), el profesor consolide saberes y genere instrucciones que al ser organizadas permitan prever conflictos de significados y brinden distintas posibilidades de institucionalización de conocimientos matemáticos implicados que presente el estudiante en la interacción con objetos matemáticos. Lo anterior justifica la siguiente pregunta de investigación:

1.2. Pregunta de investigación

¿Cómo promover en los estudiantes del Colegio San Francisco I.E.D. del curso 903 jornada tarde la comprensión del significado de polinomio y de las transformaciones y operaciones que presentan cada uno de sus elementos, principalmente de la letra al realizar procesos de factorización?

Para dar respuesta a la anterior pregunta se presentan los siguientes objetivos:

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Implementar y evaluar una estrategia didáctica con estudiantes del curso 903 del año 2016, sustentada en el marco de Enseñanza para la Comprensión para promover la mejoría en la comprensión de polinomios, de los elementos que lo conforman y de sus estructuras en procesos de factorización

1.3.2. Objetivos Específicos

1. Identificar posibles significados que atribuyen los estudiantes a un polinomio y a sus elementos, para determinar si éstos son correctos o si se requiere orientarlos para que su comprensión sea pertinente y así posibilitar su efectividad en los procesos de factorización.

2. Diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica construida desde el marco de Enseñanza para la Comprensión, centrada en estrategias de tipo geométrico y numérico que brinde herramientas a los estudiantes para comprender el significado de la letra como número generalizado, de polinomio y de los elementos que lo conforman, a la vez que permita reconocer cambios conceptuales evidenciados durante los procesos de factorización.

3. Establecer cambios en la práctica del docente como resultado de la reflexión y la evaluación al aplicar la propuesta realizada durante el proceso de investigación.

1.4. Justificación

Las investigaciones abordadas desde la enseñanza de las matemáticas y más puntualmente desde el álgebra escolar, han presentado variedad de estrategias metodológicas y didácticas en busca de mejorar la comprensión que tienen los estudiantes de diferentes objetos matemáticos. De igual manera, el Ministerio de Educación Nacional MEN, ha planteado los alcances a que se pretende llegar con el álgebra escolar, desde los lineamientos curriculares, así, se resalta qué:

> Se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos estos

desarrollos propios del pensamiento variacional. (MEN, 1998) p.17

La presente información permitirá indagar las causas que llevan al estudiante a tal situación a partir de la observación de comportamientos durante la realización de actividades enmarcadas en la significación que toman los polinomios durante la factorización, y más específicamente de la variable y así poder detectar posibles errores de interpretación.

De ser esto posible traería varios beneficios:

A los estudiantes y como consecuencia a la institución, porque, de haber logrado los alcances esperados ayudaría a mejorar la comprensión que presentan en los significados de los procesos algebraicos, los cuales posiblemente se reflejarían en las experiencias académicas futuras que involucren estos procesos, elevando así los índices de aprobación y el sentido que los estudiantes puedan darle a la Matemática en su vida cotidiana presente y futura, buscando acercarlos más a la formación académica superior, alcanzando así uno de los objetivos que desde la institución se buscan.

A mis prácticas pedagógicas porque luego de hacer una reflexión exhaustiva de aciertos, desaciertos y dificultades durante el proceso, me brindaría herramientas asociadas a los conocimientos previos, concepciones y acciones realizadas en el aula para presentar los temas de factorización de una manera más natural y con mayor seguridad pues habré podido evaluar el impacto de la estrategia y determinar si la propuesta eleva los niveles esperados de comprensión, mejorando así mis prácticas de aula, a la vez que me motivaría a proponer estrategias innovadoras para abordar otras temáticas también desde el campo de la Matemática.

A la Educación Matemática en general porque ofrecería una alternativa metodológica que pueda ser utilizada por otros docentes que al igual que yo buscan estrategias metodológicas diferentes que brinden a sus estudiantes la posibilidad de comprender con mayor efectividad los procesos de factorización que para el caso se ofrece desde la Enseñanza para la Comprensión.

1.5. Descripción de la propuesta.

Desde esta propuesta de intervención algebraica, se incluyen como estrategia actividades encaminadas a que los estudiantes exploren desde el campo numérico o geométrico algunas posibilidades de “descubrir” fórmulas o algoritmos presentes en la factorización a partir de situaciones puntuales y repetitivas que después de la constante verificación, los lleve a identificar parones y a realizar procesos de generalización.

Al incluir en álgebra actividades desde el campo de la aritmética, es viable acercar a los estudiantes a procesos de generalización ya que como afirman Godino, Batanero y Font (2000), es importante reconocer que:

Gran parte de la actividad matemática puede ser descrita como procesos de modelización, en el que interpretemos de forma abstracta, simplificada e idealizada un objeto, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. La construcción de modelos matemáticos, su comparación con la realidad, y su perfeccionamiento progresivo intervienen en cada fase de la resolución de problemas matemáticos, no sólo relacionados con situaciones prácticas, sino también en el proceso de desarrollo teórico. Este proceso seguiría las cinco fases siguientes:

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con el modelo

5. Interpretación de resultados en la realidad

El propósito de construir un modelo es obtener una mejor comprensión de una parte de nuestro universo y, así, poder predecirla y si es posible controlarla. Un modelo no es "real", ni tampoco "verdadero", en el mejor de los casos es consistente y concordante con las observaciones. Esto se olvida con facilidad y se suele confundir "modelo" y "realidad".

> Por otro lado, todos los pasos 1 a 5 son igualmente importantes en la actividad de modelización. Sin embargo, en la clase de matemáticas, con frecuencia nos apresuramos a correr a los pasos 3 y 4 (las "verdades" matemáticas) con lo que se impide al alumno apreciar la relación entre matemáticas y realidad, así como la aplicabilidad y limitaciones de las matemáticas, (Godino et al.,2000, p. 136 – 137)

De igual manera se involucran en la propuesta actividades desde el campo de la Geometría, principalmente teniendo en cuenta que: "la construcción de figuras, promueven la anticipación de los alumnos, y permiten el establecimiento de relaciones entre distintos elementos de las figuras" (Cappelleti y García, 2007)

Afirma también Cappelleti y García (2007) que

> Es necesaria, entonces, una reflexión sobre el papel del registro figurativo en el trabajo geométrico: las representaciones gráficas, o sea los dibujos sobre el papel, constituyen una "parada intermedia" entre los objetos teóricos y los objetos reales. La representación gráfica de una figura puede constituirse en una herramienta poderosa para la resolución de un problema. En particular, juega un papel importante en el proceso de elaboración de una demostración. Al decir esto les asignamos a los dibujos el papel de representación de los objetos geométricos, y reservamos para la enseñanza lograr que los alumnos comprendan la diferencia entre el objeto y su representación. (Cappelleti y García, 2007, p. 12)

Teniendo en cuenta que en la institución se está implementando E.p.C. como marco de referencia que orienta los procesos de enseñanza y aprendizaje, se han establecido unos criterios valorativos los cuales se encuentran en construcción y se pretenden evidenciar mediante el diseño de una rúbrica por ciclo, la cual permita determinar en qué nivel de desempeño se encuentra cada estudiante y para dar cumplimiento a esta intención, desde este trabajo de investigación se presenta la siguiente propuesta:

Tabla No 5. Rúbrica de valoración propuesta para ciclo IV del Colegio San Francisco I.E.D.

CRITERIO POR DIMENSIÓN	DESEMPEÑO BAJO	DESEMPEÑO BÁSICO	DESEMPEÑO ALTO	DESEMPEÑO SUPERIOR
SOCIO-AFECTIVA	- Muestra poca disposición por el trabajo de clase. - Poco cumple con las asignaciones académicas extraclase. - Evidencia con su mal comportamiento desinterés por el buen desarrollo de la clase. - Falta a clases constantemente. - Incumple con los parámetros convivenciales establecidos.	- Su disposición hacia las actividades de clase en ocasiones es inadecuada. - En ocasiones incumple con las actividades extraclase. - En ocasiones indispone el buen desarrollo de la clase con su comportamiento. - Presenta continuas inasistencias. - En ocasiones incumple con los acuerdos convivenciales.	- Evidencia disposición hacia las actividades de clase. - Habitualmente cumple con las asignaciones extraclase. - Mantiene buen comportamiento durante el desarrollo de las clases. - Cuando falta a clase presenta las debidas justificaciones. - cumple con los acuerdos convivenciales establecidos.	- Evidencia disposición hacia las actividades de clase. - Habitualmente cumple con las asignaciones extraclase. - Mantiene buen comportamiento durante el desarrollo de las clases. - Cuando falta a clase presenta las debidas justificaciones. - cumple con los acuerdos convivenciales establecidos.
COGNITIVA	- Sus preconceptos son limitados y evita hacer transformaciones a aquellos que son errados.	- Evidencia preconceptos errados y se le dificulta modificarlos.	- Tiene preconceptos bien fundamentados o al tenerlos errados es abierto a transformarlos.	- Tiene preconceptos bien fundamentados o al tenerlos errados es abierto a transformarlos.

CRITERIO POR DIMENSIÓN	DESEMPEÑO BAJO	DESEMPEÑO BÁSICO	DESEMPEÑO ALTO	DESEMPEÑO SUPERIOR
COGNITIVA	- Evidencia falta de comprensión frente a las temáticas abordadas. - Evidencia falta de formalización de procesos matemáticos. - Se le dificulta aplicar los procesos matemáticos abordados en la solución de problemas. - Evidencia continuos errores en la utilización de procedimientos propios de los temas abordados.	- La comprensión de las temáticas abordadas es limitada, mostrando continuas falencias. - Se le dificulta formalizar algunos procesos matemáticos. - Muestra dificultad para aplicar algunos procesos matemáticos abordados en la solución de problemas. - Se le dificulta utilizar adecuadamente algunos procesos abordados.	- Evidencia comprensión en la mayoría de temáticas abordadas. - Formaliza la mayoría de procesos matemáticos. - Aplica los conocimientos matemáticos adquiridos para dar solución a problemas que permiten su uso. - Utiliza adecuadamente y con destreza los procesos abordados en la clase.	- Evidencia comprensión en las temáticas abordadas. - Formaliza los procesos matemáticos. - Aplica los conocimientos matemáticos adquiridos para dar solución a problemas que permiten su uso. - Utiliza adecuadamente y con destreza los procesos abordados en la clase.
EXPRESIVA	- Se le dificulta expresar verbalmente y por escrito los procesos seguidos utilizando el lenguaje matemático o natural apropiado. - Los argumentos utilizados para explicar sus procesos son muy limitados o no los realiza. - Se le dificulta plantear problemas relacionados con las temáticas abordadas. - No presenta el proyecto de síntesis.	- Se le dificulta expresar verbalmente y por escrito algunos procesos seguidos utilizando el lenguaje matemático o natural apropiado. - Muestra dificultad para argumentar algunos procesos matemáticos seguidos. - Plantea problemas muy superficiales referentes a las temáticas abordadas. - Presenta un proyecto de síntesis con muchas falencias.	- Expresa adecuadamente con lenguaje natural los procesos seguidos en la solución de problemas. - Argumenta con gran claridad los procesos matemáticos seguidos. - Plantea problemas interesantes acordes con las temáticas abordadas. - Presenta el proyecto de síntesis con los parámetros establecidos.	- Expresa adecuadamente con lenguaje natural y matemático los procesos seguidos en la solución de problemas. - Argumenta con gran claridad los procesos matemáticos seguidos. - Plantea problemas interesantes acordes con las temáticas abordadas. - Presenta el proyecto síntesis con los parámetros establecidos y se destaca por su puntualidad, presentación y calidad.

CAPÍTULO DOS

2. Marco Teórico

2.1.Antecedentes del problema de investigación

Son variados los estudios que se han realizado en cuanto a los problemas que se presentan en los estudiantes respecto a los procesos algebraicos, así, por ejemplo, Collis plantea:

> que la capacidad para trabajar con letras dependía de lo que los estudiantes consideran como real. En el estadio de generalización concreta o formal temprano, los estudiantes tenían un concepto de número generalizado, en que una letra tenía una entidad propia y atribuían las mismas propiedades que a cualquier número, sólo en el último estadio (de operaciones formales, de 16 años en adelante), podían contemplar la letra como variable. Collis (1975, como se cita en Gavilán 2011, p. 73).

Quintero, Ruiz y Terán (2005), a través de una investigación que parte de la observación de clases de álgebra con estudiantes de grado octavo en Venezuela, detectaron que dentro de los errores presentados resulta la forma como desde las aulas se introducen los temas y el desapego que se tiende a generar en cuanto a la semiótica descrita por Socas referente en este caso a los polinomios y a diferentes interpretaciones que se dan a sus elementos, específicamente a la variable y sus posibles significados. Teniendo en cuenta que estos elementos hacen parte de los objetos de estudio de esta propuesta, se convierten en un gran insumo para evitar dichos errores durante su diseño e implementación.

En un sentido similar se expresan Wagner, Vásquez, Hoyos y Gutiérrez (2014), quienes abordan el tema centrándose en una propuesta didáctica que inicia en la enseñanza del Álgebra escolar, partiendo de la factorización. Reconocen que entre los retos de la Educación Matemática está el buscar nuevas estrategias que faciliten la comprensión de conceptos matemáticos, presentando una propuesta en la geometrización del Álgebra, siendo esta una alternativa "dinámica e interactiva" a través de cuadrados y rectángulos vistos como objetos concretos que permiten la dinamización de los contenidos que, al ser manipulables, al igual que un software denominado Geometría de Polinomios, propician en el estudiante la adquisición de aprendizajes significativos, de tal suerte que luego de implementar su estrategia y haciendo comparación entre resultados relacionados con factorización previos a la propuesta y posteriores a la misma, así como el análisis de comportamientos y resultados entre un grupo de control y uno experimental, logran concluir que una estrategia didáctica de esta naturaleza, incrementa en los estudiantes el interés y la disposición hacia el aprendizaje por alcanzar un mayor nivel de comprensión, en cuanto a conceptos matemáticos y desarrollo de habilidades intelectuales superiores. De esta manera, con mi propuesta se pretende establecer cambios conceptuales, procedimentales y actitudinales que en lo posible arrojen resultados positivos como los obtenidos por Wagner et al. (2014).

Otro aspecto a considerar al analizar las dificultades en el aprendizaje del álgebra es el relacionado con la simbología matemática. Sobre este articular Socas (2007) señala que las dificultades de su enseñanza y aprendizaje radican en la errada utilización de los símbolos algebraicos que no permiten una acertada comunicación por desconocer o mal interpretar sus modos de producción, funcionamiento y recepción, es decir, de su significado, presentándose así errores en la comprensión de la naturaleza del objeto matemático, en el objetivo de la actividad y en la naturaleza de la respuesta que en muchos casos es originado por la falta de comprensión desde la Aritmética, trayendo consigo el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento, de transición y falsas generalizaciones sobre operadores o números.

Una vez reconocidos los problemas anteriormente mencionados desde la teoría y en contraste con el bajo rendimiento académico de los estudiantes que, durante 15 años de práctica en la institución he podido constatar, surge la necesidad de identificar posibles causas para buscar estrategias de solución, encaminadas a que los estudiantes adquieran el significado de los elementos que conforman el polinomio durante los procesos de factorización, los transformen y estén en capacidad de comunicar los cambios realizados, involucrando actividades innovadoras y que resulten motivadoras a la vez que construyen conocimiento

2.2.Revisión bibliográfica

Para poder determinar la comprensión que los estudiantes tienen de los polinomios en los procesos de factorización, así como del significado que desde allí toma la variable con miras a aumentar dicha comprensión, haciendo uso del marco de Enseñanza para la Comprensión, se hace necesario revisar los aportes que desde diferentes estudios se han realizado acerca de la pertinencia de aplicar este marco, así como de aportes realizados desde la didáctica de la matemática en cuanto a polinomios y factorización se refiere, a estudios de significado que se hayan hecho de los mismos desde la semiótica y a algunos hallazgos que desde diferentes autores se revelen en cuanto a sus dificultades y obstáculos de planeación y aplicación.

2.2.1. Algunas miradas al significado de comprender.

2.2.1.1.Comprender desde Enseñanza para la Comprensión.

En primer lugar, se hace una mirada al marco de Enseñanza para la Comprensión (E.p.C), desde donde Perkins y Blythe, como miembros del proyecto zero (como se cita en Stone, 1999), tienen como punto principal de investigación priorizar la comprensión como marco de su trabajo, partiendo de la siguiente premisa:

> El conocimiento, la habilidad y la comprensión son el material que se intercambia en educación. La mayoría de docentes muestran un fuerte compromiso con los tres. Todos quieren que los alumnos egresen de la escolaridad o concluyan otras experiencias de aprendizaje con un buen repertorio de conocimientos, habilidades bien desarrolladas y una comprensión del sentido, la significación y el uso de lo que han estudiado. De manera que vale la pena preguntarse qué concepción del conocimiento, de la habilidad y de la comprensión asegura que lo que ocurre en el aula entre docentes y alumnos fomente estos logros. Perkins (como se cita en Stone, 1999) p. 4.

Así, en su estudio, Perkins (como se cita en Stone, 1999), plantea que “comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe”, o, dicho de otra forma, “es la capacidad de desempeño flexible con énfasis en la flexibilidad”.

2.2.1.2.*Comprender en relación con la Educación Matemática.*

Para Sierpinska (1994), existen diferentes interpretaciones de comprensión, por un lado “comprender un problema” es encontrar un patrón y percibir una similitud entre este problema y otros abordados en clase, requiriendo entonces de un procedimiento análogo para su solución, lo cual implicará una generalización del problema, así mismo habla de la “comprensión de un concepto”, entendiendo éste como un objeto ya definido en relación con otros conceptos determinados en diferentes situaciones, por lo tanto la comprensión consistirá en el análisis de esta definición, significando entonces que dicha comprensión está dada por su esencia o sus características más predominantes, así, comprender el concepto implica entender por qué se produce este fenómeno y poder darle solución con éxito. Comprender el fenómeno significa buscar las premisas, razones o causas que lo definen. Esta significación de comprensión, junto con la propuesta por Perkins serán las que orientarán el desarrollo de este trabajo de investigación.

2.2.2. Investigaciones relacionadas con la Educación Matemática.

2.2.2.1.Propuesta de intervención en matemáticas desde el marco de E.P.C.

Para esta investigación, se hace necesario observar experiencias recientes que tomen el marco de E.p.C., para abordar la enseñanza del álgebra escolar, así, se parte de un estudio apoyado en este proyecto, desde donde Pérez y Pekolj (2009), con un grupo de docentes de Matemáticas asesorados por Cerizola en la Universidad de San Luis de Argentina, reciben una cátedra denominada "Didáctica y Práctica docente de Matemática", allí implementan algunas actividades didácticas bajo la modalidad de aula virtual, las cuales les permiten reconocer la pertinencia de utilizar el marco de E.p.C. como alternativa de uso en la planeación de actividades de aula, obteniendo las siguientes conclusiones:

Un primer planteamiento práctico les permitió identificar que al utilizar el proyecto E.p.C., los estudiantes comprendieron que el significado de una letra dentro de una expresión algebraica puede variar dependiendo de ciertas condiciones y reglas establecidas, para finalmente comprender un significado de variable. Cabe resaltar que esta conclusión se relaciona con uno de los objetivos de la presente investigación en el que se busca que el estudiante identifique un significado de la variable, en el caso como número generalizado.

En un segundo ejercicio más teórico, Pérez y Pekolj (2009) parten del juego de dinamismo racional llamado torres de Hanoi como tópico generativo ; a partir de él se mostró el tratamiento geométrico orientado hacia la comprensión de su enunciado y la posibilidad de reconocimiento y aplicación en la fundamentación de afirmaciones y razonamientos, así como en la resolución de ejercicios y problemas tanto del campo matemático, específicamente en álgebra, como de otros que ajenos a este, permitieran una modelación semejante, encontrando que los estudiantes llegaron a la solución del problema, mostrando así que al partir desde un tópico generativo, como parte del marco de E.p.C. es posible conseguir los objetivos planteados para la actividad.

2.2.2.2. Preguntas orientadoras para planear didácticas algebraicas.

Por su parte, Fandiño (2012), hace un estudio de la práctica del Álgebra escolar en el cual busca estrategias para intervenir y recuperar de manera teórica y práctica el quehacer docente. En su estudio pretende reconocer por qué los estudiantes no alcanzan los resultados esperados, planteando algunas preguntas que buscan encontrar las razones reales de esta problemática, las cuales orientan ampliamente este proyecto y brindarán herramientas teóricas para que desde la implementación de las unidades didácticas a diseñar, puedan en lo posible superar en gran medida esas "falencias" con el firme propósito de obtener respuestas exitosas que redunden en las prácticas de enseñanza de mi ejercicio docente. Dichas preguntas son:

> ¿En qué no alcanzó el resultado esperado?, ¿No entendió los conceptos?, ¿Los entiende, pero no sabe usarlos para resolver un problema?, ¿No sabe efectuar los cálculos? O ¿Sabe efectuarlos, pero no sabe la finalidad de estos?, ¿Construyó el concepto, pero no sabe comunicarlo?, ¿Resuelve un problema, pero no puede explicar el proceso que siguió para su resolución?, ¿No sabe gestionar los cambios de representación semiótica que la matemática exige? (Fandiño, 2012, p. 11).

Así, Fandiño encuentra en su investigación que

> La respuesta no correcta de los estudiantes puede tener como causa el fracaso en la adquisición de conceptos, en la incapacidad de gestión de los algoritmos, en la falta de buena estrategia en la resolución de un problema (un estudiante pudo haber elaborado el concepto, saber llevar a término un algoritmo, pero empantanarse frente a la resolución de un problema; todas situaciones por demás generalizadas), una no adecuada comunicación (es el caso del estudiante que sabe pero que no logra comunicar aquello que conoce) o una gestión no apropiada de los registros semióticos (tal vez el

> aspecto de mayor fracaso, especialmente en la escuela media y superior). Pueden ser tal vez dos o tres de estas las causas del fracaso en matemática, pero difícilmente se puede afirmar que sean todas las cinco contemporáneamente. (Fandiño, 2012, p. 11).

Para analizar estas dificultades presentes en los estudiantes, Fandiño propone algunas estrategias de intervención que apoyarían el trabajo desde la didáctica de la matemática, a saber:

Una formación semiótica, atendiendo a diferentes representaciones de los objetos matemáticos en representaciones variadas, los cuales se construyan autónomamente y fortalezcan procesos de argumentación, en la que se muestre que un objeto matemático puede tener diferentes interpretaciones, sin embargo, es necesario atender al uso excesivo de significados para evitar confusiones y pérdida de sentido, así como aclaraciones y acompañamiento para evitar el mal uso de objetos matemáticos.

Una formación algorítmica que no implica solamente la utilización mecánica de una fórmula o una modelación matemática, sino que se enmarca en una serie de procedimientos lógicos que obliguen a una reflexión crítica y analítica la cual no se presenta sólo en operaciones matemáticas sino en procesos generalizados de graficación geométrica o de cálculos realizados desde la antigüedad de forma creativa, entre otras.

Una formación estratégica que les permitan acudir a diferentes estrategias válidas, así como a plantear otros problemas acordes con las temáticas involucradas, principalmente teniendo en cuenta que los objetos de estudio de las matemáticas son abstractos pero posibilitan hacer planteamientos de soluciones análogas.

Una formación que propicie el manejo del lenguaje matemático en la cual el estudiante sepa comunicar sus procesos e interpretar información desde el lenguaje común, pero también desde el específico de la matemática y que permitan por ejemplo la demostración de la veracidad de una tesis. (p. 44-46)

2.2.3. La Semiótica de la Matemática

2.2.3.1. Algunos referentes semióticos del aprendizaje matemático.

Desde el campo de la semiótica, refiriéndose ésta a qué o cómo se da la conceptualización y la transición de los conceptos como instrumentos a los conceptos como objetos, también a la operación lingüística esencial en esta transformación, siendo entonces la apropiación consciente entre el referente, el significado y el significante, de acuerdo con lo presentado por Vergnaud (1990, como se cita en D´Amore, 2004, p.3), Socas (2007) resalta entre los errores de los estudiantes la "falta de comprensión por la naturaleza y significado de los símbolos", del objetivo de la actividad y de la naturaleza de las respuestas en Álgebra, así como la poca comprensión de la Aritmética, además del uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento, su transición y falsas generalizaciones sobre operadores o números.

Socas (2007) presenta el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), en él encuentra que para detectar, entender y actuar sobre las principales dificultades y errores que presentan los estudiantes en relación con la construcción del conocimiento algebraicos se requiere:

Distinguir entre la competencia del Modelo, descrita en Socas (2001), y la competencia del alumno, en este último caso entendida desde la perspectiva semiótica como la articulación coherente de diferentes registros de representación de un objeto algebraico, en los aspectos operacional, estructural y procesual. En este sentido se considera que los objetos del álgebra pueden ser representados bajo diferentes registros semióticos, aceptando que las operaciones de cambio entre ellos constituye una operación cognitiva básica, que permite analizar las dificultades, y errores conceptuales y de procedimiento, en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales, y que la naturaleza abstracta del lenguaje algebraico debe ser entendida como un proceso caracterizado por diferentes etapas, reflejadas en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, que se caracterizan como estadios semiótico, estructural y autónomo. (p. 48)

De este modo, Socas habla de los errores desde dos perspectivas:

- Los errores que tienen su origen en un obstáculo.

- Los errores que tienen su origen en una ausencia de significado; a esta último, se le asigna dos procedencias distintas, una relacionada con las dificultadas asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra. (p. 49)

Para esta investigación se presta principal atención al primer error, por lo tanto, se hace referencia a la siguiente afirmación también presentada por Socas (2007)

> Cuando el error se mira a niveles más profundos, es decir, se considera no sólo la estructura superficial del objeto sino también la estructura profunda, esta falta de generalidad podría evitarse, ya que, si se mira en los niveles de representación más profundos, en los que evoluciona un sistema de significados que controlan las realizaciones superficiales, cuando se detectan principios erróneos, en este nivel profundo, es posible no sólo explicar un caso, sino toda una clase de errores. (Socas, 2007, p. 49)

Desde esta perspectiva, la presente propuesta involucra situaciones modeladas desde el campo de la Geometría para ser relacionadas con generalizaciones evidenciadas algebraicamente, las cuales se requiere que sean verificadas.

2.2.3.2. Modelo ELOS como estrategia para identificar errores en el significado de polinomio y sus elementos.

Delgado (2011) hace una adaptación del modelo de competencia cognitivo ELOS para detectar dificultades que se presentan en los estudiantes al afrontarse al concepto de polinomio y sus diferentes elementos, para lo cual se centra en dos errores que Socas (1997) clasifica en tres estadios:

- Estadio semiótico, en este estadio el alumno aprende y usa los nuevos signos con los significados que le suministran los signos ya conocidos y manipulados por el alumno.

- Estadio estructural, en este estadio el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, se recurre entonces a la observación de regularidades y comportamientos de patrones para dotarlos de significado.

- Estadio autónomo, es aquel en el que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior. (p. 33)

Con estos referentes, Delgado se centra en dos estadios que se describen a continuación:

En el estadio semiótico afirma que:

Si el alumno presenta ausencia de errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, entonces diremos que la comprensión matemática del alumno se ubica en el estadio semiótico.

Así mismo, si el alumno presenta errores de procedimiento, entonces diremos que la comprensión matemática del alumno se ubica en el estadio semiótico. (p. 34)

Y para el estadio estructural afirma que:

"Si el alumno presenta ausencia de errores de procedimiento, entonces diremos que el alumno se ubica en el estadio estructural"

Ahora, atendiendo a los errores específicos de la comprensión de polinomios, la clasificación de resultados equívocos se centró en tres ejes:

En primer lugar, los errores que tienen su origen en un obstáculo, refiriéndose a la complejidad de los objetos matemáticos, tales como la necesidad de clausura y errores de concatenación.

Entre los errores de la necesidad de clausura se presentan casos como la expresión $12y + 2$ en la cual, al no tener un signo igual, los alumnos tienden a totalizarla como $14y$ desconociendo que en álgebra en los polinomios no se puede terminar el cálculo como en la aritmética lo cual hace que los alumnos cometa el error de decir $12y + 2 = 14y$

Y en cuanto a la concatenación, al deber sustituir por ejemplo la letra x por 2, en una expresión como 3x, ésta se cambia por 32, en lugar de obtener 6. Dicha dificultad se centra en los inicios del álgebra.

Y los errores que se presentan por ausencia de sentido que son de desarrollo semiótico están:

$\frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{1}{5+8}$ que lo extienden a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$ ó $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{1+1}{5+8}$ que lo extienden a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1+1}{x+y}$

También está:

$-(3+5)=-3+5$ que lo extienden a $-(a+b)=-a+b$ ó $6(x+y)=6x+y$

Estos entre otros errores tienen su origen en la aritmética.

En segundo lugar, los errores de procedimiento que se originan en el estadio estructural están relacionados en su mayoría con el uso de fórmulas o reglas de procedimientos que se originan en falsas generalizaciones sobre operadores que se justifican en la falta de linealidad de los operadores mencionados por Socas (como se cita en Delgado, 2011), así, por ejemplo, se generaliza la expresión $(x*y)^2=x^2*y^2$ y como $(x+y)^2=x^2+y^2$

Los anteriores errores los resume en la siguiente tabla:

Tabla No 6. Errores en la interpretación de polinomios

Eje	**Tipos de errores**
Eje 1. Errores que tienen su origen en un obstáculo	Errores de concatenación.
	Errores de necesidad de clausura.
Eje 2. Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética
	Errores de procedimiento.
	Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Fuente Delgado 2011

2.2.3.4. La dificultad en los registros semióticos y en la transferencia.

Partiendo del hallazgo de D´Amore, Fandiño, Iori y Matteuzzi (2013) en el que afirman que

> Un instrumento matemático, una vez consolidado, se hace objeto matemático de conocimiento e inicia, por tanto, una caracterización histórica que lo teoriza al interior de un sistema que tiene como representantes diversos estudiosos. Es esto lo que sucede con todos los instrumentos matemáticos, una vez que se convierten en objetos de la Matemática. (D´Amore, et al. 2013, p.179)

Se presenta entonces la siguiente paradoja, conocida como la paradoja cognitiva del pensamiento matemático presentada por Duval.

> (…) por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación sólo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¡cómo podrían ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas. Duval (1993 como se cita en D´Amore 2009, p. 153)

En su estudio, D´Amore (2009) encuentra que el problema no sólo es está en la semiótica, también encuentra que una gran dificultad se presenta al momento de hacer devoluciones, o procesos inversos entre los diferentes significados que puede tener un objeto matemático, así identifica que el estudiante al abordar un objeto matemático “está entrando en contacto sólo con una representación semiótica particular de ese objeto”.

Para D´Amore (2009), es necesario tener otras consideraciones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas y así poder orientar al profesor a hacer una intervención más enriquecedora en aula, en la cual tiene en cuenta los problemas abordados en las dos anteriores paradojas, así, afirma que: “(…) todo conocimiento –matemático, en particular- refleja al mismo tiempo una dimensión social y una personal, la escuela no es una excepción, sino incluso el lugar donde se institucionaliza esta doble naturaleza".

Es necesario entonces tener en cuenta que: "durante el aprendizaje de las matemáticas, se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico", así, "enseñar no consiste sólo en el intento de generalizar, amplificar, volver más crítico el "sentido común" de los estudiantes; se trata de una acción más bien compleja". (p. 156)

Desde esta perspectiva, Duval (1995, citado en D´Amore 2009), afirma que:

La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos de sus características "fuertes":

1. el uso de más registros de representación semiótica es típica del pensamiento humano.

2. la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo – histórico – de progreso del conocimiento.

Para cerrar este análisis, presento algunas de las conclusiones que el mismo D´Amore incluye en su escrito:

- Cada alumno aprende por su cuenta, y nadie puede aprender –o comprender- ¡en el lugar de otro! Además, el éxito de una acción didáctica no se juzga inmediatamente, sino solo algunos años más tarde: existen muchos casos de éxito inmediato que se revelan un fracaso después de un cierto tiempo.
- La construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos: a) de representar un registro dado. b) de tratar tales representaciones al interior de un mismo registro. c) de convertir tales representaciones de un dado registro a otro. (p. 158-159)

2.2.4. Operaciones fundamentales de la semiótica en la actividad matemática: conversión y tratamiento.

Duval, citado por Callejo (2006), hace una revisión a la didáctica de las matemáticas y resalta algunos estudios que desde este campo se han hecho, en los cuales se busca determinar qué tipos de problemas se les deben plantear a los estudiantes de tal forma que despierten su interés y favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos; de igual forma la manera como se debe presentar la secuencia de las actividades de clase; y la forma de organizar la progresión de los aprendizajes en el currículo. De este modo ha centrado su atención en tres aspectos relevantes para la actividad de la didáctica de las matemáticas; por un lado los "errores conceptuales" referentes a algunos de los conceptos introducidos, por otro lado a las producciones de los alumnos para resolver problemas y en tercer lugar el tipo de funcionamiento cognitivo que requiere la actividad y el pensamiento matemático, este último aspecto lo acompaña de dos cuestionamientos que orientan su estudio, tales cuestionamientos son: "¿el funcionamiento del pensamiento matemático, es independiente del lenguaje y de otros sistemas de representación semióticos utilizados?" y "¿el pensamiento funciona en matemáticas de la misma manera que en otros dominios de conocimiento?

Para orientar las respuestas a estos cuestionamientos, Duval (1995) realiza las siguientes afirmaciones:

Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran.

(1) Lo que importa es su propiedad de transformación porque el *procesamiento matemático* siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas. En matemáticas los signos

no son prioritarios para presentar objetos sino para sustituirlos por otros como, por ejemplo, en el cálculo. Además, esta transformación depende del sistema semiótico de representación dentro de las representaciones que se producen. En este sentido no hay una “mediación semiótica” sino “mediaciones semióticas” bastante diferentes.

(2) La actividad matemática requiere que, aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), sólo elijan una según el propósito de la actividad. En otras palabras, la actividad matemática requiere una *coordinación interna*, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos “contextos de representación” diferentes del mismo objeto. (p. 145)

De acuerdo con las afirmaciones anteriores, Duval (1995) resalta dos tipos de transformaciones en cuanto a las representaciones semióticas, a saber, la conversión y el tratamiento. De esta forma afirma que “se puede examinar la complejidad cognitiva del tratamiento, la clase específica de transformación que requiere cambiar el sistema semiótico usado mientras una actividad matemática se comienza o está en proceso”.

Al analizar cualquier actividad matemática, es necesario tener en cuenta estas dos clases de transformaciones las cuales se presentan a continuación.

2.2.4.1. Dos tipos de transformaciones.

De representaciones semióticas.

Para explicar este tipo de transformación se presenta el siguiente ejemplo propuesto por Duval (1995).

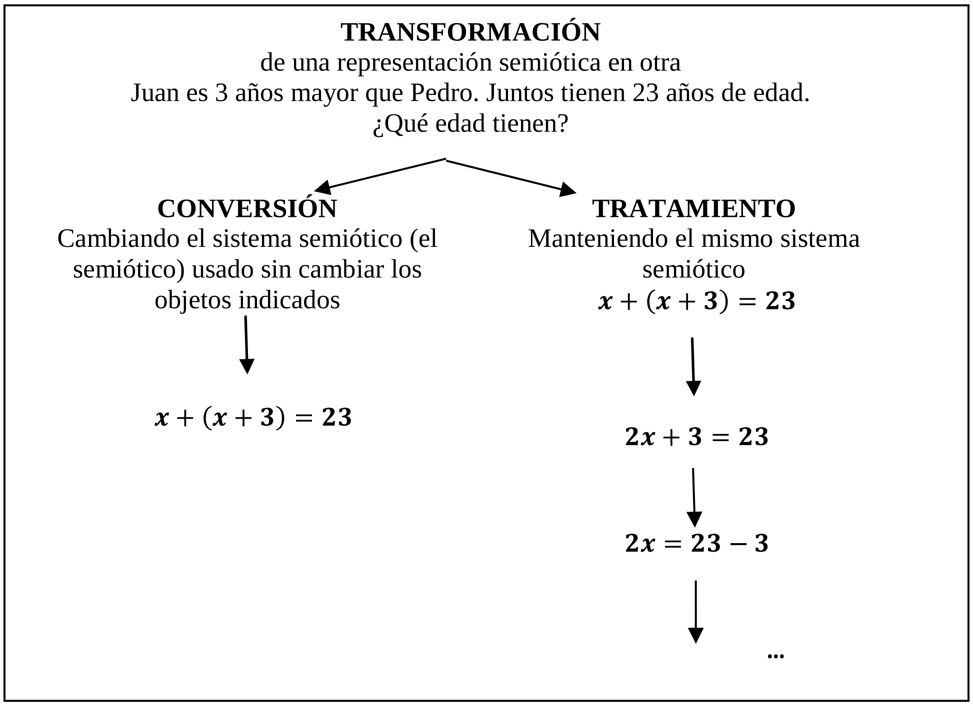


Figura 1. Duval, R. (1995). Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento

En este ejemplo, hay un único cambio de representación en la conversión, mientras que en el tratamiento hay una secuencia de varias transformaciones. Pero muy a menudo la conversión y el tratamiento están totalmente entrelazados en el mismo proceso matemático de resolución.

La transformación de una expresión lingüística esconde dos requisitos específicos. En primer lugar, usar menos símbolos que objetos para referirse a ellos. Para eso se debe escribir una nueva expresión usando una operación aritmética y explicitar una relación para traducir el significado de la frase mediante una ecuación. Así no obtenemos la misma segmentación semántica de datos problemáticos en la expresión lingüística; es un primer salto. Pero hay también un segundo salto: en el tratamiento algebraico los símbolos de operaciones prevalecen sobre los símbolos que representan a los números. Las expresiones que representan los números se “rompen”.

En este ejemplo la conversión y el tratamiento aparecen en dos clases de transformaciones de representaciones semióticas, que se pueden identificar claramente, y se dan en distintas etapas del proceso de resolución de los problemas. Pero hay también situaciones en las que se requiere la conversión implícita y continuamente, cada vez que hay que movilizar conjuntamente y en paralelo dos registros de representación.

Desde un punto de vista matemático, la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas. Es más, lo que importa es el tratamiento que es el que hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro para resolver el problema dado. (p. 146-149)

De conversión.

Haciendo nuevamente uso del ejemplo anterior, (figura 1), Duval (1995) encuentra que:

El enunciado de este problema remite a dos tipos de objetos: cantidades desconocidas y relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas. La traducción de un enunciado a una ecuación o a un sistema de ecuaciones requiere dos tipos de operaciones discursivas que no se sitúan al mismo nivel.

1. Volver a designar las cantidades desconocidas en el enunciado como "la edad de Juan" y "la edad de Pedro", pero utilizando una sola letra (una sola palabra) para referirse a estos dos objetos. Este tipo de operación discursiva introduce pues la designación funcional que no existe en lenguaje natural, ya que es necesario una frase para describirla. Lo que se llama "elección de incógnita" corresponde de hecho a una operación de reducción del léxico utilizable y a un renombramiento funcional de los otros objetos.

2. Formular una ecuación. Pero para formular una ecuación es necesario según expresó Lacroix (1820) "igualar dos cantidades entre sí", es decir, establecer una relación de equivalencia entre las cantidades desconocidas designadas y la cantidad conocida. Pero la expresión de esta relación varía considerablemente de un enunciado a otro. Puede estar indicada por una frase ("juntos tienen 23 años"; figura 2). A veces no hay ninguna formulación explícita que indique esta relación. (p. 155)

En conclusión, se podrían variar los ejemplos y sin importar cuál es el registro inicial y cuál el buscado, es fácil encontrar que en la mayoría de estudiantes se presenta dificultad al hacer conversiones implícitas o explícitas en actividades matemáticas, así se podrían buscar tareas menos globales en problemas matemáticos. También se podrían buscar los factores relacionados con el reconocimiento del contenido matemático desde una representación hacia su traducción y su representación en otro sistema semiótico, pero el asunto real es entender qué procesos cognitivos se involucran en el pensamiento matemático y por qué el proceso cognitivo de comprensión es necesario para la comprensión del estudiante. (Duval, 1995)

Para terminar el análisis del estudio realizado por Duval (1995) se presenta la reflexión que a menudo se hace desde la educación matemática que parte de la siguiente pregunta:

¿Cómo puede contribuir el aprendizaje de las matemáticas a la educación general para formar la mente o para el desarrollo de las capacidades más globales de visualización, razonamiento, organización de información, y no solamente la obtención de algunos procedimientos técnicos de cálculo? Esta es la razón por la que analizar los procesos cognitivos que subyacen en el aprendizaje de las matemáticas requiere un cambio o una orientación en la forma que las tareas y los problemas se seleccionan para el aprendizaje de los estudiantes y también para la investigación sobre el aprendizaje. Las variables cognitivas relativas a las diversas maneras de representación deben ser tomadas en consideración. Se requieren también métodos que vayan más allá de lo que se deja constancia en la escala del trabajo diario en el aula.

Desde estas perspectivas es mi motivación plantear una o varias estrategias haciendo uso de una unidad didáctica en el marco de E.p.C. que posibilite alcanzar en los estudiantes mayores niveles de comprensión, basado en la educación Matemática, en diferentes ejercicios mentales que requieran de comprensión y puesta en práctica de diferentes aprendizajes.

2.3. Referentes Teóricos

Dado que esta propuesta parte de la intención de desarrollar comprensión en los estudiantes frente al significado de polinomio y sus elementos y principalmente de la letra en expresiones algebraicas susceptibles de ser factorizadas, es necesario remitirme al proyecto de Enseñanza para la Comprensión planteada por el proyecto Zero de la Universidad de Harvard, la cual se define a continuación:

2.3.1. Marco de Enseñanza para La Comprensión.

Stone (1999), presenta E.p.C. como un proyecto de investigación colaborativa que parte de cuatro preguntas que se presentan a continuación: 1. ¿Qué tópicos vale la pena comprender?, 2. ¿Qué aspectos de estos tópicos deben ser comprendidos?, 3. ¿Cómo podemos promover la comprensión?, 4. ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los estudiantes? Para poder dar respuesta a estas preguntas se parte de cuatro partes que se deben tener en cuenta durante la planeación, a saber: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua. Así, cada elemento define qué vale la pena comprender para lo cual se presenta una propuesta de organización curricular. A continuación, se define cada elemento:

2.3.1.1. Tópicos Generativos.

Son temas, cuestiones, conceptos, ideas, u otros constructos que permiten ser profundizados, tener significación, realizar conexiones y tener variedad de perspectivas en un grado tan amplio que permitan apoyar el desarrollo de comprensiones profundas en el alumno. Es necesario que estos tópicos sean centrales para cualquier disciplina, lo que significa que deben ser interdisciplinares y de acceso real y directo a los diferentes campos del conocimiento; accesible e interesante para los alumnos, pudiéndose así vincular con las experiencias, gustos e intereses de los estudiantes, siendo pertinente con sus edades y cultura, así como sus necesidades actuales y futuras acordes con sus contextos; interesantes para el docente de tal forma que le produzcan retos intelectuales y al igual que en el estudiante le generen interés; ricos en conexiones para que puedan vincularse fácilmente con experiencias previas de los estudiantes dentro de las diferentes disciplinas pero también entre ellas; accesibles de tal forma que generen continua motivación en lugar de producir abandono por ser de difícil comprensión.

2.3.1.2. Metas de Comprensión.

Son afirmaciones explícitas que permiten evidenciar aquello que se pretende que el estudiante comprenda, éstas definen ideas, procesos, relaciones o preguntas que los alumnos comprenderán a partir de su indagación. Las metas de comprensión son explícitas de cada disciplina y revelan los conocimientos específicos que los estudiantes adquirirán. Para que las metas estén bien diseñadas es necesario que el docente tenga un amplio conocimiento del tema a abordar de tal forma que se pueda hacer una exploración a profundidad. Finalmente deben ser alcanzables en un tiempo establecido, de tal forma que, al finalizar el año o el semestre, de acuerdo con la planeación, revelen los grandes objetivos que el docente pretendía abordar.

2.3.1.3. Desempeños de Comprensión.

Son las acciones que dejan entrever la comprensión que los alumnos han alcanzado con respecto a la temática, éstos deben ser tan amplios que permitan analizar los procesos que los alumnos están siguiendo, así como transponerlos a otras situaciones que así lo permitan, de tal forma que permitan extender, sintetizar, aplicar o usar de otra forma lo aprendido de manera creativa y novedosa. Así, los desempeños de comprensión incluyen explicar, interpretar, analizar, relacionar, comparar y hacer analogías. Por tanto, dichos desempeños deben responder a la pregunta: ¿Qué pueden hacer los estudiantes para desarrollar y demostrar su comprensión? Responder a esta pregunta les recuerda a los docentes que los alumnos pueden emprender una variedad de actividades como parte de su trabajo escolar haciendo uso del espectro total de inteligencias y no de la específica de cada disciplina.

2.3.1.4. Evaluación diagnóstica continua.

Corresponde al proceso constante de evaluación en el cual se revisan todo el tiempo avances y dificultades durante el proceso, esta evaluación exige críticas constructivas y reconocimiento de aciertos tanto desde el docente como desde el mismo estudiante y de los otros, a través d criterios claros que le permitan estar constantemente comparando su conocimiento actual con respecto al anterior y con el que se quiere alcanzar, por tanto, la evaluación diagnóstica refuerza a la vez que evalúa el aprendizaje. Si la enseñanza es efectiva, la valoración del propio desempeño se vuelve casi automática. En cuanto al instrumento de valoración, se busca que se haga un diseño sistemático para alentar el desarrollo y la demostración de metas de comprensión explícitas. Los criterios planteados en esta sistematización deben además de permitir controlar los desempeños en borrador, también planificar los pasos siguientes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Dentro del modelo se establecen tres etapas o momentos que se deben seguir para alcanzar con mayor éxito los cuatro elementos anteriormente presentados, dichas etapas son:

2.3.1.5. Etapa de exploración.

Generalmente se hace al inicio de la temática a abordar y consiste en determinar los conocimientos previos no estructurados con respecto al estudio a realizar a partir de métodos y conceptos basados en la disciplina, estos invitan al alumno a querer dominar el tópico generativo y le permiten involucrarse al margen de su nivel anterior de comprensión, permitiéndole así ver conexión entre el tópico generativo y sus propios intereses y experiencias previas. Esta exploración permite tanto al docente como a los estudiantes reconocer aquello que ya saben como lo que están interesados en aprender. Busca además comprometer a los estudiantes a poner en práctica sus comprensiones anteriores y confrontar enigmas que produzca el tópico generativo. Es importante aclarar que esta etapa es flexible y abierta a las diferentes posibilidades de comprensión existentes, sean éstas correctas o no.

2.3.1.6. Investigación guiada.

El papel del docente en esta etapa es primordial, siendo quien guía el trabajo de los estudiantes a aprender cómo aplicar conceptos y métodos propios de su disciplina, a integrar los diferentes conocimientos y a poner en práctica una comprensión cada vez más compleja y sofisticada. Para lograr esto, el docente debe motivar en el alumno la utilización de ideas y estrategias de investigación que lo lleven a comprender aquellos temas que se han propuesto, posibilitando la adquisición de habilidades básicas que lo formen intelectualmente tales como analizar datos empíricos para refinar teorías o dar herramientas para comunicar los conocimientos adquiridos de la disciplina, entre otros.

2.3.1.7. Proyecto final de síntesis.

Corresponde a las acciones finales que le permiten al estudiante demostrar con claridad el dominio que adquirieron de las metas de comprensión establecidas; así, el trabajo es mucho más autónomo que en las etapas anteriores y permite sintetizar las comprensiones que han desarrollado durante la unidad planeada. Éstos deben ser planeados de tal forma que demuestren claramente comprensión y exigir que los alumnos amplíen su mente, sin necesidad de que sean proyectos complejos o muy amplios o extensos para evitar que, por no realizarlos, el docente no pueda determinar si se alcanzaron los niveles de comprensión que se pretendían.

Otro aspecto importante e tener en cuenta en este marco, se refiere a las dimensiones de comprensión las cuales se presentan a continuación:

2.3.1.8. Dimensiones de comprensión.

De contenido.

Evalúa la flexibilidad con que los alumnos pueden moverse entre ejemplos y generalizaciones, identificando los conocimientos y contenidos alcanzados, así como la presencia y cambio de creencias, en contraste con la forma de pensar que llevó a los expertos a profundizar en un concepto.

De método.

Evalúa la capacidad que tienen los alumnos para mantener un sano escepticismo frente a los conocimientos propios o los que están construyendo, así como de su uso de métodos confiables.

En esta dimensión es válido que los estudiantes se pregunten, ¿Cómo los expertos llegan al conocimiento? o, ¿Cómo saber que lo aprendido es verdadero?

De propósito.

Afirma que el conocimiento es una herramienta para explicar, reinterpretar y operar en el mundo, evaluando la capacidad que tienen los alumnos para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, así como la capacidad de usarlo en múltiples situaciones y las consecuencias que traiga su uso.

De comunicación.

Evalúa el uso de los diferentes símbolos que utilizan los estudiantes para expresar lo que saben, a partir de unos géneros o tipos de desempeño establecidos, con el fin de hacer público su conocimiento, es decir, de hacer uso efectivo de sistemas de símbolos para representar y evidenciar su conocimiento

Estas dimensiones están clasificadas en cuatro niveles, a saber, comprensión ingenua, de principiante, de aprendiz y de maestría.

2.3.2. Concepto de unidad didáctica.

Para el desarrollo de esta investigación se toma como referente la postura de Rico (1997) quien realiza una propuesta de Unidad Didáctica para matemáticas desde la cual afirma que:

El diseño general debe tener en cuenta diferentes alternativas, a partir de las cuales los profesores llevan adelante sus tareas de planificación. En cada caso es necesario establecer unas prioridades y hacer una selección de la información aportada por los diferentes organizadores. De este modo se obtienen informaciones concretas para establecer los objetivos, contenidos, metodología y evaluación de cada tema.

2.3.3. Conceptos algebraicos asociados al polinomio y sus elementos.

Polinomio.

Un polinomio, es una combinación cualquiera de estas variables y de números, mediante una cantidad finita de operaciones de x con valores numéricos constantes, es decir, es del tipo

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

Llamaremos grado de un polinomio al número n, siempre que a_n sea el coeficiente principal del mismo, y lo denotaremos $gr(P(x))$. El valor numérico de un polinomio para $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la x por a (Niévares, 2012, p.6)

Teorema del factor.

El teorema del factor permite encontrar los factores de un polinomio. Éste establece que un polinomio $P(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y sólo si k es una raíz de $P(x)$, es decir que $P(k) = 0$

Ejemplo: si se desean encontrar los factores de $p(x) = x^3 + 7x^2 + 8x + 2$ se ensayan las raíces de $p(x)$ para obtener los factores $(x - k)$. Si el resultado de sustituir k en el polinomio es igual a 0 (es decir, si k es raíz) se sabe que $(x - k)$ es un factor. Teniendo en cuenta que los candidatos a raíces (racionales) de $p(x)$ son (±1, ±2).

Para saber si $(x - 1)$ es un factor de $p(x)$ se sustituye $x = 1$ en el polinomio:

$P(1) = 1^3 + 7.1^2 + 8.1 + 2 = 18 \neq 0$

Y se determina que $(x-1)$ no es un factor de $p(x)$. Se prueba ahora con $\big(x-(-1)\big)=(x+1)$ de la misma forma; es decir, sustituyendo y comprobando si es -1 una raíz del polinomio:

$P(-1)=(-1)^3+7.(-1)^2+8.(-1)+2=0$

Por tanto $(x+1)$ es un factor porque -1 es una raíz de $p(x)$.

Esta estructura se toma ya que "una de las actividades más comunes del álgebra escolar es la de encontrar las raíces racionales con coeficientes enteros", aunque éstas no se abordan en la presente propuesta.

A continuación, se presentan algunas definiciones usadas frecuentemente en el ámbito escolar, tomadas del libro de texto Álgebra y Geometría I de editorial Santillana de la edición del año 2004:

Monomio.

Es una expresión algebraica que puede ser un número, una letra que representa una variable o el producto de números y letras elevadas a potencias con exponentes enteros mayores o iguales a cero.

Coeficiente.

A la parte numérica del monomio se le llama coeficiente. Por ejemplo, en el monomio $-7a^5b^9$ el coeficiente es -7.

Parte literal.

Al producto de las letras que representan las variables de un monomio con sus respectivos exponentes se le llama parte literal. Por ejemplo, en el monomio $-7a^5b^9$ la parte literal es a^5b^9

Grado absoluto.

El grado absoluto de un monomio es la suma de los exponentes de las letras que representan las variables. Por ejemplo, el grado absoluto del monomio $-5x^2y$ es 3 puesto que $-5x^2y = -5x^2y^1$.

Grado relativo.

El grado de un monomio con respecto a una variable o grado relativo es el exponente de la letra que representa la variable. Por ejemplo, el grado del monomio $3x^2y$ con respecto a la variable *x* es 2 y con respecto a la variable *y* es 1(p.35-36).

Otras consideraciones.

Un polinomio es una expresión algebraica que consiste en sumas y restas entre monomios, los monomios que forman un polinomio se denominan términos del polinomio.

Se dice que un polinomio está reducido cuando no tiene monomios semejantes, los cuales también se llaman términos semejantes. Es conveniente trabajar con términos reducidos (p.40)

El grado absoluto de un polinomio reducido es el grado del término del mayor grado absoluto. Por ejemplo, el grado del polinomio

$3x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 9x + 3$ es 4.

El término independiente de un polinomio es el término de grado *0*, es decir, la constante. Por ejemplo, el término independiente del polinomio $3x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 9x + 3$ es 3 pues $3 = 3x^0$.

Un polinomio se expresa de forma ordenada de acuerdo con el exponente de una de las variables que contiene. El orden puede ser descendente o ascendente.

Orden descendente. Un polinomio se expresa en orden descendente con respecto a una de las variables si los exponentes de dicha variable aparecen de menor a mayor. Por ejemplo, el polinomio

$4x^3y + 4x^2y^2 + 3xy + 2$ está ordenado en orden descendente con respecto a la variable x, pues los exponentes de la *x* en los términos son: *3* para $4x^3y$,*2* para $+ 4x^2y^2$, *1* para *3xy* y *0* para el término independiente *2*.

Orden ascendente. Un polinomio se expresa en orden ascendente con respecto a una de las variables si los exponentes de dicha variable aparecen de menor a mayor. Por ejemplo, el polinomio

$5m^3n + 4m^2n^2 - 3m^3n^3$ está en orden ascendente con respecto a la variable *n*, pues los exponentes de la *n* son: *1* para el término $5m^3n$, *2* para el término $4m^2n^2$ y *3* para el término $-3m^3n^3$ (p.45)

Factorización.

Este proceso consiste en escribir una expresión algebraica como producto de dos o más expresiones. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + x - 6$ se factoriza como $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ lo cual se puede verificar resolviendo el producto de $x - 2$ por $x + 3$. Se dice que $x - 2$ y $x + 3$ son factores de $x^2 + x - 6$**.**$= (x - 2)(x + 3)$

2.3.4. Trabajo colaborativo.

Teniendo en cuenta que esta propuesta involucra desarrollar actividades grupales, se toma como modelo el trabajo colaborativo, en la cual Collazos y Mendoza (2006), plantean una definición de este estilo de trabajo que se presenta a continuación:

En el trabajo colaborativo es el profesor quien diseña y mantiene casi por completo el control de la estructura de interacciones y de los resultados que se han de obtener, en él se necesita estructurar interdependencias positivas para lograr una cohesión grupal, así, éste se entiende como el uso instruccional de pequeños grupos de forma tal que los estudiantes trabajen juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás. Aquí los estudiantes trabajan colaborando. Este tipo de trabajo no se opone al trabajo individual, ya que puede observarse como una estrategia complementaria que fortalece el desarrollo global del alumno.

Los métodos de aprendizaje colaborativo comparten la idea de que los estudiantes trabajan juntos para aprender y son ellos los responsables de su propio aprendizaje y el de sus compañeros. Esto implica una renovación de los roles asociados a profesores y alumnos, un modelo diferente de concebir el proceso de enseñanza/aprendizaje. (Collazos y Mendoza, 2006, p. 62)

Rol de los estudiantes

Para que este estilo de trabajo sea evidente, Collazos y Mendoza (2006), presentan las siguientes condiciones que se deben promover en los estudiantes:

- Ser responsables con el aprendizaje. Se hacen cargo de su propio aprendizaje y se autorregulan. Definen los objetivos del aprendizaje y los problemas que les son significativos, entienden qué actividades específicas se relacionan con sus objetivos y usan estándares de excelencia para evaluar qué tan bien han logrado dichos objetivos.
- Estar motivados para aprender. Encuentran placer y excitación en el aprendizaje. Poseen pasión para resolver problemas y entender ideas y conceptos. Para estos estudiantes, el aprendizaje es intrínsecamente motivante.

- Ser colaborativos. Entienden que el aprendizaje es social. Están “abiertos” a escuchar las ideas de los demás y a articularlas efectivamente, tienen empatía con los otros y una mente abierta para conciliar con ideas contradictorias u opuestas. Poseen la habilidad para identificar las fortalezas de los demás.
- Ser estratégicos. Continuamente desarrollan y refinan el aprendizaje y las estrategias para resolver problemas. Esta capacidad para aprender a aprender (metacognición) incluye construir modelos mentales efectivos de conocimiento y de recursos, aun cuando los modelos puedan estar basados en información compleja y cambiante. Estos estudiantes son capaces de aplicar y transformar el conocimiento con el fin de resolver los problemas en forma creativa, y de hacer conexiones en diferentes niveles.

2.3.5. Números figurados.

Teniendo en cuenta que, para la presente propuesta de intervención, se incluye un taller que hace uso de los números figurados, se hace necesario incluir algunas definiciones que giran alrededor de este concepto, tales definiciones son:

Configuración puntual.

Se denomina así la representación gráfica de una colección finita de puntos, que responde a un propósito o a cierta intencionalidad. Ejemplo: grupos de puntos dispuestos en la misma forma que las constelaciones. Silverman, (como se cita en Castro, 2013).

Una configuración puntual ofrece una imagen visual de una cantidad: es un modelo gráfico de representación de números. Hogben, (como se cita en Castro, 2013)

Por lo general cada modelo tiene algún modo o criterio de estructuración; a veces, como en el ejemplo anterior, el criterio es copiar una organización que aparece en la naturaleza; otras veces el criterio sigue unas pautas de simetría o regularidad. Hay que tener en cuenta que una misma cantidad -un mismo número- puede representarse mediante una variedad de configuraciones puntuales.

Número figurado.

Es una configuración puntual o disposición de puntos, que representa un cardinal mediante un modelo o figura reconocible; se consideran prioritariamente figuras geométricas en el plano o en el espacio, Freudenthal (como se cita en Castro, 2013).

Patrón de puntos.

Cuando una configuración puntual se considera como ejemplo o caso particular de una forma o estructura, con la que se pueden visualizar distintos números variando el tamaño, pero no la forma, tenemos un patrón; un patrón puntual es una estructura de representación mediante configuraciones puntuales, Hervey y Litwiller, (como se cita en Castro, 2013). Cada configuración puntual puede considerarse, alternativamente, ejemplo de diferentes patrones; por ello la noción de patrón es general y distinta de la noción de configuración puntual.

Número poligonal.

Se designa así un tipo de patrón que representa números en base a un modelo geométrico cuya forma es un polígono y cuya generación se hace por ampliación, Lucas, Fourrey, Beiler y Wells, (como se citó en Castro, 2013). Cada tipo de polígono da lugar, al menos, a un patrón; así, hay números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.

Números triangulares.

Los números triangulares reciben su nombre del hecho de presentar una configuración puntual en forma de triángulo regular, Hamberg y Green (1987, como se cita en Castro, 2013). Las representaciones usuales de los números triangulares son:

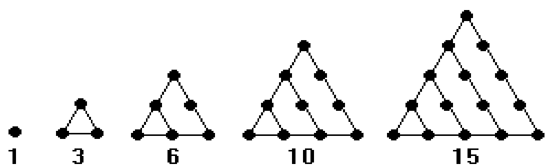


Figura 2. Castro, E. (2013). Número triangulares.

Los números triangulares forman la siguiente secuencia:

$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15, ...$ o bien:

$T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, T_5 = 15$ ...

Dicha secuencia numérica presenta una regularidad en su formación que descubre el patrón numérico "sumar un natural consecutivo a partir del primer término" que es 1, para obtener los demás términos.

Observando el procedimiento de formación de los números triangulares se descubre un patrón geométrico de la representación de sus términos, Lucas, (como se cita en Castro, 2013). Para formar T_2 se parte de T_1 y se colocan dos puntos en la línea inferior. Para formar T_3 a partir de T_2 y se coloca una línea de tres puntos debajo de las que ya teníamos. Así se procede iterativamente, lo que permite escribir el siguiente patrón numérico:

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

………………………..

Números cuadrados.

Se denominan así a los números que admiten una configuración puntual regular cuadrada; los números cuadrados se obtienen de contar los puntos que se pueden disponer en forma de tablero, o de cuadrado, Fourrey y Wells (1987, como se cita en Castro, 2013).

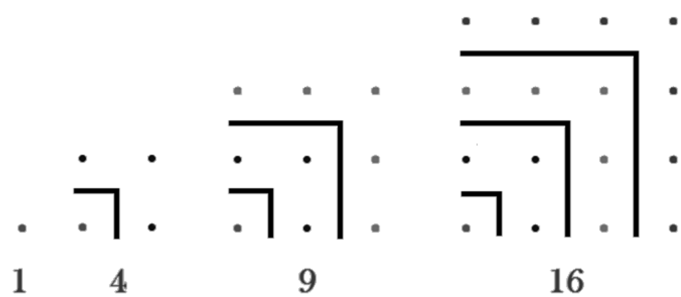


Figura 3. Castro, E. (2013). Número cuadrados

Los números cuadrados son las potencias segundas, o cuadrados, de los números naturales.

$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 35, \ldots$ o bien

$C_1 = 1, C_2 = 4, C_3 = 9, C_4 = 16, C_5 = 25, C_6 = 36 \quad \ldots$

El patrón de formación en esta secuencia numérica es: sumar números impares consecutivos, empezando desde 1. El segundo número cuadrado es la suma de los dos primeros impares a partir de 1, el tercer cuadrado es la suma de los tres primeros números impares a partir de 1, y así sucesivamente.

El patrón numérico que se obtiene es:

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

………………………..

CAPÍTULO TRES

3. Metodología

3.1. Enfoque

Para esta investigación, se opta por el paradigma cualitativo dado que epistemológicamente como lo afirman Taylor y Bogdan (citado por Sandoval, 2002), consta de una metodología inductiva en la cual "su ruta metodológica se relaciona más con el descubrimiento y el hallazgo que con la comprobación o verificación" (p. 41), invitando así a descubrir las razones por las cuales el grupo de estudiantes seleccionado presenta dificultades para comprender el significado de la letra en procesos de factorización; es holística y abierta en la cual se analizarán los comportamientos del total del grupo, así como las particularidades referente a los procesos y razonamientos seguidos desde su organización, funcionamiento y significación, siendo así a la vez humanista porque posiblemente permitirá captar sus percepciones personales, concepciones y maneras de actuar; es interactiva y reflexiva la cual permitirá ser sensible a los efectos que en los estudiantes genere; es naturalista de tal manera que inducirá a comprender a los estudiantes en sus formas de pensamiento, permitiendo dejar de lado las creencias, perspectivas y predisposiciones, haciendo seguimiento de una manera rigurosa para arrojar resultados que tengan validez y confiabilidad.

3.2. Alcance

Con esta propuesta se busca determinar si a partir de una unidad didáctica a la luz de enseñanza para la comprensión se puede aumentar en los estudiantes del curso 903 del Colegio San Francisco I.E.D., el nivel de comprensión frente al papel que desempeña la letra en expresiones algebraicas susceptibles de ser factorizadas y para hacer esto posible se opta por la investigación de tipo descriptivo para determinar cómo dicho grupo de estudiantes se afronta a esta clase de expresiones para así hacer un análisis que visibilice los diferentes comportamientos, conexiones y relaciones que establezcan a partir de sus creencias, puntos de vista y actitudes manifestadas al poner en marcha las tareas, haciendo el investigador un seguimiento detallado de los procesos seguidos paso a paso, recolectando datos, organizándolos y haciendo las tabulaciones necesarias para poder establecer avances o deficiencias durante el proceso e inducirlos a que utilicen estrategias de verificación que le den validez a sus resultados.

3.3. Diseño De Investigación

A partir de la investigación cualitativa que acompañará el proceso de recopilación de información de este trabajo, se opta por la metodología de investigación acción participativa (IAP), centrada en la investigación acción de aula, así, de acuerdo con Sandoval (2002), "la perspectiva focal de esta alternativa de trabajo cualitativo ha sido el llamado "empoderamiento" a través de la producción y uso del conocimiento por parte de los sectores más pobres y oprimidos" (p. 69).

Dado que esta modalidad también, de acuerdo con Sandoval (2002) busca además "realizar cambios radicales especialmente en los países llamados del tercer mundo (América Latina, África y Sudeste Asiático)."(p.69), se adapta a las realidades de la educación colombiana, así, al adoptar este diseño se busca acercar a los estudiantes al conocimiento en cuanto al significado de la variable en los procesos de factorización y motivar su desarrollo intelectual que a la vez les genere reconocimiento de su realidad social y les brinde herramientas para transformarla en su beneficio académico y cognitivo. Ahora, atendiendo a las apreciaciones de Sandoval (2002), al ser los estudiantes conscientes de su realidad, mejora la comprensión que al respecto tienen y les permite planear actividades de cambio social o educativo a la vez que los motiva hacia la acción social, invitándolos a tomar iniciativas de cambio. Cabe resaltar que esta modalidad de investigación exige tomar datos de forma sistemática a partir de la observación para luego ser analizados y poder así conceptualizar, siendo entonces consecuente con el nivel descriptivo del cual se va a hacer uso.

En cuanto a la recolección de datos se requiere tener presente que el estudio se hará en dos momentos, el primero antes de orientar hacia la comprensión del significado de la letra en expresiones algebraicas y el segundo luego de haber realizado tal intervención a través de pruebas escritas, acompañadas de diarios de campo, videograbación y posteriores entrevistas de grupos focales dentro del curso 903 para pedirles que argumenten procesos seguidos y así poder interpretar la información recogida y obtener conclusiones.

Con esta documentación y para analizar la información, se utilizará la técnica de análisis documental la cual se desarrolla en cinco etapas:

- En la primera, se realiza el rastreo e inventario de los documentos existentes y disponibles.
- En la segunda, se hace una clasificación de los documentos identificados.
- En la tercera, se hace una selección de los documentos más pertinentes para los propósitos de la investigación.
- En la cuarta, se realiza una lectura en profundidad del contenido de los documentos seleccionados, para extraer elementos de análisis y consignarlos en “memos” o notas marginales que registren los patrones, tendencias, convergencias y contradicciones que se vayan descubriendo.
- En la quinta, se realiza una lectura cruzada y comparativa de los documentos en cuestión, ya no sobre la totalidad del contenido de cada uno, sino sobre los hallazgos previamente realizados de modo que sea posible construir una síntesis comprensiva total, sobre la realidad humana realizada.”

3.4. Población

A continuación, se presenta el Colegio San Francisco I.E.D., visto desde varios ámbitos, iniciando por una breve descripción de su ubicación en la localidad 19 Ciudad Bolívar, luego observando la institución desde diferentes focos, para terminar con la descripción del curso 703 en 2014, luego 803 y actualmente 903, naturalmente con algunos cambios, pero en esencia es el mismo grupo, que será el punto de referencia y estudio de la presente investigación.

3.4.1. Descripción del contexto local.

El colegio San Francisco I.E.D., se encuentra ubicado en la localidad llamada Ciudad Bolívar, que de acuerdo con la distribución que para la ciudad de Bogotá se tiene estipulada, es la número 19 de las 20 existentes.

En la actualidad, el Colegio San Francisco atiende población de familias que manifiestan informalmente ser provenientes del campo por desplazamiento producto de la violencia y de grupos reinsertados que en gran porcentaje pertenecen a diferentes modelos de familias, tales como las de madres cabeza de familia, abuelos que cuidan de sus nietos, niños, niñas y jóvenes trabajadores, embarazos precoces y jóvenes con falta de oportunidades sociales y víctimas de violencia.

3.4.2. Descripción del aula.

El curso 703 vigencia 2014, 803 en 2015 y actualmente 903, se toma como foco de investigación de este proyecto, en ese momento contaba con 38 estudiantes de los cuales 21 son niñas y 17 niños, oscilando en edades de entre 12 y 15 años. En cuanto a su desempeño académico en la asignatura de Matemáticas, un 46% repetidamente reprueban, pero no por dificultades cognitivas o falta de comprensión sino por falta de constancia, desinterés y poca normatividad, causas que motivan el tema de investigación que, a pesar de ser un nuevo curso, en esencia muestra muchas características similares con las anteriormente descritas.

Adicional a lo anterior, con el instrumento 1, fue posible identificar aspectos más puntuales del grupo los cuales se describen en el capítulo de resultados

3.5. Categorías de análisis

Las categorías que se tienen en cuenta durante la puesta en práctica de la presente propuesta de investigación, surgen de la manipulación que los estudiantes hacen de los elementos que conforman los polinomios a partir de un taller de exploración como interpretación previa y luego de hacer la intervención, a partir de dos talleres que involucran procesos de factorización, que para este trabajo son aquellos que cumplen con las estructuras de ser diferencias de cuadrados perfectos y trinomios cuadrados perfectos, como alternativa de *acercamiento semiótico al concepto de polinomio*, de sus elementos y de la equivalencia entre la expresión antes y después de recibir el tratamiento de factorización. También se establece una categoría encaminada a determinar los cambios en la práctica del docente investigador desde sus concepciones, planeación y evaluación. Así, se pretendía determinar las interpretaciones que los estudiantes atribuyeran a los coeficientes, a las variables, a sus exponentes, a los operadores que se presentaran y en conjunto a todo el polinomio, haciendo una primera mirada desde el taller de exploración, antes de hacer una definición formal y luego desde los dos casos de factorización, como parte de la conceptualización de estos elementos. Tales categorías son:

TABLA No 7. Categorías de análisis

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍAS	CRITERIOS DE OBSERVACIÓN
SIGNIFICADOS PREVIOS ATRIBUIDOS POR LOS ESTUDIANTES AL CONCEPTO DE POLINOMIO Y SUS ELEMENTOS	COEFICIENTES VARIABLES EXPONENTES OPERADORES POLINOMIO	Se analiza la interpretación que hacen de cada elemento de las subcategorías en cuanto a agrupación de letras y números, al tratamiento que le dan a los objetos matemáticos, a los modelos presentados según la estructura de los polinomios y a los signos presentes vistos como operadores o como signos de cada coeficiente.
ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE POLINOMIO Y SUS ELEMENTOS DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA Y ARITMÉTICA	DESDE LA GEOMETRÍA DESDE LA ARITMÉTICA	Se analizan los cambios conceptuales del significado de polinomio y de sus elementos al abordarlos desde una mirada geométrica y desde una perspectiva aritmética
CAMBIOS EN LA PRÁCTICA DOCENTE	CONCEPCIONES PLANEACIÓN EVALUACIÓN	Se analizan los cambios que tiene el investigador en cuanto a las concepciones previas y finales, así como su planeación y los criterios de evaluación antes y después de realizar la intervención

3.6. Instrumentos de recolección de información

3.6.1. Diario de campo.

Este instrumento permitió realizar una observación detallada de la planeación y acciones realizadas por parte del docente investigador, así como analizar las prácticas y detectar algunos cambios que en éstas se presentaron, convirtiéndose además en una herramienta fundamental para identificar registros, acciones y respuestas dadas por los estudiantes durante las sesiones en la aplicación de los instrumentos, así como las respuestas o justificaciones dadas por los mismos ante los cuestionamientos realizados por el docente, referentes a los procesos y razonamientos seguidos, bien sea durante la solución de los talleres aplicados o luego de resolver los mismos.

Se ha seleccionado este primer instrumento atendiendo a los beneficios pedagógicos que Porlán y Martín (como se cita en Alzate, 2015) resaltan de éste para el estudiante y para los procesos de enseñanza y aprendizaje; así, entre las ventajas de uso está:

> Permiten detectar y contrastar la visión que tienen los estudiantes del profesor, de la clase en general, de su papel en ésta y su relación con los compañeros, de los esquemas de conocimiento que tienen, de sus obstáculos cognitivos, afectivos y metodológicos en sus procesos de aprendizaje y desarrollo, los intereses, necesidades y problemáticas que manifiestan, así como de sus conductas más significativas, por ello hay gran riqueza en estas evidencias como diagnóstico, que pueden contrastarse o realizarse además mediante cuestionario, entrevistas cortas y otras actividades que permitan desvelar intereses, curiosidades y nuevas expectativas. (p. 3)

3.6.2. Documentos individuales.

Durante el desarrollo de la propuesta se utilizaron dos instrumentos individuales, el primero a manera de encuesta, el cual fue utilizado como material de recolección de información encaminado a ser parte de la caracterización de la población foco de la presente investigación.

El segundo instrumento hizo parte de la etapa diagnóstica en la cual se obtuvieron insumos referentes a las primeras impresiones que los estudiantes manifestaron con respecto a procesos aditivos básicos desde el campo del álgebra.

3.6.3. Registros grupales.

El tercer instrumento aplicado se hizo de manera grupal, conformando equipos de trabajo colaborativo los cuales se mantendrían para los dos siguientes instrumentos. Este instrumento dentro del marco de E.p.C. corresponde a la etapa de exploración y constaba de un taller escrito en el cual se hizo uso de los números figurados como herramienta de identificación de presaberes y de acercamiento a las categorías y subcategorías planteadas para el presente proyecto.

Los instrumentos 3 y 4, incluyeron tanto la etapa de investigación guiada como la de proyecto final de síntesis, de nuevo enmarcadas en E.p.C., involucrando en el tercer instrumento el caso de factorización denominado diferencia de cuadrados perfectos y en el cuarto el caso denominado trinomio cuadrado perfecto.

3.6.4. Registros audiovisuales.

Durante la aplicación de los instrumentos se realizaron algunas video grabaciones y se tomaron algunas fotografías como parte de evidencia de los procesos seguidos por los estudiantes y para observar la espontaneidad en sus respuestas y el lenguaje verbal utilizado en contraste con sus registros gráficos y escritos.

3.7. Plan de acción.

Durante la presente investigación se definieron 4 fases o momentos de aplicación de instrumentos y de recolección de información a partir de los diferentes registros de recopilación de datos.

1. Una fase diagnóstica en la cual se buscaba hacer reconocimiento de conocimientos previos, también sirvió como insumo esencial para la creación de los talleres que se aplicarían en las siguientes fases.
2. Una etapa de exploración, atendiendo a la selección tomada para esta investigación dentro del marco de E.p.C., utilizando un taller que se constituyó en el insumo para abordar la primera categoría y las cinco subcategorías propuestas.
3. Una etapa de investigación guiada, evidente en los talleres cuatro y cinco, en los que se abordan los dos casos de factorización incluidos en la presente propuesta.

4. Una etapa de proyecto final de síntesis, que de acuerdo con E.p.C. es la parte final de evidenciación de aprendizajes y que también se desarrolló en los talleres cuatro y cinco.

3.7.1. Estrategia de intervención.

Con el propósito de propiciar en los estudiantes la adquisición del significado que tiene la variable como número generalizado, así como de cada uno de los elementos que componen un polinomio dentro de los procesos de factorización, ***se diseñó, implementó y evaluó una unidad didáctica en el marco de E.p.C.***, atendiendo a las apreciaciones de Perkins (como se citó en Stone 1999), haciendo uso de las tres fases allí propuestas y partiendo de una encuesta de caracterización y de una prueba diagnóstica para reconocer presaberes que sirvieron como insumo para el diseño de las actividades incluidas dentro de la unidad didáctica.

La unidad diseñada, acudiendo a la postura de Rico (1997) y desde el marco de E.p.C., se propuso a partir de tres talleres, el primero como parte de la fase de exploración, en el que se partió de los números triangulares y los números cuadrados, como parte de los números figurados a que hace alusión Freudenthal (como se citó en Castro, 2013) y los dos siguientes como parte de la investigación guiada y del proyecto final de síntesis, involucrando los casos de factorización denominados diferencia de cuadrados perfectos y trinomio cuadrado perfecto.

Cabe aclarar que estos tres talleres permitieron a partir de las categorías y subcategorías planteadas determinar si los objetivos propuestos se alcanzaron. Los instrumentos presentados en la propuesta son:

Tabla No 8. Presentación general de estrategias de intervención.

No de taller	Fase	Nombre	Objetivo
1	Caracterización	Encuesta de caracterización	Conocer cercanía de los estudiantes con la matemática y conocer datos puntuales del grupo intervenido.
2	Diagnóstica	Taller diagnóstico	Determinar el manejo de la estructura aditiva de los números naturales, enteros y racionales, además, la reducción de términos semejantes.
3	Exploración	Números figurados	Identificar la comprensión que tienen los estudiantes de los elementos de un polinomio antes de ser intervenidos.
4	Investigación guiada y proyecto final de síntesis	Diferencia de cuadrados perfectos	Acercar a los estudiantes a la comprensión de los elementos de los polinomios que tienen la estructura de trinomios cuadrados perfectos.
5	Investigación guiada y proyecto final de síntesis	Trinomio cuadrado perfecto	Acercar y consolidar en los estudiantes a la comprensión de los elementos de los polinomios que tienen la estructura de trinomio cuadrado perfecto.

3.7.1.1. Actividad uno. Encuesta de caracterización.

Esta estrategia buscaba caracterizar a la población seleccionada, a la vez que daba la apertura a la investigación con el grupo foco de estudio. Para hacer esto posible se aplicó una encuesta al inicio de la investigación, cuando los estudiantes aún estaban en grado séptimo, la encuesta aplicada se presenta a continuación:

Responde las siguientes preguntas

1. ¿Cuántos años tienes? ___________
2. ¿Vienes del programa volver al colegio (aceleración)? Si ______ No ______
3. ¿Cuántos años llevas estudiando en el colegio? _______
4. ¿Vives con tu madre y tu padre?

   Con la Madre: Si ______ No ______

Con el Padre: Si ______ No ______

5. ¿Eres repitente? Si ______ No ______
6. ¿Te gusta la Matemática? Si ______ Regular ______ No ______
7. ¿Te consideras bueno para la Matemática? Si ______ Regular ______ No ______
8. ¿Haces tareas de Matemáticas? Si ______ Regular ______ No ______

Con las primeras cinco preguntas se buscaba ubicar a los estudiantes en un rango de edades, conocer un poco la antigüedad en el colegio, con quien viven y tener una primera impresión de su procedencia escolar; por otro lado, con las tres últimas preguntas referente a la cercanía que tienen los estudiantes hacia la Matemática desde diferentes visiones, en cuanto al gusto, el talento y el cumplimiento hacia la asignatura como elementos posibilitadores de alto rendimiento académico y de desarrollo de competencias.

Para que las respuestas fueran un poco más espontáneas, se pidió que no le escribieran su nombre y se recomendó que respondieran con total sinceridad, aclarándoles que el grupo sería intervenido con una propuesta didáctica que abriera la posibilidad de mejorar el gusto y el cumplimiento por las tareas de matemáticas, a la vez que se buscaría aumentar sus niveles de comprensión, potenciar sus talentos y mejorar el desempeño académico en la asignatura.

Naturalmente es importante comprender que las particularidades de cada individuo en cuanto a sus vivencias, redundan en los niveles de aceptación ante la escuela en su rol de estudiantes y más específicamente, para este caso en el campo de la Matemática

3.7.1.2. Actividad dos. Taller diagnóstico.

Objetivos del taller.

Con la aplicación de este taller se pretendía identificar qué procesos realizaban los estudiantes al sumar expresiones algebraicas con coeficientes pertenecientes al conjunto de los números naturales, de los enteros y de los racionales tanto homogéneos como heterogéneos, involucrando así algunos perímetros con términos semejantes y otros con términos diferentes. Para la verificación de procesos se hizo uso del concepto de perímetro y los polígonos involucrados fueron cuadrados y rectángulos.

Condiciones de presentación de la prueba e indicaciones relacionadas con su aplicación.

Se dieron las indicaciones generales de la actividad y se corroboró con los estudiantes que estaban claras las instrucciones, estas instrucciones fueron: trabajo individual, no dejar de responder a ninguna pregunta, el tiempo que tendrían para cada pregunta, que no podían preguntarle ni a sus compañeros ni al profesor, que luego participarían dando las opciones de respuesta. Una vez dadas estas instrucciones se realizó el siguiente procedimiento:

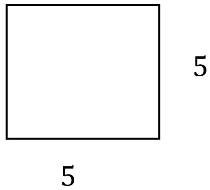
1. Se indagó con los estudiantes en participación abierta, cómo se halla el perímetro de un polígono, así como su significado y el proceso matemático a seguir, la conclusión, luego de las opiniones de los estudiantes, se construyó la siguiente definición la cual se escribió en el tablero:

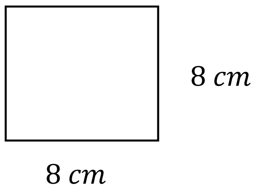
   "Teniendo en cuenta que el perímetro de un polígono se obtiene sumando las medidas de todos los lados que lo conforman, determina las medidas de los perímetros de los siguientes polígonos"

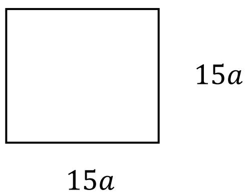
2. Se dibujó cada rectángulo en el tablero, (uno por vez) y se dio un tiempo de 3 minutos para calcular su respectivo perímetro en el cuaderno. Así se hizo uno a uno hasta completar los 10, sin borrar del tablero ningún gráfico. Para los ejercicios 7, 8 y 9 fue necesario dar más tiempo dado que se involucraban números racionales y esto generó más demora en la solución por lo cual en esos tres problemas se dieron 2 minutos más. Estos ejercicios se pudieron asignar ya que los estudiantes en clase de geometría habían realizado cálculos de diferentes polígonos y en álgebra ya se habían realizado ejercicios de reducción de términos semejantes.
3. Una vez terminados de hallar los 10 perímetros por los estudiantes, el docente, junto con la participación de los estudiantes realizó la corrección de cada uno, solicitándoles que no hicieran ninguna modificación a sus resultados y haciendo las aclaraciones pertinentes.
4. Al terminar de corregir cada problema se pidió que levantaran la mano quienes su respuesta coincidía con la del tablero.
5. Una vez corregidos los 10 problemas se pidió que levantaran la mano quienes no tuvieron ninguna respuesta correcta, luego quienes obtuvieron una, enseguida quienes dos y así sucesivamente.
6. Luego del conteo se pidió que hicieran las correcciones en los cuadernos y que describieran qué errores habían cometido.

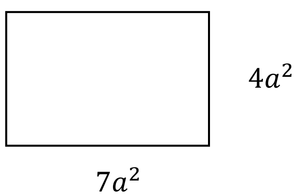
Durante el desarrollo de la actividad el docente estuvo pendiente del desempeño de los estudiantes, mirando sus procedimientos y esto permitía identificar errores y obtener conclusiones de su desempeño en cuanto a aciertos y maneras de actuar, las observaciones surgidas durante el ejercicio se iban registrando en el diario de campo.

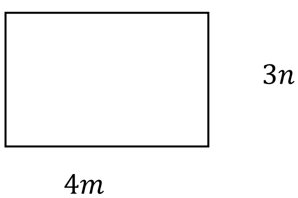
Los ejercicios de perímetro que los estudiantes debieron resolver se presentan a continuación:

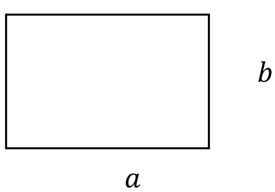
1.

5
5

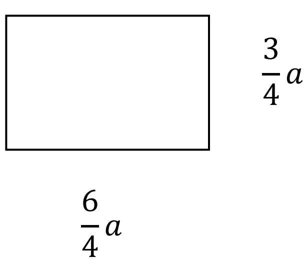
2.

$8\ cm$
$8\ cm$

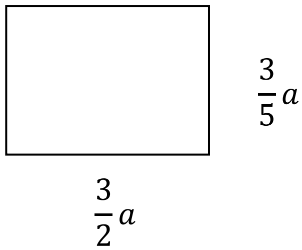
3.

$15a$
$15a$

4.

$4a^2$
$7a^2$

5.

$3n$
$4m$

6.

b
a

7.

$\frac{3}{4}a$
$\frac{6}{4}a$

8.

$\frac{3}{5}a$
$\frac{3}{2}a$

9.

$\frac{8}{3}b$

$\frac{9}{5}a$

10.

$2m - 2n$

$2m + 2n$

Figura 4. Taller de exploración. (creación propia)

Una vez aplicado el taller y observando los procesos seguidos por los estudiantes, así como los resultados obtenidos, para una próxima oportunidad sería conveniente involucrar valores con números irracionales y de racionales presentados como decimales, para explorar la operatividad de esta clase de números.

3.7.1.3. Estrategia tres. Taller de exploración.

Objetivos del taller.

En esta actividad se buscaba que los estudiantes a partir de una propuesta geométrica, valiéndose de los números figurados, reconocieran que existen situaciones que presentan regularidades gráficas que al transformarlas en estructuras numéricas, para este caso de números naturales, dichas regularidades se mantienen permitiendo hallar patrones que en el campo del álgebra se representan en expresiones algebraicas, posibilitando así la comprensión de la variable, en este caso como número generalizado. Una vez identificadas las regularidades, se buscaba que los estudiantes propusieran y verificaran expresiones algebraicas permitentes a cada situación planteada, para dar una primera aproximación del significado de letra como número generalizado, reconociendo además que se requirió de unos operadores, suma, división y potenciación respectivamente, para conseguir exitosamente la tarea planteada. Se concluye entonces, que este primer taller enmarcado en E.P.C. y que correspondía a la primera categoría de análisis planteada, se centró en el análisis, conceptualización y manipulación de las subcategorías variable, operadores y polinomio.

Condiciones de presentación de la prueba e indicaciones relacionadas con su aplicación.

1. Se pidió que libremente se organizaran grupos de 3 ó 4 estudiantes para realizar trabajo colaborativo.
2. Se aclaró que se estaba realizando la etapa de exploración dentro del marco de enseñanza para la comprensión y por tal razón no recibirían ninguna respuesta del docente de si lo que estaban haciendo era correcto o incorrecto, pero sí algunas aclaraciones de las instrucciones o reflexiones durante el proceso.
3. Se pidió que definieran responsabilidades, las cuales dentro del modelo de trabajo colaborativo se denominan roles de los estudiantes. Así, debía haber por lo menos una persona que realizara las indicaciones dadas en la guía (dibujos, cálculos y otras instrucciones), siendo el relator, otra persona debía sintetizar las respuestas que se iban a colocar en la hoja, una vez se hubieran hecho las intervenciones de todos los del grupo, este estudiante además sería el responsable de la comunicación entre el profesor y el equipo, asignándose como el líder y comunicador del grupo y otra persona anotaría en el cuaderno los procesos para luego compartirlos, además de verificar que todos los del grupo estén haciendo aportes a la tarea y propiciando que se mantenga el interés por la actividad, siendo entonces denominado el dinamizador del proceso. En los grupos en que hubiera cuatro estudiantes, el cuarto integrante sería encargado de controlar el tiempo, para que la actividad se realizara en los tiempos establecidos, denominándose vigía del tiempo.

4. Los grupos quedaron conformados de la siguiente manera: un grupo de dos personas, cuatro grupos de tres personas y cuatro grupos de cuatro personas, para un total de nueve grupos.

Presentación del taller.

Para iniciar, se entregó el taller y se enfatizó en el tópico generativo y en la meta de comprensión presentada, recordando que estos elementos hacen parte de la planeación dentro del modelo pedagógico institucional E.p.C., estos elementos son:

Tópico generativo.

¿Cómo al comprender las palabras, símbolos, letras, logotipos y otras señales aparentemente confusas que se presentan en el mundo académico, social e incluso cotidiano pueden representar beneficios en diferentes ámbitos de mi vida?

Metas de comprensión.

De contenido: El estudiante comprenderá que la letra de una expresión algebraica puede significar un número generalizado.

De método: El estudiante comprenderá que es necesario utilizar alguna estrategia válida para reducir términos semejantes, dadas las medidas de los lados de los rectángulos.

De propósito: El estudiante comprenderá que es necesario saber reducir términos semejantes de expresiones algebraicas para hallar el perímetro de un rectángulo.

De comunicación: El estudiante comprenderá la importancia de explicar los procesos seguidos para poder hallar el perímetro de un rectángulo cuyas medidas son expresiones algebraicas.

El taller se resolvió en dos sesiones de una hora y 50 minutos cada una. En la sesión uno se resolvió el taller sin que el docente realizara juicios de valor. En la sesión dos se socializaron las respuestas ante todo el curso y se analizaron las diferentes opciones dadas por los estudiantes. En los casos en que fue necesario, el docente hizo preguntas orientadoras que permitieran que los estudiantes llegaran a la construcción colectiva de la respuesta.

Los problemas presentados en el taller aparecen en el anexo 1

$$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15, \ldots T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, T_5 = 15 \ldots T_2 T_1 T_3 T_2 1 = 11 + 2$$
$$= 31 + 2 + 3 = 61 + 2 + 3 + 4 = 101 + 2 + 3 + 4 + 5$$
$$= 151,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\quad 25,\quad 35, \ldots C_1 = 1, C_2 = 4, C_3 = 9, C_4 = 16, C_5 = 25, C_6$$
$$= 36 \quad \ldots 1 = 11 + 3 = 41 + 3 + 5 = 91 + 3 + 5 + 7 = 161 + 3 + 5 + 7 + 9$$
$$= 25$$

A continuación, se presentan las preguntas orientadoras que se realizaron en la sesión dos, en la cual, los estudiantes ya habían resuelto el taller:

En esta sesión se buscaba que los estudiantes hicieran uso de las sumatorias que habían planteado para establecer regularidades entre los números resultantes y orientarlos a la consecución de expresiones algebraicas que permitieran llegar a las respuestas directamente sin realizar las sumas que para los valores grandes de n como 16, 28, 39 u otros aún mayores representaban sumas muy extensas y reconocer la expresión algebraica como una herramienta directa de solución en la que dicha expresión representaba un número generalizado.

1. Para hacer posible el objetivo de la sesión, se pidió a los estudiantes que escribieran las sumas asociadas a las situaciones, primero al interior de los grupos previamente conformados y luego se presentaran ante el curso.

2. Enseguida se pidió que explicaran cómo se podían describir estas sumas.

3. Luego se pidió que escribieran las sumas correspondientes a las posiciones de los números que debían dibujar.

4. Luego se pidió que buscaran multiplicaciones que dieran como resultado los números que correspondían a las respuestas.

5. Ahora se les pidió que hicieran el proceso con los valores que se debían averiguar sin la gráfica y se dieran cuenta porqué sus respuestas iniciales eran correctas o incorrectas.

6. Enseguida se pidió que representaran el número de la posición con una letra y luego, con las preguntas orientadoras que presentaran una expresión algebraica que resumiera cada problema. Algunas de estas preguntas orientadoras fueron: ¿si se tiene por ejemplo el número natural 6, cuál es el siguiente natural?, ¿Qué operación es válida realizar para obtener ese siguiente número?, ¿si se va a representar un número con una letra, cuál usualmente se utiliza para los naturales?, ¿Cómo se podría encontrar el siguiente número natural del representado por la letra?,¿Cuál sería el siguiente?, ¿Cuál el anterior?,¿Qué operación se realiza para duplicar un número?, ¿Cómo se haría el anterior proceso si el número está siendo representado con una letra?

7. Finalmente se pidió que en participación abierta respondieran qué significa una letra en una expresión algebraica y qué es una expresión algebraica.

3.7.1.4. Taller cuatro. Taller de diferencia de cuadrados perfectos.

Objetivos del taller.

Con este taller se pretendía que los estudiantes adquirieran destrezas para generalizar problemas aritméticos presentando como estrategia una propuesta geométrica en la que se exigía calcular áreas sombreadas de cuadrados para acercarlos a la comprensión del significado del caso de factorización denominado diferencia de cuadrados perfectos, en busca de que comprendieran su comportamiento, a la vez que se mostraban condiciones necesarias para que un polinomio, en este caso un binomio, cumpliera con las características requeridas para este caso de factorización. Así mismo se buscaba descubrir la equivalencia entre un binomio que cumplía con la estructura de diferencia de cuadrados perfectos y la expresión resultante luego de ser factorizada, para posibilitar la comprensión del concepto de factorización.

Con la parte final del taller se buscaba ejercitar en la factorización del caso en cuestión y evidenciar que hubo comprensión del mismo, esta parte del taller está enmarcada dentro de la fase de proyecto final de síntesis, involucrando no sólo ejercicios con exponentes pares, sino con otros números naturales pares o con exponentes que también incluyeran variables con coeficientes pares, indicando en la etapa de investigación que para estos casos, la raíz cuadrada de los exponentes correspondían a la mitad de los valores involucrados.

Siendo este instrumento el relacionado con la segunda categoría planteada, permitía reforzar el significado de las subcategorías variable y operadores, que en este caso fueron resta y producto, a la vez que permitía observar el tratamiento dado a las subcategorías coeficientes y exponentes, para posibilitar que los estudiantes descubrieran si significado en este tipo de ejercicios.

Diferencia de cuadrados perfectos.

La diferencia de cuadrados perfectos presentada por Bautista (2004) corresponde a expresiones algebraicas (en este caso binomios) en las que un término es positivo y el otro negativo, los cuales tienen raíz cuadrada entera. La diferencia de cuadrados perfectos (o con raíz cuadrada entera) se factoriza como el producto de dos binomios, uno como suma y otro como resta. Los términos de estos binomios son las raíces cuadradas de cada uno de los términos del binomio presentado al inicio. (p. 129)

Esta definición se resume en la expresión $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Condiciones de presentación de la prueba e indicaciones relacionadas con su aplicación.

1. Se pidió a los estudiantes que se organizaran en los grupos colaborativos previamente conformados y que tuvieran en cuenta que el trabajo debía ser lo más autónomo posible, dadas las dinámicas del grupo y teniendo en cuenta que había una nueva estudiante que recibió promoción anticipada y que a esta sesión asistieron dos alumnos que habían faltado durante la aplicación del anterior taller, se conformó un nuevo grupo, quedando esta vez el curso dividido en diez subgrupos.
2. Se recordó que había unos roles de estudiantes definidos y se invitó a definirlos de nuevo, recomendando que estos roles fueran rotados.
3. Se mencionó que este taller hacía parte de las fases de investigación guiada y de proyecto final de síntesis, acordes con el modelo pedagógico institucional y que, por tal razón, durante la fase de investigación guiada era posible hacer preguntas aclaratorias al docente, a la vez que éste haría intervenciones cuando observara que se estaban cometiendo errores procedimentales.
4. Previamente se había pedido que trajeran hojas cuadriculadas y tijeras para poder desarrollar una actividad incluida en el taller.

Presentación del problema.

Antes de iniciar con la solución del taller, se recordó cual era el tópico generativo y se hizo lectura de la meta de comprensión, pidiéndoles que la escribieran en el cuaderno.

Tópico generativo.

El tópico que en el momento de aplicación del taller se tenía planteado era ¿Qué papel desempeña la letra en las expresiones algebraicas?, sin embargo, reconociendo la necesidad de modificarlo para mejorar la presente propuesta y teniendo en cuenta las características propias que éste debe tener, dicho tópico tuvo la siguiente variación: ¿Cómo al comprender las palabras, símbolos, letras, logotipos y otras señales aparentemente confusas que se presentan en el mundo académico, social e incluso cotidiano pueden representar beneficios en diferentes ámbitos de mi vida?

Metas de comprensión.

De contenido: El estudiante comprenderá que las transformaciones de los casos de factorización son expresiones generalizadas que una vez verificadas se pueden aplicar a cualquier polinomio que cumpla con la estructura general.

De método: El estudiante comprenderá cuáles procesos debe seguir para factorizar un binomio que cumple con la estructura de diferencia de cuadrados perfectos.

De propósito: El estudiante comprenderá que los binomios que cumplen con la estructura de binomios cuadrados perfectos son equivalentes antes y después de ser factorizados.

De comunicación: El estudiante comprenderá que al explicar los procesos seguidos durante la factorización de diferencia de cuadrados, está evidenciando la adquisición del concepto.

La parte del taller correspondiente a la fase de investigación guiada se desarrolló en una sesión de clase de dos horas, mientras que la parte correspondiente a la fase de proyecto final de síntesis se debía resolver en casa. Esta tarea fue revisada en la siguiente clase y se hicieron aclaraciones y correcciones según lo observado por el docente durante la calificación.

Es necesario aclarar que, aunque no se mostró cómo la expresión $10^2 – 6^2 = (10 + 6) (10 – 6)$ y sus similares no se evidenciaban en la gráfica, sí se podían verificar numéricamente y hacían parte de la generalización que se pretendía verificar para posteriormente utilizarse.

Las actividades a realizar se presentan en el anexo 4

3.7.1.5. Taller cinco. Taller de trinomio cuadrado perfecto.

Objetivos del taller.

Con este taller se pretendía que los estudiantes fortalecieran destrezas para generalizar problemas aritméticos presentando como estrategia una propuesta numérica en la que se exigía en un primer momento identificar operaciones realizadas a ciertos números para luego ejercitar.

Dichas operaciones estaban indicadas como expresiones algebraicas y paso a paso conducían al algoritmo de la factorización de los trinomios cuadrados perfectos.

En un segundo plano, el taller buscaba acercar a los estudiantes al concepto de raíz cuadrada, tanto de números de diferentes conjuntos numéricos, como de expresiones algebraicas, para poder relacionarlas con los procesos anteriormente seguidos.

En tercer lugar, se incluyó una postura geométrica en la cual, a partir de manejo de áreas se llegaba a la equivalencia entre un binomio al cuadrado y su resultante, el trinomio cuadrado perfecto.

Con la parte final del taller se buscaba ejercitar en la factorización del caso en cuestión y evidenciar que hubo comprensión del mismo, esta parte del taller está enmarcada dentro de la fase de proyecto final de síntesis.

Correspondiendo este caso de factorización a la tercera categoría planteada, se buscaba entonces promover el uso adecuado del modelo de factorización, a través del fortalecimiento y análisis de los significados de los conceptos en construcción, es decir, delas subcategorías.

A continuación, se presenta la definición de trinomio cuadrado perfecto que se incluyó en el taller:

Trinomio cuadrado perfecto.

De acuerdo con Bautista (2004), se llama trinomio cuadrado perfecto al trinomio (polinomio de tres términos) tal que, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados. (p. 131)

Con los ejercicios planteados durante el taller se buscaba finalmente llegar a la equivalencia entre las expresiones $(a+b)^2$ vista como un binomio al cuadrado, y $a^2+2ab+b^2$. De igual forma sucedió con el binomio original en resta, es decir, $(a-b)^2$ y su equivalencia con la expresión $a^2-2ab+b^2$

Condiciones de presentación de la prueba e indicaciones relacionadas con su aplicación.

1. Se pidió a los estudiantes que se organizaran en los grupos colaborativos previamente conformados y que tuvieran en cuenta que el trabajo debía ser lo más autónomo posible. Para este taller nuevamente se organizaron los 10 grupos del taller anterior.
2. Una vez más se recordó que había unos roles de estudiantes definidos y se invitó a definirlos de nuevo, recomendando que estos roles fueran rotados.
3. Se mencionó que este taller hacía parte de las fases de investigación guiada y de proyecto final de síntesis, acordes con el modelo pedagógico institucional y que, por tal razón, durante la fase de investigación guiada era posible hacer preguntas aclaratorias al docente, a la vez que éste haría intervenciones cuando observara que se estaban cometiendo errores

procedimentales, sin embargo, teniendo en cuenta que el taller estaba dividido en diferentes momentos y que cada momento iniciaba con una modelación o ejemplificación, se requería hacer una revisión cuidadosa para comprender los procesos seguidos, además, se les invitó a reescribir algunos ejemplos y resolverlos para verificar los resultados e identificar realmente cuales eran las operaciones realizadas.

4. Dado que el taller estaba programado para dos sesiones, se aclaró que una vez finalizada la primera clase, se debía devolver el taller al docente, recomendando que en lo posible hubieran resuelto hasta el numeral 4, para continuar en la siguiente clase y poder seguir con el trabajo en los equipos colaborativos.
5. Previamente se había pedido que trajeran hojas iris y tijeras para poder desarrollar una actividad geométrica incluida en el taller.

Presentación del problema.

Una vez organizados los grupos e informadas las condiciones de presentación del taller, se revisó la parte del encabezado, retomando una vez más el tópico generativo y la meta de comprensión propuesta para el taller.

Tópico generativo.

¿Qué papel desempeña la letra en las expresiones algebraicas? Este fue el utilizado durante el taller, sin embargo, se ha modificado para mejorar la propuesta. El nuevo tópico planteado es: ¿Cómo al comprender las palabras, símbolos, letras, logotipos y otras señales aparentemente confusas que se presentan en el mundo académico, social e incluso cotidiano pueden representar beneficios en diferentes ámbitos de mi vida?

Metas de comprensión.

De contenido: El estudiante comprenderá que la letra de una expresión algebraica puede significar un número generalizado y utilizará este significado en procesos de factorización.

De método: El estudiante comprenderá los procesos a seguir para factorizar los trinomios que cumplen con la estructura de ser cuadrados perfectos.

De propósito: El estudiante comprenderá que los trinomios cuadrados perfectos pueden transformarse en expresiones equivalentes mediante procesos de factorización.

De comunicación: El estudiante comprenderá que al saber explicar los procesos de factorización de trinomios cuadrados perfectos, está aumentando su lenguaje en el campo del álgebra.

La parte del taller correspondiente a la fase de investigación guiada, aunque se había programado para dos sesiones de dos horas clase, se desarrolló en tres sesiones de clase de dos horas y una de una hora, para un total de 7 horas, por su parte, la fase de proyecto final de síntesis se debía resolver en casa. Esta tarea fue revisada en la siguiente clase y se hicieron aclaraciones y correcciones según lo observado por el docente durante la calificación.

Las actividades a realizar se presentan en el anexo 9

3.7.2. Momentos de intervención.

Para dar cumplimiento a esta propuesta, fue necesario diseñar un plan de intervención, así como unos momentos los cuales se relacionan en la siguiente tabla:

Tabla No. 9. Momentos de la intervención.

MOMENTOS	ENCUENTROS	ACTIVIDAD
UNO	Un encuentro	Diseño y aplicación de ejercicios de exploración frente a los niveles de comprensión de algunos significados de la variable algebraica
DOS	Tres semanas	Diseño de unidad didáctica a la luz de E.p.C.
TRES	El primer taller en una sesión y el segundo en dos sesiones.	Aplicación de dos instrumentos que orienten a procesos de factorización. el primero de diferencia de cuadrados y el segundo de trinomios cuadrado perfecto como parte de la investigación guiada.
CUATRO	Al finalizar cada sesión como trabajo autónomo con posterior retroalimentación de una sesión cada uno.	Ejercitación de los dos casos de factorización abordados y sustentación como parte del proyecto final de síntesis. Este trabajo se realizó en casa.
CINCO	Trabajo paralelo a todos los anteriores momentos.	Evaluación continua y evaluación de efectividad de unidad didáctica en contraste con los resultados de las prácticas previas a la propuesta, en concordancia por las características de la investigación acción participativa (I.A.P.).

A continuación, se indican los procesos a seguir durante los diferentes momentos, de cuyos resultados se hizo consignación y seguimiento detallado en un diario de campo.

En el momento uno se realizó un estudio de los resultados académicos parciales de los estudiantes durante el primer trimestre del año en curso, así mismo se elaboró un instrumento en el cual se pudiera determinar qué tan altos desempeños de comprensión habían alcanzado los estudiantes a partir de las prácticas en los procesos de enseñanza realizados hasta el momento. Esta correspondió a la etapa de exploración y se materializó en el primer taller de la unidad didáctica. (ver anexo 1)

En el momento dos y previo a una amplia consulta y documentación de la teoría, se seleccionaron algunos significados de la variable algebraica, centrado en el papel que ésta desempeña en los procesos de factorización vista como número generalizado para elaborar la unidad didáctica, de igual forma se revisaron a profundidad los dos casos de factorización que se incluirían en las fases de investigación guiada y proyecto final de síntesis.

Durante el tercer momento se implementó la unidad didáctica la cual está dividida en dos etapas, en la primera se hace la intervención hacia la deducción y verificación de las fórmulas que rigen los casos de factorización: diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto, a partir de una modelación geométrica y aritmética que orientó a los alumnos hacia la deducción y posterior aplicación de las fórmulas que rigen estos dos casos y poder explicar el significado de la letra en expresiones algebraicas factorizables; en la segunda etapa se hizo modelación por parte del docente de los métodos de factorización involucrados, la cual culminó en ejercitación de los estudiantes con acompañamiento del docente, constituyendo así la etapa de investigación guiada. Durante todo este momento se realizó el acompañamiento continuo para reconocer paso a paso posibles errores en la planeación o identificar inconvenientes presentados por los estudiantes con miras a tener insumos que permitieran subsanar estas dificultades a futuro, bien sea en el rediseño de la unidad o en diseños de propuestas venideras, claro está, si la propuesta resulta ser exitosa. (ver anexos 4 y 9)

Para el momento cuatro, en los mismos talleres se incluyó la fase de proyecto final de síntesis en la cual, los estudiantes autónomamente resolvieron varios ejercicios de factorización de los casos en cuestión y se realizaron preguntas que dieron cuenta de la comprensión adquirida por los estudiantes en cuanto a la temática abordada

Finalmente, en el momento cinco se evaluaron cada uno de los pasos planeados y ejecutados durante la unidad didáctica en las tres etapas de E.p.C. Es importante aclarar que este momento se prolongó debido a los ritmos de desarrollo de los estudiantes y a las dinámicas propias de la institución, por lo cual, al momento de la planeación no se habló de fechas estrictas como lo muestra este cronograma, sino más bien se presentó desde cantidad de encuentros con los estudiantes. Así, para la aplicación del último taller, aunque se había planeado para dos sesiones, fue necesario ampliarlo a 4 encuentros para poder culminar con las actividades planeadas.

Teniendo en cuenta que el momento cinco fue simultaneo con los otros momentos, es necesario describir cómo se realizó esta evaluación.

- Al desarrollar cada taller, el docente con la modalidad de observación y registro sistemático en el diario de campo, verificaba el uso de conocimientos previos a que acudían los estudiantes para verificar su pertinencia y así poder identificar la producción de respuestas que se constituían en nuevos conocimientos.
- En cuanto a las respuestas dadas a los problemas, el docente realizaba preguntas que los llevaran a la comprensión de la variable como número generalizado, así como del significado de polinomio y de cada elemento que lo conforma, dadas las estructuras propias de cada caso de factorización abordado, haciendo motivación continua para lograr los objetivos de las tareas presentadas, invitándolos a reconocer que estaban creciendo intelectualmente y celebrando sus hallazgos.

- Teniendo en cuenta que los grupos conformados eran de trabajo colaborativo, el docente continuamente invitaba a todos los integrantes del grupo a hacer sus aportes e incitaba a aquellos que encontraban soluciones correctas a que les explicaran a aquellos que aún no lo lograban, cómo habían llegado a sus deducciones, mostrándoles así que de una u otra forma estaban ayudando a mejorar su estado intelectual, así como el de sus compañeros.
- Los estudiantes recibían especial atención cuando lograban descubrir patrones o regularidades y se les invitaba a compartir sus hallazgos con el resto del curso para que corroboraran si sus razonamientos eran pertinentes y así terminar en una síntesis comprensiva.

CAPÍTULO CUATRO

4. Resultados y análisis de la investigación

El plan de análisis utilizado para identificar los comportamientos que tuvieron los estudiantes durante la propuesta, se centraron en procesos de triangulación en los cuales se contrastaban los aportes teóricos realizados por los diferentes autores con los procesos realizados por ellos en cada una de las tareas asignadas, los cuales resultaban tanto de la forma natural a que los llevaba cada situación, como de aquellos que aunque no surgían de una manera evidente, sí se podían verificar operativamente y generalizar, siendo esta una de las pretensiones de la propuesta.

4.1. Análisis de las observaciones obtenidas de cada una de las estrategias aplicadas

4.1.1. Taller uno. Encuesta de Caracterización.

Los resultados de la encuesta se presentan en el anexo 1 y el análisis se presenta a continuación:

1. ¿Cuántos años tienes?

   Con esta pregunta se puede observar que las edades estaban entre 12 y 15 y que la cantidad de estudiantes en cada edad es similar.

2. ¿Vienes del programa volver al colegio (aceleración)?

   Con esta pregunta se puede observar que, a pesar de contar con el programa para básica primaria, son pocos los estudiantes que permanecen en el colegio para continuar el bachillerato, una de las causas es que en varios casos se encuentran en extra-edad, debiendo continuar con la educación secundaria en otras instituciones que ofrecen bachillerato nocturno.

3. ¿Cuántos años llevas estudiando en el colegio?

Esta pregunta permite reconocer que el 38% de los estudiantes llevan 5 o más años en el colegio, el 23% llevan entre 3 y 4 años y el 36% llevan entre 1 y 2 años, con lo cual se concluye que, a pesar de haber varios estudiantes antiguos, también se identifica un alto número de población flotante.

4. ¿Vives con tu madre y tu padre?

   Esta pregunta permite reconocer que la mayoría de los estudiantes del curso viven con sus dos padres, aunque hay algunos que viven con sólo uno de los dos, principalmente con la madre y en varios hogares hay ausencia del padre.

5. ¿Eres repitente?

En esta gráfica se puede observar que hay un 24% de estudiantes que estaban repitiendo grado séptimo.

6. ¿Te gusta la Matemática?

   Esta pregunta permite reconocer que el gusto hacia la Matemática está distribuido equitativamente entre el sí, el regular y el no.

7. ¿Te consideras bueno para la Matemática?

   En esta pregunta se puede observar que un 42% de estudiantes consideran no tener talento para la Matemática.

8. ¿Haces tareas de Matemáticas?

   En esta pregunta se puede observar que el 55% de los estudiantes aceptan no cumplir puntualmente con todas sus tareas de Matemáticas.

Las anteriores preguntas permiten reconocer la cercanía que existe entre los estudiantes y la Matemática desde diferentes visiones, en cuanto al gusto, el talento y el cumplimiento hacia la asignatura como elementos posibilitadores de alto rendimiento académico y de desarrollo de competencias que a su vez redunden en un posible mejoramiento de la calidad de vida, que, además, para el caso particular, es el PEI de la Institución. Naturalmente es importante comprender que las particularidades de cada individuo en cuanto a sus vivencias, redundan en los niveles de aceptación ante la escuela en su rol de estudiantes y más específicamente, para este caso en el campo de la Matemática.

En conclusión, a pesar de las diversas problemáticas descritas y de la caracterización de la población, se hace una mirada optimista al reconocer la gran calidad humana que hay tanto en docentes y directivos como en estudiantes, sumado a los niveles normales de aprendizaje que muestran sus educandos, siendo posible plantear alternativas académicas que fortalezcan su educabilidad y potencien las operaciones mentales que se evidencien en la asignatura de Álgebra y que se refleje en otros campos del conocimiento y situaciones de su cotidianidad, principalmente teniendo en cuenta que su desempeño académico en este campo del conocimiento es bajo, que como muestran las tablas estadísticas de este estudio, el cumplimiento de tareas es poco y que el gusto hacia la asignatura es medio. Con el planteamiento de unidades didácticas en el marco de Enseñanza para la Comprensión, desde las diferentes etapas, se busca identificar si esta propuesta cumple con las expectativas de superación de las dificultades identificadas.

4.1.2. Taller dos. Taller diagnóstico.

Para el análisis de los resultados de este taller, primero se toman las respuestas correctas.

Respuestas correctas.

Las respuestas correctas se presentan en este análisis, pero los estudiantes no las conocieron durante la aplicación de la prueba, sólo al final cuando se realizó la retroalimentación.

1. 20 2. $32cm$ 3. $60a$ 4. $22a^2$

5. $8m + 6n$ 6. $2a + 2b$ 7. $\frac{18}{4}a$ ó $\frac{9}{2}a$ 8. $\frac{42}{10}a$ ó $\frac{21}{5}a$

9. $\frac{18}{5}a + \frac{16}{3}b$ 10. $8m$

La cantidad de estudiantes que presentaron la prueba fueron 18 niños y 17 niñas para un total de 35 evaluados.

La siguiente tabla muestra la cantidad de respuestas correctas en comparación con la cantidad de estudiantes que las respondieron:

Tabla No. 10. No de respuestas correctas vs cantidad de estudiantes del taller diagnóstico.

No de respuestas correctas	**Cantidad de estudiantes**	**Porcentaje**
0	0	0
1	3	8,5
2	4	11,4
3	6	17,1
4	15	42,8
5	4	11,4
6	3	8,5
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0
TOTAL	35	99,7

Análisis preliminar de resultados del taller de diagnóstico.

Los análisis del taller diagnóstico se presentan en la siguiente tabla.

Tabla No 11. Análisis de prueba diagnóstica.

Observaciones
Un alto porcentaje de estudiantes (85,7%) realiza la adición adecuadamente para hallar el perímetro de un polígono cuando los números involucrados son naturales y no hay unidades de medición, tal valor disminuye a un 74,2% cuando se coloca una unidad de medida, el valor sigue disminuyendo a un 68,5% cuando se colocan variables acompañando al coeficiente de exponente uno, sin embargo de nuevo aumenta cuando dicho exponente es 2, con un total de 71,4%, ahora, cuando esta variable es diferente, sólo un 2,8% consigue hacer el proceso correcto, en este caso, al plantear la suma correspondiente, es decir $4m + 3n + 4m + 3n$ e intentar darle solución, plantean la ecuación $4m + 3n + 4m + 3n = 14mn$, siendo este un error de conversión detectado por D´Amore (2009) en enseñanza de las matemáticas. Cuando el coeficiente corresponde a racionales homogéneos hay una sertividad del 20%, pero cuando los racionales son heterogéneos, sólo un 2,8% logra realizar adecuadamente el cálculo del perímetro, corroborando la postura de Socas (2007) en la que encuentra que los estudiantes tienden a realizar suma de numeradores entre sí y de denominadores entre sí, reconocido como un problema de error por ausencia de sentido, ubicado como problema de desarrollo semiótico que ha sido presentado como $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1+1}{x+y}$

Nota.

El docente durante toda la prueba pasaba por los escritorios para reconocer errores presentes durante la ejecución.

Antes de realizar las observaciones generales de la aplicación de la prueba y recordando que, aunque este no es un estudio cuantitativo, es interesante observar los resultados que muestra la tabla 11, la cual refleja que del total de estudiantes que presentan la prueba, y teniendo en cuenta que en la escala de valoración institucional, la nota mínima de aprobación es 3.5 sobre 5.0, es decir que se requeriría del 70% de respuestas correctas, se puede observar que ningún estudiante estaría aprobando la evaluación diagnóstica, sin embargo, también es importante aclarar que por ser una prueba diagnóstica, sólo se aplicó con la intención de recolectar información previa referente a la operatividad entre números naturales, enteros, racionales tanto homogéneos como heterogéneos, además de reducción de términos semejantes, que para el caso se ha utilizado la suma de monomios y binomios.

Observaciones generales del análisis.

- En aquellos casos en que se involucraban números racionales se presenta gran inseguridad en los estudiantes al darles solución.
- Una vez terminada la prueba y antes de hacer las correcciones se reconoce en los estudiantes la intención de buscar en los apuntes del cuaderno cuáles procesos se debían seguir.
- No hay separación de variables al reducir términos semejantes.
- En varios casos no se coloca la variable en las respuestas.
- Una de las instrucciones era no preguntar a nadie por los procesos a seguir, sin embargo, muchos estudiantes le consultaban al profesor si la respuesta era correcta o incorrecta, por lo tanto, no se les daba respuesta aún para no interferir en los procesos seguidos para las siguientes preguntas.
- Muchos estudiantes tendían a no dejar ver sus procesos y respuestas.
- En los ejercicios que involucraban racionales, tanto homogéneos como heterogéneos, la tendencia era sumar entre sí numeradores y entre sí denominadores.
- Los estudiantes muestran dificultades al realizar suma de expresiones algebraicas lo cual incide en su comprensión de la factorización porque la factorización exige entre otras operaciones realizar suma de expresiones algebraicas.

4.1.3. Taller tres. Taller de exploración.

Para conocer el taller ver el anexo 1

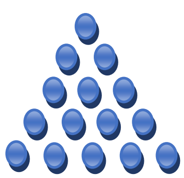
Sesión uno. Parte uno. Números triangulares.

$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15, \dots T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, T_5 = 15 \dots T_2 T_1 T_3 T_2 1 = 11 + 2 = 31 + 2 + 3 = 61 + 2 + 3 + 4 = 101 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

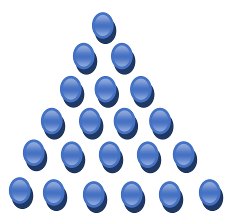
Respuestas correctas situación uno.

Es importante aclarar que estas respuestas correctas no estaban presentes en el taller, pero se presentan en esta parte de la investigación para facilitar la comprensión al lector.

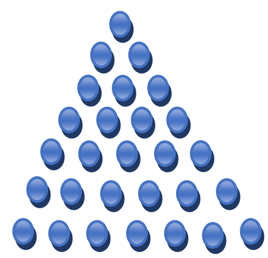
1a) Dibujos:



Posición 5



Posición 6



Posición 7

1a) Números: La cantidad de puntos de las posiciones 5, 6 y 7 son 15, 21 y 28 respectivamente.

1b) La cantidad de puntos de las posiciones 10, 15 y 20 son 55, 120 y 210, respectivamente.

1c) Se deben ubicar los puntos en forma triangular, agregando la cantidad de puntos en la nueva posición correspondiente al número de la posición con respecto a la posición anterior, así, para la posición 5 se agregan 5 puntos a partir de la posición 4, para la posición 6 se agregan 6 puntos a partir de la posición 5 y para la posición 7 se agregan 7 puntos a partir de la posición 6, siempre formando un triángulo, esta disposición se puede realizar en una nueva fila inferior o en una de las diagonales, asegurándose que quede en la parte superior un punto, en la fila de abajo 2, en la siguiente 3 y así sucesivamente, siempre encontrando un punto más con respecto al piso anterior.

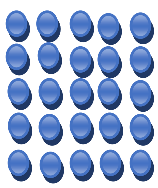
Para conocer las respuestas de los estudiantes, ver anexo 2.

Sesión uno. Parte dos. Números cuadrados.

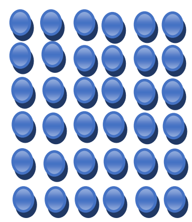
$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 35, \ldots C_1 = 1, C_2 = 4, C_3 = 9, C_4 = 16, C_5 = 25, C_6 = 36 \quad \ldots 1 = 11 + 3 = 41 + 3 + 5 = 91 + 3 + 5 + 7 = 161 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

Respuestas correctas situación dos.

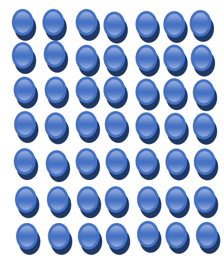
2a) Dibujos:



Posición 5



Posición 6



Posición 7

2a) Número ctivamente.

2b) La cantidad de puntos de las posiciones 12, 18 y 24 son 144, 324 y 576 respectivamente.

2c) Se deben ubicar los puntos formando un cuadrado, agregando la cantidad de puntos igual al número de la posición anterior tanto en la parte superior o inferior, como en uno de los laterales, para conservar la forma cuadrada se debe colocar el de la esquina que coincide con la fila y columna colocadas, así, para la posición 5, se parte del dibujo de la posición 4 y se agrega una fila en la parte superior o inferior con 4 puntos y una columna a la derecha o izquierda también con cuatro puntos, luego se coloca el punto de la esquina que coincide con las dos hileras colocadas, así mismo se hace en la posición 6 a partir de la 5 y de igual manera en la 7 a partir de la 6.

Para conocer las respuestas de los estudiantes ver anexo 3.

A***nálisis preliminares de resultados del taller de exploración.***

En la siguiente tabla se muestran los análisis de la primera situación del taller de exploración.

Tabla No 12. Análisis de taller de exploración, situación 1.

Observaciones
Todos los grupos realizaron las gráficas conservando la forma triangular y utilizando la cantidad correcta de puntos, en cuanto a la cantidad de puntos, 7 de los 9 grupos escribieron que la cantidad de puntos presentes en las posiciones indicadas eran 15, 21 y 28, siendo estas las respuestas correctas, así mismo, cuando no se requería del dibujo para dar respuestas a cantidad de puntos en posiciones grandes, la cantidad de respuestas iba disminuyendo cuanto mayor era el valor, respondiendo acertadamente los 10 grupos para la posición 10 y terminando en 4 grupos que lo hacen correctamente para la posición 20. Finalmente, aunque todos los grupos manifiestan haber comprendido la instrucción, el lenguaje común utilizado no es lo suficientemente claro para explicar cuál es el proceso o procesos válidos que se deben seguir.

A continuación, se presentan los análisis de la situación dos del taller de exploración.

Tabla No 13. Análisis de taller de exploración, situación 2.

Observaciones
Todos los grupos realizaron la gráfica conservando la forma cuadrada y utilizando la cantidad correcta de puntos, para el proceso puramente numérico, 6 de los 9 grupos escribieron que la cantidad de puntos presentes en las posiciones indicadas eran 25, 36 y 49, siendo estas las respuestas correctas y 3 grupos no escribieron cuál era la cantidad de puntos en estas 3 posiciones, aunque utilizaron la cantidad correspondiente en las gráficas. En cuanto a los números de posición grande, las cantidades de puntos correspondientes se colocaron acertadamente entre 8 y 10 grupos por ejercicio. Finalmente, en cuanto a la descripción del patrón, 6 grupos explican el proceso indicando que se debe multiplicar el número de la posición por él mismo, para esta pregunta, aunque esa forma es correcta para hallar el resultado, no corresponde a lo preguntado, pues se pedía indicar cómo se pasa de una posición a la siguiente; un grupo explicó que se debía hacer la suma de las posiciones y los otros 2 grupos explicaron correctamente el proceso seguido, aunque su lenguaje fue poco fluido.

Sesión dos. Parte uno. Números triangulares.

En esta sesión se buscaba que los estudiantes hicieran uso de las sumatorias que habían planteado para establecer regularidades entre los números resultantes y orientarlos a la consecución de expresiones algebraicas que permitieran llegar a las respuestas directamente sin realizar las sumas que para los valores grandes de n como 16, 28, 39 u otros aún mayores representaban sumas muy extensas y reconocer la expresión algebraica como una herramienta directa de solución en la que dicha expresión representaba un número generalizado.

1. Para hacer posible el objetivo de la sesión, se pidió a los estudiantes que escribieran las sumas asociadas a las situaciones, primero al interior de los grupos previamente conformados y luego se presentaran ante el curso. Los resultados luego de la socialización fueron:

Sumas asociadas.

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Estas sumas coincidieron con las presentadas por Lucas (como se cita en Castro, 2013), siendo así posible identificar que los estudiantes descubrieron el patrón numérico presente en los números triangulares.

2. Enseguida se pidió que explicaran cómo se podían describir estas sumas y las respuestas fueron:

Los números de 1 en 1 (primera respuesta)

Los números naturales seguidos (conclusión a que llegaron los estudiantes)

3. Luego se pidió que escribieran las sumas correspondientes a las posiciones de los números que debían dibujar, los resultados luego de la socialización fueron:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

4. Luego se pidió que buscaran multiplicaciones que dieran como resultado los números que correspondían a las respuestas, las conclusiones fueron:

Si el número de la posición a averiguar se multiplica por el siguiente número natural da el doble de la cantidad de puntos, por ejemplo, para la posición 5, al hacer $5 * 6 = 30$, $6 * 7 = 42$, $7 * 8 = 56$, para justificar esta respuesta dada por el grupo G6, acudieron a sumas que presento a continuación:

"El 30 es 15+15, el 42 es 21+21, el 56 es 28+28, el 72 es 36+36", y así sucesivamente.

Se les preguntó entonces que cuál operación se debía hacer a esos resultados para obtener el número que se necesitaba y el grupo G7 respondió que sacarle la mitad, haciendo el siguiente ejemplo: 72÷2=36, por tanto, se preguntó que matemáticamente cómo se expresaba esa operación y respondieron que dividiendo entre 2, luego el profesor les pidió que verificaran lo concluido con los números que ya conocían a partir de las gráficas y los resultados fueron:

$1 * 2 = 2$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $2 \div 2 = 1$

$2 * 3 = 6$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $6 \div 2 = 3$

$3 * 4 = 12$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $12 \div 2 = 6$

$4 * 5 = 20$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $20 \div 2 = 10$

$5 * 6 = 30$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $30 \div 2 = 15$

$6 * 7 = 42$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $42 \div 2 = 21$

$7 * 8 = 56$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $56 \div 2 = 28$

5. Ahora se les pidió que hicieran el proceso con los valores que se debían averiguar sin la gráfica y se dieran cuenta porqué sus respuestas iniciales eran correctas o incorrectas, los resultados fueron:

$10 * 11 = 110$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $110 \div 2 = 55$

$15 * 16 = 240$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $240 \div 2 = 120$

$20 * 21 = 420$, y dividiendo el resultado entre 2 se tiene que $420 \div 2 = 210$

6. Enseguida se pidió que representaran el número de la posición con una letra y luego, con las preguntas orientadoras que presentaran una expresión algebraica que resumiera cada problema, así. Los resultados fueron:

El grupo G4 asignó la letra x, en este momento se presentó dificultad para hallar la expresión algebraica porque no encontraban una expresión que indicara el siguiente número pues propusieron la letra y pero se les preguntó que cómo se garantizaba que y indicaba el siguiente número natural del que estaba representando la x, al no saber responder se les preguntó que cual era el siguiente número natural de varios números tales como 5, 9, 16, 25 y respondieron que 6, 10, 17, 26, enseguida se les preguntó que cómo se podían encontrar esos números a partir de los originales y respondieron que sumándoles 1, se pidió que escribieran dichas sumas y las respuestas dadas por los grupos G4, G5, G6, G7, G8, y G9, fueron $5 + 1 = 6,\ 9 + 1 = 10, 16 + 1 = 17, 25 + 1 = 26,$ luego se pidió que repitieran ese proceso con la letra x que habían presentado y la respuesta dada por los grupos G4, G5, G6, G7 y G8 fue $x + 1$, en ese momento se acordó que esa expresión resultante se colocaría entre paréntesis, es decir $(x + 1)$.

Ahora se les pidió que escribieran los dos valores en una sola expresión pero que recordaran que el resultado se debía dividir entre 2, así los grupos G1, G4 y G6 escribieron "$x * (x + 1) \div 2$", por tanto, se pidió que colocaran ese 2 que estaba dividiendo de otra manera, recordando que la división entre 2 normalmente se coloca de otra manera, para lo cual el grupo G6 escribió la expresión $\frac{x*(x+1)}{2}$, así, para obtener la expresión definitiva se les indicó que como se trataba de números naturales, en el campo de la matemática se acostumbraba utilizar en esos casos la letra n y que el operador multiplicación en este caso se podía suprimir, por lo tanto, la expresión resultante, presentada por el grupo G8 fue $\frac{n(n+1)}{2}$ llegando de esta manera a la respuesta buscada.

Sesión dos. Parte dos. Números cuadrados.

1. Sumas asociadas

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Esta suma coincide con la presentada por Fourrey y Wells, (como se cita en Castro, 2013).

2. Explicación de cómo pueden describirse estas sumas.

Los números de 2 en 2 (primera respuesta)

Los números impares (conclusión a que llegaron los estudiantes del grupo G1)

3. Sumas correspondientes a las posiciones de los números que debían dibujar.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$$

Estas sumas fueron presentadas por todos los grupos excepto por el G2

4. Multiplicaciones correspondientes a la respuesta de sumatoria

Corroboraron la respuesta que habían dado al inicio del ejercicio en el cual habían manifestado que si el número de la posición a averiguar se multiplicaba por él mismo se encontraba la respuesta, así que se les pidió que verificaran los resultados para los números que venían graficados en la guía y los que ellos graficaron, los resultados fueron: esta respuesta fue dada por los 9 grupos.

$$1 * 1 = 1$$

$$2 * 2 = 4$$

$$3 * 3 = 9$$

$$4 * 4 = 16$$

$$5 * 5 = 25$$

$$6 * 6 = 36$$

$$7 * 7 = 49$$

5. Continuación del proceso anterior con las posiciones que debían hallar sin dibujar.

$$12 * 12 = 144$$

$$18 * 18 = 324$$

$$24 * 24 = 576$$

6. Descripción del proceso seguido para hallar la expresión algebraica general.

Teniendo la experiencia del problema anterior, hicieron uso de la letra n e indicaron que la expresión algebraica que resumía el problema era la expresión nn, esta respuesta fue dada por el grupo G1 pero coincidieron en que cuando era la misma letra no se acostumbraba en notación algebraica escribir una misma letra dos veces, por lo tanto, el grupo G7 cambió la expresión por $n * n$ a lo que se les pidió que al ya saber que el operador de multiplicación se podía suprimir, buscaran otra forma de indicarlo, nuevamente llegando el grupo G7 a la expresión algebraica n^2 siendo esta la respuesta que se buscaba.

7. Finalmente se pidió que en participación abierta respondieran qué significa una letra en una expresión algebraica y qué significa una expresión algebraica, las respuestas fueron:

¿Qué significa una letra en una expresión algebraica?

Las respuestas de los estudiantes:

- Es cuando no se puede dar un número. (G2)

  En este caso le atribuyen a la letra el significado de incógnita.

- Es una combinación de letras y números. (G3)

  En este caso le atribuyen a la letra el significado de símbolo.

- Reemplaza un número determinado. (G9)

  En este caso le atribuyen a la letra el significado de número generalizado.

- Es un símbolo para sumar y restar o multiplicar. (G4)

  En este caso le atribuyen a la letra el significado de símbolo.

- Es una forma de expresar un número. (G6)
- Es el reemplazo de una letra por un número. (G5)
- Se utiliza para saber cuánto da un número. (G1)

  En estos tres casos le atribuyen a la letra el significado de número generalizado.

- Es la representación de figuras u objetos. (G7)

  En este caso le atribuyen a la letra el significado de símbolo.

- Acompaña al número, es algo que representa. (G8)

  En este caso le atribuyen a la letra el significado de símbolo.

La conclusión que reunió las diferentes opciones de respuesta y que se debió escribir en los cuadernos fue:

Es un símbolo que permite representar diferentes valores en un problema numérico que tiene variaciones pero que conserva una regularidad.

¿Qué significa una expresión algebraica?

Las respuestas de los estudiantes:

- Es una radicación de letras y números naturales. (G1)
- Es una operación que se utiliza en el álgebra. (G3)
- Es una manera de mostrar más fácil un número diferente. (G4)
- Es una fórmula algebraica. (G8)
- Es el resumen de una operación matemática que utiliza letras y números y que puede ayudar a responder problemas repetitivos de números que involucran diferentes valores que se deben hallar para números grandes o pequeños. (G7)

Los grupos G4 y G7 están entendiendo una expresión algebraica como una expresión que involucra una generalización.

Los grupos G1 y G8 están entendiendo la expresión algebraica como un objeto.

El grupo G3 está interpretando una expresión algebraica como un operador.

Teniendo estas respuestas se unificó una respuesta que fue:

Es una expresión matemática que contiene números y letras como resultado de un problema que presenta regularidades y que permite hallar valores desconocidos de una manera rápida y directa.

Observaciones generales del análisis.

1. El uso de las representaciones gráficas permitió identificar que las situaciones presentadas fueron comprendidas por los estudiantes, dado que graficaron correctamente las situaciones para n=5, n=6 y n=7.

2. Cuanto más cercanos eran los números involucrados en los problemas al número 1, los cálculos realizados por los estudiantes eran más acertados y cuanto mayores eran los valores, menor era la cantidad de grupos que respondían acertadamente.

3. Cuando a los estudiantes se les presentaban problemas en los que debían hacer representaciones gráficas, se percibía un alto grado de motivación.

4. Para responder la pregunta 1b, la mayor tendencia estaba encaminada a realizar la suma de los números naturales $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$ hasta la posición que se pretendía hallar, lo que permitió establecer que identificaron la suma asociada al problema, tal como lo presenta Lucas, (como se cita en Castro, 2013), sin embargo, la mayoría de casos en los que respondieron mal fue por errores en la solución de las respectivas sumas.

5. A pesar que las preguntas eran explícitas, varios grupos no supieron seguir instrucciones, tal es el caso de los grupos que no respondieron numéricamente a las preguntas 1a y 2a, así como al momento de explicar el comportamiento de los números cuadrados de la pregunta 2c. En estos casos fue necesario hacer la intervención del docente para explicar verbalmente las acciones que se esperaba cumplieran, sin embargo, invita a hacer la instrucción más explícita para evitar interpretaciones erradas que lleven a un incorrecto cumplimiento de la actividad, o a que decidan no realizarla.

6. El lenguaje común de los estudiantes es poco fluido al momento de explicar procesos matemáticos, lo cual contrasta con la comprensión evidenciada de los problemas durante la realización de las representaciones gráficas. Para evitar esta dificultad en futuras intervenciones, se hace necesario incluir en las instrucciones que continuamente estén explicando los procesos y

razonamientos seguidos y mostrarles cómo esto se puede traducir al lenguaje algebraico o matemático pertinente, incluso en situaciones aparentemente sencillas.

4.1.4. Taller cuatro. Taller de diferencia de cuadrados.

Para conocer el taller ver el anexo 4

Sesión uno. Parte uno. Numerales 1 a 11.

En esta parte de la sesión se dieron las indicaciones paso a paso para que los estudiantes iniciaran el proceso de generalización del caso de factorización diferencia de cuadrados perfectos.

Respuestas correctas.

Es importante aclarar que estas respuestas correctas no estaban presentes en el taller, pero se presentan en esta parte de la investigación para facilitar la comprensión al lector.

Tabla No 14. Respuestas correctas del taller de diferencia de cuadrados.

No pregunta	Respuesta	No pregunta	Respuesta	No pregunta	Respuesta
3	100 cuadros	7.1	64	8.4	16 cuadros
4	36 cuadros	7.2	Es el mismo resultado	8.5	84 cuadros
5	64 cuadros	7.3	El 10 del cuadrado grande o del exterior y el 6 del cuadrado pequeño o del interior.	8.6	$A_3 = 100 - 16 = 84$
6	$A_t = 100 - 36 = 64$	8.3	100 cuadros	8.7	$(10 + 4)(10 - 4)$

No pregunta	Respuesta
9	En este caso las respuestas correctas dependían de los valores que los estudiantes seleccionaran.
10	8 cm
11.3	64 cuadros
11.4	9 cuadros
11.5	55 cuadros
11.6	$A_3 = 64 - 9 = 55$
11.7	$(8 + 3)(8 - 3)$

Para ver las Respuestas de los estudiantes ver los anexos 5 y 6.

La pregunta 9 incluía valores libres por tanto no había una única respuesta, por lo tanto, se presentan en la siguiente tabla.

Tabla No 15. Respuestas de la pregunta 9 del taller de diferencia de cuadrados.

No Grupo	Respuestas
1	100 cuadrados en total, 25 sin colorear, 75 cuadrados coloreados, la primera expresión es $A_t = 100 - 25 = 75$ y la segunda expresión es $(10 + 5)(10 - 5) = 15 * 5 = 75$
2	100 cuadrados en total, 25 sin colorear, 75 cuadrados coloreados, la primera expresión es $A_t = 100 - 25 = 75$ y la segunda expresión es $(10 + 5)$
3	No responde la pregunta.
4	No responde la pregunta.
5	100 cuadrados en total, 64 sin colorear, 36 cuadrados coloreados, la primera expresión es $100 - 64 = 36$ y la segunda expresión es $(10 + 8)(10 - 8)$
6	100 cuadrados en total, 9 sin colorear, 91 cuadrados coloreados, en lugar de expresión indican que el resultado de la operación es 91 y para la última expresión dicen que A_3 es diferente.
7	100 cuadrados en total, 49 sin colorear, 51 cuadrados coloreados, la primera expresión es $100 - 49 = 51$ y la segunda expresión no la escriben.

No Grupo	Respuestas
8	100 cuadrados en total, 4 sin colorear, 96 cuadrados coloreados, la primera expresión no la escriben y la segunda tampoco.
9	100 cuadrados en total, 25 sin colorear, 75 cuadrados coloreados, la primera expresión es $100 - 25 = 75$ y la segunda no la escriben.
10	100 cuadrados en total, 64 sin colorear, 36 cuadrados coloreados, la primera expresión es $100 - 64 = 36$ y la segunda es $(10 + 8)(10 - 8)$

Sesión uno. Parte dos. Numerales 12 a 14.

En esta parte de la sesión se presentan preguntas que van encaminadas a que los estudiantes descubran las fórmulas involucradas en el caso de factorización y corroboren sus conocimientos a partir del planteamiento de expresiones algebraicas pertinentes.

Respuestas correctas.

No incluidas en el taller, pero presentadas acá para facilitar la lectura.

12a y 12b. Dado que, en este caso, al ser una pregunta abierta, existe variedad de posibilidades de explicación, por lo tanto, no se escribe una respuesta correcta, sólo se analizan las que los estudiantes dan, sin embargo, sí se puede afirmar que las dos igualdades son verdaderas.

13.9) Depende de los valores que los estudiantes hayan seleccionado.

13.10a) $8^2 - 6^2 = (8 + 6)(8 - 6)$

13.10b) $8^2 - 4^2 = (8 + 4)(8 - 4)$

14) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ o cualquier otra similar que involucre variables diferentes.

Para ver las Respuestas de los estudiantes ver anexos 7 y 8.

A***nálisis preliminares de resultados del taller de trinomio cuadrado perfecto.***

Tabla No 16. Análisis de respuestas del taller de trinomio cuadrado perfecto.

Observaciones
Entre 9 y 10 grupos responden adecuadamente, identificando la cantidad de cuadros totales de las figuras, de igual forma lo hicieron con los cuadros coloreados y sin colorear, realizando un conteo correcto de las situaciones. En cuanto a reemplazar valores en las restas respectivas, 8 grupos lograron la actividad con éxito, así mismo 8 grupos logran identificar la equivalencia entre los resultados de las dos expresiones operaciones indicadas. Para determinar la cantidad correspondiente a la operación $A_t = A_1 - A_2$, sólo 2 grupos escriben la expresión $A_t = 100 - 16 = 84$, siendo esta la respuesta correcta. 5 grupos escriben la expresión 100 – 16 = 84 y aunque no corresponde totalmente a la expresión pedida, sí cumple con ser una igualdad válida. Un grupo escribe la expresión $A_t = A_1 - A_2 = A_3$ que corresponde a la expresión original, sin haberse realizado la sustitución que era lo que se pretendía con la pregunta. Un grupo escribe 84 y aunque este es el resultado de la operación luego de hacer las sustituciones correspondientes, no es lo que se pidió. A la pregunta 8.7, 5 grupos escribieron la expresión (10+4)(10-4), siendo esta la respuesta correcta. Para las preguntas siguientes relacionadas con esta expresión general, entre 3 y 5 grupos llegaban a la respuesta correcta, con lo que se evidencia que por lo menos el 50% de los grupos no comprendieron la instrucción. En cuanto a las expresiones de la forma $10^2 - 6^2 = (10 + 6)\ (10 - 6)$, entre 2 y 7 grupos escribían la respuesta correcta, presentándose muy frecuentemente la tendencia a no contestar y unos pocos respondían incorrectamente.

Resultados generales del análisis.

1. Posiblemente este tipo de trabajo en el que se relacionan problemas numéricos (que corresponden a un contexto abstracto) con representaciones gráficas (que constituyen un contexto concreto) contribuye a que los estudiantes hagan procesos de generalización en los que se busca establecer un patrón que en el campo de la matemática puede representarse con una expresión algebraica, acercando al estudiante a la comprensión de la letra dentro de una expresión algebraica como un número generalizado. Esto se puede corroborar al observar los procesos correctos

seguidos por los estudiantes en los ejercicios, cuando se incluían cantidades pequeñas, sin embargo, se requiere fortalecer estos mismos procesos con valores mayores, siendo posible que se presenten más errores por evidenciar problemas de operatividad en sumas, restas y multiplicaciones.

2. Posiblemente hacer uso de problemas que permiten su modelación mediante sucesiones geométricas, tal y como lo manifiestan Cappelleti y García (2007) : “la construcción de figuras, promueven la anticipación de los alumnos, y permiten el establecimiento de relaciones entre distintos elementos de las figuras” permiten que los estudiantes se acerquen más fácilmente a una expresión generalizada la cual se representa con una expresión algebraica, principalmente porque estas expresiones permiten hacer procesos de verificación para n=1, n=2, n=3, n=4, y así sucesivamente y luego de realizar dichos procesos de verificación es posible encontrar valores desconocidos mayores, tales como n= 15, n=23, n= 35, y cualquier otro valor natural, además, al relacionarse con números naturales, muestra mayor seguridad en los estudiantes por ser cantidades que corresponden a números que ellos manipulan y comprenden su operatividad. Es importante aclarar que, aunque en la primera sesión, a pesar de aún no haber hablado de una expresión algebraica, los estudiantes buscaron llegar a una respuesta mediante sumas que respondían a patrones los cuales representaron con expresiones algebraicas.

Sesión dos.

En esta sesión, y luego de haber verificado el cumplimiento de la tarea, correspondiente a los ejercicios para practicar, presentes en la guía, se prestó especial atención a los procedimientos y razonamientos seguidos por los estudiantes durante la sesión anterior a los numerales 12, 13 y 14 de la fase de investigación guiada, así como a los ejercicios que el docente evidenció les habían causado mayor dificultad a los estudiantes para su solución, se empezó a analizar uno por uno los planteamientos en cuestión, y las observaciones las presento a continuación:

12. Explica las siguientes conclusiones y determina si son verdaderas o falsas.

12a. $10^2 - 6^2 = (10 + 6)\ (10 - 6)$

Primero se les preguntó que de donde habían salido el 10 y el 6 de la fórmula, a lo que respondieron que el 10 correspondía a las medidas del cuadrado grande que se había presentado en el primer ejercicio, y que el 6 correspondía a las medidas del cuadrado pequeño, es decir, el que se encontraba en la parte interior del grande.

Luego se les pidió que explicaran cómo se resolvían las operaciones indicadas, recordándoles que las soluciones se debían ir colocando debajo de cada operación; los grupos G1, G2, G4, G5, G6, G7, G8, G9 y G10 manifestaron que la respuesta era muy obvia, respondiendo que en la primera parte del igual sólo era resolver los respectivos cuadrados, es decir, $10^2 = 100$ y $6^2 = 36$, (observación del grupo G6) y para las operaciones que aparecían después del igual, sólo se debían sumar y restar respectivamente los dos números anteriormente operados pero sin el cuadrado, es decir, $10 + 6 = 16$ y $10 - 6 = 4$, (respuesta dada por el grupo G7). Para el siguiente nivel, antes del igual se debía realizar la resta, es decir, $100 - 36 = 64$y para después del igual, aunque inicialmente no tenían claro que al cerrar un paréntesis e inmediatamente abrir otro correspondía a una multiplicación (duda manifestada por los grupos G2, G3 y G8), dedujeron que esta era la operación pertinente y por tanto indicaron que era $16 * 4 = 64$. Concluyeron además que los resultados debían ser los mismos. El planteamiento resuelto entonces quedó de la siguiente manera:

$$10^2 - 6^2 = (10 + 6)(10 - 6)$$

$$100 - 36 = 16 * 4$$

$$64 = 64$$

Y para la segunda igualdad hicieron razonamientos similares, quedando como resultado, (respuesta dada por todos los grupos)

$$10^2 - 4^2 = (10 + 4)(10 - 4)$$

$$100 - 16 = 14 * 6$$

$$84 = 84$$

En ambos casos concluyeron que las igualdades eran verdaderas.

13. Haz conclusiones similares a las anteriores con los valores de los puntos 9 y 10.

Con esta pregunta afirmaron que el proceso era igual al anterior y que sólo debían cambiar los números por los que ellos habían seleccionado y que los resultados debían coincidir porque ya sabían que cada igualdad siempre iba a ser verdadera.

Luego se les pidió que repitieran el proceso, pero esta vez asegurándose que el primer número fuera menor que el segundo, y presentaron ejemplos como:

$6^2 - 10^2 = (6 + 10)(6 - 10)$ $4^2 - 9^2 = (4 + 9)(4 - 9)$ $3^2 - 7^2 = (3 + 7)(3 - 7)3^2 - 7 = (3 + 7)(3 - 7)$

Y al resolverlos realizaron los siguientes procesos:

$6^2 - 10^2 = (6 + 10)(6 - 10)$	$4^2 - 9^2 = (4 + 9)(4 - 9)$	$3^2 - 7^2 = (3 + 7)(3 - 7)$
$36 - 100 = 16 * 4$	$16 - 81 = 13 * 5$	$9 - 49 = 10 * 4$
$64 = 64$	$65 = 65$	$40 = 40$

Este error se presentó en todos los estudiantes, por lo tanto, concluyeron que en esos casos también se cumplía, al ver el docente el error, se les invitó a revisar qué pasaba con los signos, así que hicieron una nueva revisión y se dieron cuenta que los razonamientos eran incorrectos, por lo tanto, resolvieron de nuevo los ejercicios, obteniendo los siguientes resultados:

$6^2 - 10^2 = (6 + 10)(6 - 10)$	$4^2 - 9^2 = (4 + 9)(4 - 9)$	$3^2 - 7 = (3 + 7)(3 - 7)$
$36 - 100 = 16 * (-4)$	$16 - 81 = 13 * (-5)$	$9 - 49 = 10 * (-4)$
$-64 = -64$	$-65 = -65$	$-40 = -40$

Una vez terminado de resolverse cada caso, afirmaron que gráficamente y tal como se habían hecho en los ejemplos originales, era imposible resolverlos, porque no se podía dibujar un cuadrado grande dentro de uno pequeño (razonamiento realizado por todos los grupos excepto por el G3),así que se les aclaró que efectivamente ese razonamiento era cierto pero que igual notaran que numéricamente si se cumplía con la equivalencia de las igualdades, por tanto, era posible hacer generalización de la fórmula, aunque gráficamente no se cumpliera. En dado caso, quienes no identificaran esta situación, estarían evidenciando falta de comprensión ante conceptos abordados desde la aritmética como el de valor absoluto y de relaciones de orden entre números enteros.

14. Plantea una expresión algebraica que permita generalizar lo sucedido en las conclusiones de los ejercicios anteriores.

En este momento se escribieron en el tablero las diferentes respuestas dadas por los estudiantes, a saber:

1. $x_t = x_1 - x_2 = x_3$
2. $N^2 - X^2 = (N + X)(N - X)$
3. $z^2 - c^2 = (z + c)(z - c)$

4. $T^2 – y^2$ = (T + y) (T – y)
5. $10a^2 – 6a^2$ = ($10a^2 + 6a^2$)($10a^2 – 6a^2$)
6. $10x^2 – 4x^2$ = ($10x^2 + 4x^2$)($10x^2 – 4x^2$)
7. $x^2 – y^2$ = (x - y) (x + y)
8. $A^2 – J^2$ = (A + J) (A – J)
9. $S^2 – C^2$ = (S + C) (S – C)

Algunos estudiantes en participación libre descartaron la opción uno, argumentando que no cumplía con la estructura, de igual forma, otros descartaron las opciones 5 y 6, argumentando que los números de la primera parte de cada igualdad eran los mismos que estaban dentro de los paréntesis y que para poder hacerlo con números, los primeros debían tener raíz cuadrada. (Este hallazgo fue encontrado por dos estudiantes y los demás estuvieron de acuerdo con la afirmación, incluso quienes originalmente habían propuesto la expresión.

Enseguida observaron que las otras expresiones cumplían con la estructura general y que por tanto eran correctas, así que el docente indicó que para unificar criterios y cumplir con las letras que generalmente se utilizaban, se usaría en adelante la expresión:

$$a^2 – b^2 = (a + b) (a – b)$$

Una vez obtenida esta fórmula, se explicó que se estaba realizando una generalización, que era una de las posibilidades que brindaba el álgebra y que como podían haber observado, se cumplía para todos los ejercicios que cumplieran con esa estructura.

Habiendo realizado esta reflexión, se les preguntó que a qué se refería el cumplir con esta estructura y que lo relacionaran con el nombre del tema, así, 4 estudiantes concluyeron que los términos involucrados antes del igual siempre debían tener raíz cuadrada entera, es decir, ser cuadrados perfectos y que debían estar separados por un signo menos que representa una resta, concluyendo además que la palabra diferencia corresponde a una resta. Esta afirmación fue aceptada por el resto del grupo.

Enseguida se pasó a revisar algunos de los ejercicios presentes en la guía que les habían causado dificultad para resolverlos y se les mostró el tratamiento que se debía seguir. Los ejercicios abordados se presentan en las siguientes imágenes. Cabe aclarar que previamente se les había mostrado que obtener la raíz cuadrada de un exponente, correspondía a hallarle la mitad, por tanto, sólo se estaban incluyendo como exponentes números pares.

Resultados generales del análisis de la sesión dos.

1. El acompañamiento continuo, sumado a preguntas orientadoras pertinentes por parte del docente en procesos de regularidades aritméticas, posibilitan que los estudiantes reconozcan el papel que desempeñan las letras como número generalizado que representa un patrón.

2. Al presentar a los estudiantes problemas abstractos desde una perspectiva concreta o manipulable, haciendo uso de representaciones gráficas presentes en el campo de la Geometría, se acerca con mayor posibilidad de éxito a la consecución de expresiones algebraicas y por consiguiente a la transformación de problemas de un campo de patrones los cuales reflejan una regularidad que en este caso representan sucesiones gráficas adaptables a sucesiones aritméticas las cuales a su vez resultan de unas sumatorias. Para la situación uno se refiere a la sumatoria de los números naturales y para la situación dos se trata de la sumatoria de los números impares.

Situación uno: $\sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + (n+1) + \ldots$

Situación dos: $\sum_{i=1}^{n} n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n-1) + \ldots$

Resultados generales del análisis de la aplicación del taller.

- Las situaciones gráficas desde el campo de la geometría permitieron que los estudiantes hicieran un adecuado conteo o utilizaran otros mecanismos para hallar las áreas sombreadas de cuadrados inmersos en otros, acercándolos a la comprensión de la diferencia de cuadrados perfectos.
- Cuando el objeto geométrico utilizado se puede visibilizar o manipular, es muy probable que los estudiantes realicen adecuadamente las operaciones y procesos matemáticos indicados, sin embargo, cuando los estudiantes creen tener dominio de la situación, obvian pasos cometiendo errores en los cálculos, posiblemente por no conseguir hacer la imagen mental de la situación.
- Cuando los estudiantes realizan actividades que representan un patrón, lo analizan y verifican desde el campo de las matemáticas y comprenden los procesos que están siguiendo, es más probable que lleguen a generalizaciones y posiblemente hagan uso de ellas con más naturalidad y seguridad.
- Hubo varias preguntas que no fueron respondidas, posiblemente por falta de comprensión de la instrucción, o por falta de constancia que puede ser producto del cansancio o porque el tiempo no les alcanza.
- Cuando se realizan talleres escritos, es necesario verificar que la información y las instrucciones sean claras para que se minimice el riesgo de responder incorrectamente o de no responder y así poder detectar si hubo comprensión del tema abordado y ver si se alcanzaron los objetivos propuestos. Para poder hacer esta verificación, es recomendable preguntar qué se está pidiendo en cada instrucción para que éstas sean descritas, incluso de manera informal, para hacer las aclaraciones necesarias antes de iniciar la tarea.

- Abordar el caso de factorización denominado diferencia de cuadrados perfectos desde una visión geométrica posibilita la adquisición del algoritmo, posiblemente porque asocian la palabra "cuadrado" con el polígono que cumple con la definición, pero también con los números que tienen raíz cuadrada entera, sin embargo, es necesario recordar constantemente las características que deben cumplir los números involucrados, en este caso, que el primer número debe ser mayor que el segundo.
- Cuando a los estudiantes se les presentan situaciones matematizables desde estructuras fácilmente manipulables y verificables y por tanto de fácil comprensión, es más probable que se sientan motivados intelectualmente hacia la realización de la tarea y lleguen sin tantos inconvenientes a los resultados esperados.
- Cuando los estudiantes se afrontan a situaciones presentadas desde el campo de las matemáticas y éstos no tienen interiorizada la operatividad de los conjuntos numéricos involucrados, se aumenta la posibilidad de fracaso o de abandono en la tarea propuesta.
- Es muy frecuente en los estudiantes confundir el hallar la raíz cuadrada de un número dado con sacarle la mitad, por lo tanto, es necesario reforzarles continuamente estos dos conceptos y sus respectivos procedimientos y sobre todo verificar que están comprendiendo las diferencias.
- Cuando los estudiantes logran confrontar sus respuestas con las de sus compañeros, es viable que reconozcan sus errores y que evalúen los procesos propios y los del grupo.
- Al socializar las respuestas dadas por los estudiantes y promover la participación en cuanto a sus procesos, generando un ambiente de respeto y aceptación de la diferencia y los errores, es posible fortalecer la construcción de conocimiento, mostrando que del error también se aprende.

4.1.5. Taller cinco. Taller de trinomio cuadrado perfecto.

Para conocer el taller, ver el anexo 7

Sesión uno. Taller de trinomio cuadrado perfecto.

Para el análisis del presente instrumento, sólo se hará revisión de una situación correspondiente a los conjuntos numéricos a que pertenezcan, dado que los tratamientos son similares, sin embargo, de cada conjunto se presentaron varios ejercicios para ejercitar en su operatividad. Es necesario aclarar también que el taller estaba planeado para dos sesiones, pero fue necesario resolverlo en cuatro sesiones, y aunque hubo situaciones que los estudiantes no resolvieron, se les pedía que avanzaran dejando puntos en blanco para poder abordar todas las partes del taller.

R*espuestas correctas.*

Tabla No. 17. Respuestas correctas de actividad 1 del taller de trinomio cuadrado perfecto.

Pregunta	Columna 3	Columna 4	Columna 5	Columna 6	Columna 7	Columna 8	Columna 9
	$a+b$	a^2	b^2	$2ab$	a^2+b^2	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
3.1	15	9	144	72	153	225	225
3.2	1	36	49	-84	85	1	1
3.3	-2	25	49	-70	74	4	4
3.4	-16	81	49	126	130	256	256
3.5	$\frac{53}{42}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1369}{1764}$	$\frac{2809}{1764}$	$\frac{2809}{1764}$
3.6	$\frac{-13}{4}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{121}{4}$	$\frac{-99}{4}$	$\frac{565}{16}$	$\frac{169}{16}$	$\frac{169}{16}$
3.7	$\sqrt{5}+\sqrt{8}$	5	8	$2\sqrt{40}$	13	$13+2\sqrt{40}$	$13+2\sqrt{40}$
3.8	$\sqrt{6}-\sqrt{7}$	6	7	$-2\sqrt{42}$	13	$13-2\sqrt{42}$	$13-2\sqrt{42}$

Para conocer las respuestas de los estudiantes, ver anexos 10 al 17.

A*nálisis preliminares de sesión uno de resultados del taller de trinomio cuadrado perfecto.*

Los análisis de las respuestas del taller de trinomio cuadrado perfecto se presentan en las tablas de anexos N 18.

Sesión dos. Numerales 5 a 7.

Las preguntas involucradas en esta sesión estaban encaminadas a determinar si hubo comprensión en cuanto al concepto de raíz cuadrada, tanto de números como de expresiones algebraicas. Por otro lado, se abordaron equivalencias entre binomios elevados al cuadrado y su correspondiente solución de acuerdo con el algoritmo que los describe como trinomios cuadrados perfectos, estas equivalencias involucraron sólo números, utilizando naturales, enteros, racionales e irracionales.

Es importante aclarar que al inicio de esta sesión aún había varios grupos resolviendo ejercicios de los anteriormente analizados, por tanto, se les pidió que gastaran sólo unos pocos minutos en resolver el ejercicio que había quedado pendiente en la sesión anterior y avanzaran en los ejercicios que se analizarán a continuación, para evitar que se atrasaran y poder tener una perspectiva de todos los estilos de ejercicios que involucraba el taller.

Respuestas correctas.

Teniendo presente que se presentaron varios ejercicios que involucraban un mismo conjunto numérico, sólo se analizará uno de cada uno puesto que la atención se centró en el tratamiento que los estudiantes le dieron a cada ejercicio, se aclara además que estas respuestas no estaban en el taller, pero se presentan en esta sección para facilitar la lectura.

Tabla No. 18. Respuestas correctas a preguntas 5 a 7 del taller de trinomio cuadrado perfecto.

Pregunta	**Respuesta**	**Pregunta**	**Respuesta**
5.a	$\sqrt{49} = 7$	5.f	$\sqrt{x^2} = x =$ x
5.b	$\sqrt{121} = 11$	5.g	.$\sqrt{9y^4} = 3y^2$
5.c	$\sqrt{225} = 15$	5.h	$\sqrt{64a^8} = 8a^4$
5.d	$\sqrt{9} = 3$	5.i	$\sqrt{100a^{4n}m^{6n}} = 10a^{2n}m^{3n}$
5.e	$\sqrt{50}$ No tiene raiz cuadrada entera	5.j	$\sqrt{20a^3}$ No tiene raíz cuadrada entera y el exponente es impar

No pregunta	**Respuesta**
6.b.	$(9 + 15)^2 = 9^2 + 2 * 9 * 15 + 15^2 = 576$
6.c.	$(13 - 8)^2 = 13^2 - 2 * 13 * 8 + 8^2$=25
6.d.	$(6 - 10)^2 = 6^2 - 2 * 6 * 10 + 10^2$=16
6.g.	$(\frac{2}{3} + \frac{7}{2})^2$=$(\frac{2}{3})^2 + 2 * \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right) + (\frac{7}{2})^2$=$\frac{625}{36}$
6.i.	$(\frac{8}{3} - \frac{2}{5})^2$=$(\frac{8}{3})^2 - 2 * \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right) + (\frac{2}{5})^2$=$\frac{1156}{225}$
6.j.	$(\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 = \sqrt{5}^2$+2*$\sqrt{5}$*$\sqrt{8} + \sqrt{8}^2$=13+2$\sqrt{40}$
6.l.	$(\sqrt{12} - \sqrt{6})^2 = \sqrt{12}^2$ −2*$\sqrt{12}$*$\sqrt{6} + \sqrt{6}^2$=6−2$\sqrt{72}$
7.a.	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
7.b.	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Para conocer las respuestas de los estudiantes, ver los anexos 19 a 29.

A*nálisis preliminares de sesión dos de resultados del taller de trinomio cuadrado perfecto.*

Los análisis de la sesión dos del taller de trinomio cuadrado perfecto se presentan en las tablas del anexo 30.

Sesión 3. Taller de trinomio cuadrado perfecto.

En esta parte del taller se buscaba que, mediante una propuesta geométrica de áreas de cuadrados, los estudiantes llegaran a la deducción de la fórmula de trinomio cuadrado perfecto.

Es importante resaltar que en esta etapa del taller varios grupos estaban atrasados, por lo tanto, se les recomendó retomar la actividad desde el punto 8, para poder hacer análisis de la propuesta geométrica del trinomio a abordar. Esta situación invitó a reformular para futuras actividades la cantidad de ejercicios similares de cada caso para evitar su incumplimiento, o que respondan sin tomarse el tiempo necesario para hacer los análisis necesarios o que se presente desmotivación en los estudiantes.

También es necesario resaltar que están sesión duró una hora cátedra.

Respuestas correctas.

Tabla No. 19. Respuestas correctas a pregunta 8 de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No pregunta	8.a	8.b.	8.c.	8.e.
Respuesta	a^2	b^2	$ab \quad y \quad ab$	$a^2 + 2ab + b^2$

Para conocer las respuestas de los estudiantes, ver el anexo 31

A***nálisis preliminares de sesión tres de resultados del taller de trinomio cuadrado perfecto.***

Los análisis de la sesión tres del taller de trinomio cuadrado perfecto se presentan a continuación:

Tabla No 20. Respuestas de estudiantes a sesión 3 de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No pregunta	Observaciones
8a	8 grupos respondieron correctamente. 2 grupos no respondieron.
8b	5 grupos respondieron correctamente. 2 grupos respondieron de forma incorrecta. 3 grupos no respondieron.
8c	2 grupos respondieron correctamente. 5 grupos respondieron de forma incorrecta. 3 grupos no respondieron.
8e	2 grupos respondieron correctamente. 5 grupos respondieron de forma incorrecta. 3 grupos no respondieron.

Sesión 4. Taller de trinomio cuadrado perfecto.

En esta sesión se resolvió la parte del taller correspondiente a la fase de proyecto final de síntesis, en ella primero se realizó modelación de los procesos a seguir durante la factorización de trinomios cuadrados perfectos, luego se hicieron aclaraciones con respecto al tratamiento que se debe dar a cada ejercicio que se va a factorizar, así como la verificación de condiciones para poder reconocer si un ejercicio corresponde al caso de factorización en cuestión.

Para la resolución de estos ejercicios se hizo trabajo individual, en ella se aceptaba que hicieran preguntas a sus compañeros de grupo, pero en esencia debían trabajar solos; cuando se presentaba una duda que no fuera resuelta al interior de cada grupo, era posible preguntar al docente, quien no les respondía la duda, sino que les orientaba para que llegaran a la respuesta o al proceso requerido. Fueron muy pocas las dudas las cuales principalmente fueron con respecto al numeral

3 de esta sección, aunque con aclaraciones únicamente al literal a, porque en adelante continuaron con el trabajo sin hacer preguntas. Para agilizar el proceso, se les indicó que en este literal no recortaran los cuadrados y rectángulos, sino que los dibujaran en sus cuadernos.

Análisis preliminares de la fase de proyecto final de síntesis del taller cinco

Los estudiantes realizaron las factorizaciones adecuadamente, posiblemente porque los ejercicios presentados sólo incluían números cuya raíz cuadrada es menor o igual a 11, siendo estas unas cifras que ellos manejan en cuanto a raíz cuadrada se refiere.

Otra posible razón por la cual los estudiantes realizaron adecuadamente las factorizaciones indicadas, se debe a que los exponentes de las partes literales sólo fueron cuadrados.

Es notorio que una dificultad que se presenta para que los estudiantes resuelvan este tipo de ejercicios es que tienen muy mal manejo de las tablas de multiplicar, de esta forma, era evidente que aquellos estudiantes que resolvían rápidamente las factorizaciones, tenían un amplio dominio de las mismas.

Para subsanar los inconvenientes relacionados con el uso de las tablas de multiplicar, se les permitió que hicieran uso de las tablas que habitualmente traen los cuadernos en la parte de atrás, pero se les aclaró que no estaba permitido el uso de calculadora, así, para verificar las condiciones que debe cumplir un trinomio para que sea cuadrado perfecto, se pidió que elaboraran una tabla con las potencias cuadradas de los primeros 16 números naturales.

Resultados generales del taller número cinco.

1. Un alto porcentaje de estudiantes manipulan con naturalidad los números naturales orientados desde operaciones matemáticas sencillas abordadas desde el campo del álgebra, tales como $a + b$

o a^2, sin embargo, cuando se presentan estructuras operacionales más complejas tales como $a^2 + 2ab + b^2$ se reduce ampliamente esta cantidad de aciertos, por lo cual es notorio que se les dificulta realizar ejercicios con este tipo de expresiones al dificultarse hacer el debido tratamiento, invitando a tener en cuenta la postura de Duval (2006), en la que afirma que: "“se puede examinar la complejidad cognitiva del tratamiento, la clase específica de transformación que requiere cambiar el sistema semiótico usado mientras una actividad matemática se comienza o está en proceso”.

2. A pesar que los estudiantes evidencian comprensión por las operaciones matemáticas sencillas presentadas desde el campo del álgebra, presentan gran dificultad al afrontarse a tales operaciones desde el campo delos números racionales, dado que, tal como lo afirma Socas (como se citó en Delgado, 2011), los estudiantes realizan la estructura aditiva de la siguiente manera:

$\frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{1}{5+8}$ que lo extienden a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$ ó $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{1+1}{5+8}$ que lo extienden a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1+1}{x+y}$

3. Con respecto a la operatividad con números irracionales, también se presenta una constante de error en su operatividad, tal vez porque no se encuentran familiarizados con este conjunto numérico, esto se pudo observar al ver que fueron pocos los grupos que siguieron la modelación dada en la guía con este conjunto numérico y al pedirles a los estudiantes que justificaran sus procesos, argumentaron que sólo estaban siguiendo los ejemplos, pero que para ellos, estos procesos carecen de significado, siendo éste un problema mencionado por Duval (2009) en la primera parte de su paradoja, la cual reza: “ (…) por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos”. Esta

situación invita a fortalecer la operatividad con los números racionales e irracionales y sobre todo a planear ejercicios que evidencien su comprensión.

4. Cuando se les pide a los estudiantes que resuelvan situaciones o ejercicios en los cuales deben operar con conjuntos numéricos que no son de su dominio, prefieren dejar de lado la tarea, posiblemente porque al inicio optan por escribir los números, bien sea racionales o irracionales como decimales y luego observan que el proceso empieza a involucrar números con partes decimales muy extensas y pierden interés por culminar la tarea, mostrando que no tienen una comprensión semiótica de estos números, corroborando la apreciación de D´Amore (2009) en la que afirma que: " El estudiante se queda como bloqueado, como inhibido: no puede hacer más que confundir el "objeto" con su representación semiótica porque no se da cuenta, porque no lo sabe.

5. Los estudiantes son capaces de replicar procesos sencillos dados desde una instrucción algebraica que involucre radicación, pero cuando esta se complejiza cometen muchos errores, principalmente con los exponentes de las variables, evidenciando confusión entre sacarle la raíz cuadrada a un exponente pues en lugar de hallarle la mitad, más del 50% duplican dicho valor.

6. Un alto porcentaje de estudiantes reconoce la variable como un número generalizado y descubren regularidades o patrones, esto se evidenció cuando hicieron la construcción del significado de variable y de expresión algebraica, pero al deber formalizarlos presentan gran confusión, cometiendo muchos errores, tal vez porque no comprenden la coordinación que debe haber entre los dos conceptos, el simbólico dado por la expresión algebraica, y el numérico concreto dado por los números involucrados, presentándose así, tal como lo afirma Duval (1995) que: "sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin

ninguna relación entre ambos, incluso si son dos “contextos de representación” diferentes del mismo objeto”. (p. 145)

7. Los estudiantes carecen de vocabulario adecuado para comunicar sus procesos utilizando el lenguaje matemático adecuado, incluso muestran gran dificultad para expresarlo en lenguaje común.

8. Al operar con números enteros, los estudiantes presentan gran confusión, pues cada vez que requieren hacer uso de estos, incluso en la estructura aditiva, hacen uso de la ley de signos, desconociendo que ésta sólo aplica para la estructura multiplicativa.

9. Cuando los estudiantes deben potenciar números enteros negativos, olvidan que está presente la estructura multiplicativa y por tanto la ley de signos, operando con el valor absoluto del número y conservando el signo negativo.

10. Nuevamente se corrobora que los estudiantes presentan mayor efectividad al deducir generalizaciones presentadas desde el campo de la geometría, siempre y cuando se haga uso de elementos que puedan manipular, permitiendo que sea más viable la adquisición de conceptos aritméticos y algebraicos. En este caso, se hace esta afirmación al observar que los estudiantes evidenciaron comprensión del significado de la letra como un conjunto de números que cumplían con la estructura de trinomio cuadrado perfecto, así como de los coeficientes involucrados, junto con sus respectivos exponentes y los operadores que los acompañaban.

5. Hallazgos

- El implementar y evaluar una estrategia didáctica con los estudiantes del curso 903 del Colegio San Francisco I.E.D. sustentada en el marco de Enseñanza para la Comprensión, permitió mejorar parcialmente su comprensión frente a los conceptos de polinomio, así como de cada uno de los elementos que lo conforman y de sus estructuras en los procesos de factorización, dado que mejoraron los procesos de operatividad, aumentando la efectividad en procesos de factorización, reconociendo por ejemplo, que es necesario en la diferencia de cuadrados o en los trinomios cuadrados perfectos que los coeficientes tuvieran raíz cuadrada entera, así como la necesidad de que los exponentes de las letras fueran números pares y las condiciones que debían cumplir los operadores involucrados, pero mostraron dificultad para adquirir el concepto formal de cada uno de ellos.
- Al haber implementado la presente propuesta didáctica, fue posible reconocer que antes de la intervención, los estudiantes atribuían a la variable algebraica el significado de un número específico y luego de desarrollar los diferentes talleres, encontraron que ésta representaba un número generalizado como resultado de un proceso que respondía a patrones que se pueden representar mediante una estructura algebraica. El anterior hallazgo se refleja en las siguientes acciones realizadas por los estudiantes.
    - Se aumentó la cantidad de estudiantes que mejoraron su desempeño en el manejo de la letra asociada a la diferencia de cuadrados porque evidenciaron que expresiones como $10^2 – 6^2 = (10 + 6) (10 – 6)$, $10^2 – 4^2 = (10 + 4) (10 – 4)$, $10^2 – 5^2 = (10 + 5) (10 – 5)$, $8^2 – 3^2 = (8 + 3) (8 – 3)$, podían generalizarse con la expresión $x^2 – y^2 = (x - y) (x + y)$ que para el caso de factorización correspondiente se denota como $a^2 – b^2 = (a - b) (a + b)$.
    - De igual forma, pudieron deducir que expresiones como

$(12+7)^2 = 12^2 + 2*12*7 + 7^2$, $(9+15)^2 = 9^2 + 2*9*15 + 15^2$,

$(13-8)^2 = 13^2 - 2*13*8 + 8^2$ se podían generalizar como: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- El haber diseñado, implementado y evaluado una unidad didáctica a la luz de Enseñanza para la Comprensión, haciendo uso de modelos geométricos y numéricos, durante la etapa de exploración, permitió que los estudiantes reconocieran que las situaciones repetitivas, se pueden expresar con términos matemáticos que para el caso se representan mediante expresiones algebraicas, luego en la etapa de investigación guiada pudieron, a partir del ensayo y error, encontrar tales expresiones las cuales más adelante fueron utilizadas durante el proyecto final de síntesis al factorizar asertivamente los polinomios presentados, permitiéndoles identificar que las generalizaciones se materializaban en un polinomio, comprendiendo los pasos a seguir en procesos de factorización y las equivalencias respectivas de estos antes y después de realizar su transformación, acercándolos más a la comprensión del papel que desempeñan cada uno de sus elementos, a saber, el coeficiente, la letra, los exponentes y los operadores.
- Con el diseño e implementación de la presente propuesta didáctica, el docente investigador pudo evidenciar mejoras en sus prácticas de aula, ya que planeó las actividades con una intención más específica, en este caso fortalecer el significado de la letra en expresiones algebraicas, en contraste con prácticas anteriores en las que sólo se centraba en su operatividad y réplica de “algoritmos” , centrándose en mostrar cómo se cumplía cada caso de factorización sin verificar si se conseguía su comprensión; esto se reflejó en una mayor disposición de los estudiantes al afrontarse a las actividades propuestas, así como al haber elevado los resultados académicos de los mismos, como resultado de mayores niveles de comprensión, relacionados con los polinomios y los procesos de factorización. Esta afirmación surge de comparar los resultados académicos de los estudiantes, quienes al finalizar el año 2015 tenían un porcentaje

de reprobación de 32,9%, y un 41,7% estaban en nivel básico, frente a un 11,4% de reprobación al finalizar el primer trimestre académico y de 25,7 en nivel básico.

- Haber implementado una unidad didáctica desde el marco de E.p.C. se constituyó en una estrategia motivadora para los estudiantes, dado que se evidenció mayor interés por adquirir conocimiento, desarrollar destrezas y cumplir con tareas de manera más espontanea. Esta afirmación resulta de la apreciación del grupo G6, quienes manifiestan: "profesor, usted cambió su forma de hacer la clase y ahora nos sentimos más motivados y esperamos con alegría la siguiente clase de álgebra" , de igual manera con los otros grupos que aunque no manifestaron explícitamente sentirse más motivados, lo permitieron reconocer con su actitud de disposición, evidenciada en aumento de cumplimiento de tareas y de desarrollo de actividades de clase, así como en preguntas frecuentes con respecto a su desempeño. Adicional a esto, el marco de E.p.C. valora los aportes previos que hacen los estudiantes ante una nueva tarea, lo cual se reflejó también en la evaluación que ahora se implementó, en la cual, para esta etapa, aumentó ampliamente la participación, permitiendo reconocer en los estudiantes mayor motivación por reconocer que sus primeras impresiones eran muy importantes y valoradas durante el nuevo estilo de trabajo, además, resulta muy motivante para ellos notar que apreciaciones previas de algún tema que no conocían tenía varios aciertos.
- El trabajo colaborativo fue una estrategia que al implementarse en el aula mejoró los niveles de comprensión en los estudiantes, ya que les permitió compartir saberes, confrontarlos, enriquecerlos, transformarlos y validarlos, a la vez que se fortalecieron valores como la tolerancia, el respeto, la colaboración y el liderazgo, entre otros.
- Para promover la comprensión del significado de polinomio y de cada uno de sus elementos en los procesos de factorización, así como de la equivalencia que éstos presentan entre dicho

polinomio, antes y después de ser factorizados, es necesario acercar a los estudiantes al descubrimiento de los procesos que validan las generalizaciones ya establecidas desde la teoría en cuanto a los “métodos de factorización”, para que tomen sentido y sean utilizados por estos de forma natural y sean conscientes de la validez de cada uno de sus pasos.

6. Recomendaciones

- Se recomienda continuar con procesos de investigación en cuanto a los significados que los estudiantes dan a los polinomios y a cada uno de los términos que los conforman en busca de acercarlos a comprender la variable como número generalizado.
- Las estrategias implementadas en este proyecto de investigación cuentan con una propuesta geométrica para abordar el álgebra y dado que los estudiantes foco de estudio mostraron gran aceptación y avances en sus procesos, se recomienda abordarlas haciendo un continuo acompañamiento y con constante retroalimentación, principalmente si los grupos a los que se les va a aplicar manifiestan pocos niveles de autonomía.
- Dado que en el ámbito escolar es frecuente utilizar constantemente números naturales, enteros y racionales, también es necesario incluir con más fuerza el campo de los números irracionales para acercar más a los estudiantes al dominio de los números reales en todas sus dimensiones.
- La geometría es una rama de las matemáticas que presentó grandes niveles de aceptación en los estudiantes, por tanto, se recomienda incluirlos como estrategia para abordar problemas que surjan de contextos que permitan su relación y posibiliten la adquisición de nuevos conocimientos y los acerquen más a la comprensión de los diferentes objetos matemáticos, principalmente teniendo en cuenta que hacen parte de un mismo saber, el del campo de las matemáticas.
- Se recomienda presentar a los estudiantes el álgebra de una manera didáctica, puesto que permite que haya mayor aceptación de sus saberes y posibilita la adquisición de conocimientos y mayores niveles de comprensión.
- Se recomienda propiciar experiencias significativas a los estudiantes desde el campo del álgebra, ya que se aumenta las posibilidades de conseguir que estos realicen adecuadamente

procesos de una manera más natural y que los saberes adquiridos permanezcan por más tiempo en sus memorias, evitando así el cumplimiento de tareas de forma mecánica que fácilmente son olvidados.

- Es necesario planear estrategias que potencien en los estudiantes la comprensión de la operatividad entre números racionales, para posibilitar el éxito en el cumplimiento de tareas desde ramas de la matemática que involucran mayores grados de complejidad.
- Se recomienda hacer uso del marco de E.p.C., teniendo en cuenta que, además de ser organizada de una manera secuencial, brinda al estudiante la posibilidad de dejar ver sus presaberes y sus conocimientos, a la vez que le permite al docente identificar la adquisición de saberes y los avances en su comprensión, adicional a esto, motiva a cambiar las prácticas docentes en las cuales se valore más los conocimientos previos de los estudiantes, a la vez que se consolida y amplía la visión de las concepciones y creencias del docente.
- Implementar prácticas educativas haciendo uso del trabajo en equipo, posibilita avances cognitivos y sociales en los estudiantes, por tanto, es recomendable hacer uso de esta modalidad de trabajo para potenciar la formación de individuos íntegros, siendo esta una de las finalidades de la educación.
- A manera de autorreflexión, se recomienda continuar con el proceso educativo del mismo grupo de estudiantes a quienes se les aplique la estrategia y así poder evaluar sus avances, alcance, efectividad y la interiorización de conocimientos que se reflejen en las temáticas venideras, específicamente en las que tienen que ver con el uso de expresiones algebraicas como resultado de procesos de generalización y verificación de objetos y procesos matemáticos.

7. Reflexión pedagógica

Una de las principales tareas de un docente que ama su profesión, es buscar la transformación de sus prácticas en pro de hacer más agradable la permanencia de sus estudiantes en el aula, así, para que esto sea posible, se requiere tener una visión innovadora, con una mente abierta al cambio y con altos niveles de aceptación de la crítica, para aceptar que se tienen errores pero que estos se pueden disminuir.

Para hacer esto posible, es necesario autoevaluarse como docente, reconocer aciertos y desaciertos que frecuentemente se presentan, tanto en didácticas, como en procesos pedagógicos relacionados con la evaluación y el dominio de los saberes propios, con miras a transformar las prácticas educativas. Desde esta perspectiva, el haber realizado esta propuesta metodológica me permitió enriquecer mis fortalezas y reconocer algunas de mis falencias, para darme la posibilidad de presentar el álgebra de una manera más seductora a los estudiantes, en la que tomé antecedentes documentados que me brindaron variedad de posibilidades en cuanto a abordar temáticas desde el campo del álgebra, invitándome a reconocer errores que históricamente han presentado los estudiantes en cuanto a tratamiento de objetos matemáticos se refiere, pero también en cuanto a errores frecuentes de los docentes al abordar sus temáticas, sirviendo estos como punto de partida para la elaboración e implementación de la presente propuesta.

Teniendo en cuenta además que la educación es un ejercicio que a diario está evolucionando y que las generaciones cambian, se requiere que las prácticas educativas también cambien, pero para que estos cambios estén bien encaminados, es pertinente tener la disposición de escuchar los hallazgos que, desde diversas investigaciones y experiencias pedagógicas, puedan enriquecen los saberes propios, para ampliar la gama de posibilidades y no convertir el quehacer educativo en un ejercicio estático, sino que por el contrario sea tan dinámico que además de beneficiar el rol de estudiantes, también refresque al docente, dándole un nuevo aire a sus prácticas y aumente su gusto por la labor.

Es evidente que la educación pública está llena de limitantes que dificultan las pretensiones que se persiguen desde la escuela, están entre ellas las condiciones locativas, el hacinamiento, la falta de acompañamiento de las familias en los procesos educativos, la carencia de materiales óptimos para acercar a los estudiantes al conocimiento, entre otras dificultades que afectan tanto a estudiantes como a sus formadores, los profesores, pero dada esta realidad, el docente debe buscar alternativas que ayuden a mitigar esta situación y convertirse en agentes de cambio que le muestren a los estudiantes que pueden transformar su realidad y buscar lo que busca todo ser humano, ser feliz.

Como docente de matemáticas, y en pleno convencimiento de la belleza de la matemática y de la pedagogía, sé que es mi responsabilidad mostrar a mis estudiantes que a partir de ellas se puede mejorar el mundo, pero primero deben transformar su mundo y aceptar que su belleza no radica en saber más para ser más sino para ser mejor, mejor ser humano.

Al haber reconocido errores que desde procesos previos de investigación se han detectado en el campo del álgebra, fue posible prever dificultades que ayudaran a subsanar posibles dificultades que se presentaran durante la ejecución de la unidad didáctica a implementar, así, al reconocer, según lo planteado por Kieran y Filloy (1998), que los estudiantes tienen dificultades ante la comprensión de la igualdad, suponiendo que ésta siempre exige totalizar, me permitió prever esta problemática, teniendo en cuenta que para la factorización, el signo igual representa una equivalencia entre el polinomio antes y después de ser transformado.

De igual forma, los resultados de las pruebas PISA 2012 para Colombia y reconociendo que uno de los aspectos evaluados en éstas es la capacidad de generalizar, siendo poco evidente en las respuestas de los estudiantes, me permitió considerar que la presente propuesta de intervención es apropiada, teniendo en cuenta que en ella se motiva a que los estudiantes deduzcan los algoritmos de los casos de factorización abordados como producto de la generalización de las situaciones geométricas y numéricas que se les presentaron.

Por otro lado, haber tomado a Wagner, Vásquez, Hoyos y Gutiérrez (2014), me motivó a presentar la factorización de tal forma que facilitara en los estudiantes la comprensión de los conceptos matemáticos abordados.

De igual forma, las apreciaciones de Socas (2007) y D´Amore (2004), me acercaron al concepto de Semiótica, el cual era desconocido por mí y así poder indagar sobre los significados y significantes que los estudiantes percibían antes, durante y después de la aplicación de los diferentes instrumentos.

Por su parte, los aportes de Fandiño (2012), me permitieron reconocer que no sólo se trata de determinar si el estudiante resolvió bien o mal las tareas, sino de indagar cómo fue la comprensión de las temáticas trabajadas, así como de la comprensión y comunicación de los diferentes conceptos, invitándome a ampliar mi visión conceptual desde una perspectiva más didáctica.

Cabe acotar que el álgebra escolar, por años ha sido mitificada como una asignatura difícil y que presenta altos índices de reprobación, esta afirmación fue evidente al revisar los desempeños de los estudiantes al finalizar el año académico 2015, por tal razón es necesario cambiar esta visión y es justamente a partir de actividades lúdicas que acerquen al estudiante a la comprensión de los procesos que allí se involucran, que es posible aumentar los porcentajes de aprobación y más aún de un satisfactorio desempeño, el cual posiblemente se refleje en actividades futuras que requieran de su uso.

Otro valor agregado que se puede dar en los procesos de enseñanza y aprendizaje para acercar al estudiante al conocimiento algebraico, es cambiar la imagen que durante años se ha evidenciado en el profesor de matemáticas, mostrándose como un individuo que presenta la matemática de una forma "fría" en la que él es el único portador del conocimiento y transformando esta imagen en la de un ser humano que acepta errores, orienta, ayuda a aprender del error y reconoce que en los estudiantes también es posible hallar la excelencia, esto, claro está, sin perder la rigurosidad que por naturaleza tiene la matemática.

Como docente de matemáticas, el orientar a los estudiantes a "redescubrir" teorías algebraicas, representa grandes sentimientos de satisfacción, al aceptar que es más gratificante que los estudiantes hagan estos descubrimientos a que sea el docente quien le muestre la verdad absoluta hallada por investigadores de la matemática, adicional a esto, es más probable que estos aprendizajes perduren por más tiempo en la memoria de los estudiantes y acudan a ellos con más naturalidad en situaciones futuras y los reconozcan más fácilmente en problemas que permitan o requieran su uso. Desde esta perspectiva, me representa un reto el dejar de lado mis prácticas tradicionales en las que sólo mostraba cómo se seguía un algoritmo, una fórmula o un proceso, para seguir planeando actividades y talleres en los cuales motive a los estudiantes a encontrar estos algoritmos, fórmulas y procesos y a mostrarles formas variadas de llegar a estos descubrimientos, acompañados, en lo posible, por estrategias exploratorias, didácticas, dinámicas e innovadoras que les representen aprendizajes significativos; adicional a esto, es mi motivación dejar de lado la preocupación de abordar muchos temas, preocupándome mejor porque éstos disminuyan un poco pero sean más profundos y sobre todo, que permitan un mayor grado de comprensión.

Referentes bibliográficos

Alzate, T. (2015). *El diario de campo como mediación pedagógica en educación superior.* Universidad de Antioquia. Colombia.

Barrera, F., Maldonado, D. y Rodríguez, C. (2012). *Calidad de la educación básica y media en Colombia: diagnóstico y propuesta.* CEDE, Centro de Estudios sobre Desarrollo Económico, Universidad de los Andes. Colombia

Barriga, A. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* México D.F.: Editores Mc Graw Hill.

Bautista, M, Salgado, D., Nivia, L., Acosta, M. y Orjuela, J. (2004). *Álgebra y Geometría I.* Colombia. Editorial Santillana.

Bosch, M., Gascón, J. y Ruíz, M. (2015). *El problema didáctico del algebra elemental: Un análisis macro – ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico.* España: Redimat.

Cappelleti, G. y García, M. (2008). *Matemática Geometría. Aportes para la enseñanza. Nivel medio.* Ministerio de Educación. Buenos Aires Argentina.

Castro, E. (2013). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Universidad de Granada. España

Chica, S., Galvis, D. y Ramírez, A. (2009). *Determinantes del rendimiento académico en Colombia: Pruebas Icfes Saber 11° 2009.*

Collazos, C. y Mendoza, J. (2006). *Cómo aprovechar el "aprendizaje colaborativo" en el aula.* Revista Educación y Educadores. Universidad de la Sabana. 9.2, 61, 76.

D´Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución.* Barcelona. España. 35, 90-106

D´Amore, B. (2009). *Enseñanza de las matemáticas.* Revista científica. Colombia

D´Amore, B., Fandiño, M., Iori, M. y Matteuzzi, M. (2013). *Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval"*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 18.2, 177-212

Duval, R. (1995). *Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación.* La gaceta de la RSME. 9.1, 143-148

Fandiño, M. (2012). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la Matemática.* Universidad de Bologna. Italia.

Gavilán, P. (2011). *Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar. ¿Puede ayudar el aprendizaje cooperativo?* Universidad de Alcalá de Henares. España.

Godino, J., Batanero, C. y Fonto, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Universidad de Granada. España

Godino, J., Batanero, C. y Fonto, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Barcelona España

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES. (2013). *Colombia en pruebas pisa 2012 Informe nacional de resultados Resumen ejecutivo.* 8

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.* Revista de investigación y experiencias didácticas. 7, 229-240

Mena, M., Romagnoli, C. y Valdés, A. (2009). *El impacto del desarrollo de habilidades socio afectivas y éticas en la escuela.* Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en educación". 1, 1-21

Ministerio de Educación Nacional. (1994). L*ey 115 de 1994: artículo 5: Fines de la educación en Colombia.*

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie lineamientos curriculares. Matemáticas.*

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico OCDE. (2012). *El programa PISA de la OCDE Qué es y para qué sirve.* Francia. 15-16

Pérez, N. y Pekolj, M. (2009). *Aportes para lograr la comprensión en Matemática.*

Universidad Nacional de San Luis. Argentina.

Quintero, R., Ruiz, D. y Terán R. (2005). *Las interpretaciones del símbolo "X" en los polinomios.* Universidad de los Andes. Venezuela.

Rees, P., y Spark, F. (1998). *College Alebra.* Reverté ediciones S.A. México

Rico, L. (1997). *Los organizadores del currículo de matemáticas.* Universidad de Granada. España.

Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa.* Instituto colombiano para el fomento de la Educación superior, ICFES. Colombia.

Sierspinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education serie 2.* Great Britain: Series editor.

Silva, CH., Galvis, D. y Ramírez, A. (2009). *Determinantes del rendimiento académico en Colombia.* Revista Universidad EAFIT. 46, 48 - 72

Socas, M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico Semiótico. Revista de investigación en educación Matemática XI,* 19-52

Socas, M. (2011). *La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números: Revista de Didácticas de la Matemática, 77,*5-74

Stone, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión.* Buenos Aires, Argentina: Paidos.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2006). *¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan Matemáticas avanzadas?* México: Santillana.

Wagner, G., Vásquez, A., Hoyos, E. y Gutiérrez, H. (2014). *El álgebra Geométrica como mediadora en la enseñanza de la factorización y los productos notables.* Colombia.

ANEXOS

ANEXO 1

COLEGIO SAN FRANCISCO I.E.D.

PROCESO LÓGICO

TALLER DE ÁLGEBRA GRADO NOVENO

PROFESOR MILTON JAVIER FAJARDO M.

NOMBRE ________________________________CURSO __________FECHA _______________

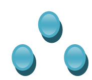
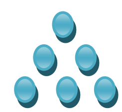
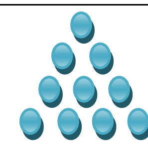
TÓPICO GENERATIVO: ¿Qué papel desempeña la letra en las expresiones algebraicas?

META DE COMPRENSIÓN: El estudiante comprenderá que la letra de una expresión algebraica puede significar un número generalizado

INSTRUCCIONES: Observa las siguientes situaciones y sigue las indicaciones dadas.

ETAPA DE EXPLORACIÓN

1. NÚMEROS TRIANGULARES

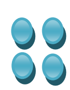
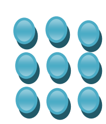
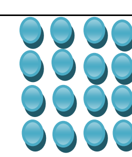
DIBUJO				
NÚMERO DE PUNTOS	1	3	6	10
POSICIÓN	1	2	3	4

a) Dibuja las posiciones 5, 6 y 7 e indica cuántos puntos hay en cada una.

b) Sin realizar los dibujos indica cuántos puntos hay en las posiciones 10, 15 y 20.

c) Explica cómo se pasa de una posición a la siguiente.

2. NÚMEROS CUADRADOS

DIBUJO				
NÚMERO DE PUNTOS	1	4	9	16
POSICIÓN	1	2	3	4

a) Dibuja las posiciones 5, 6 y 7 e indica cuántos puntos hay en cada una.

b) Sin realizar los dibujos indica cuántos puntos hay en las posiciones 12, 18 y 24.

c) Explica cómo se pasa de una posición a la siguiente.

ANEXO 2

Respuestas dadas por los estudiantes a la situación de números triangulares.

No grupo	**Respuesta 1a gráfica**	**Respuesta 1a numérica**	**Respuesta 1b**	**Respuesta 1c**
1	Disposición de puntos conservando forma triangular	No registrada	55, 119, 206	Se le suma el número siguiente para cambiar la posición.
2	Disposición de puntos conservando forma triangular	15, 21, 28	55, 119, 210	Cada vez que sube se quita un punto de un lado hasta llegar a uno.
3	Disposición de puntos conservando forma triangular	15, 21, 28	55, 70, 90	Se realiza la suma de las posiciones.
4	Disposición de puntos conservando forma triangular	15, 21, 28	55, 120, 210	Se aumentan como los números, si hay uno se aumentan 2 y si hay 2 se aumentan 3.
5	Disposición de puntos conservando forma triangular	15, 21, 28	55, 121, 155	Se coloca la posición que es y se va disminuyendo sucesivamente su valor hasta que quede en el mínimo que es uno.
6	Disposición de puntos conservando forma triangular	15, 21, 28	55, 110, 200	El número de puntos se suma en diagonal hacia abajo hacia la posición.
7	Disposición de puntos conservando forma triangular	No registrada	55, 120, 210	Se le agrega una fila con la misma cantidad de puntos que la anterior, pero con un punto más en la fila agregada.
8	Disposición de puntos conservando forma triangular	15, 21, 28	55, 130, 220	Se suma el número de puntos con el número de la posición del siguiente.
9	Disposición de puntos conservando forma triangular	15, 21, 28	55, 120, 210	Se aumenta una de ancho en la primera fila y se le coloca una entre dos.

ANEXO 3

Respuestas dadas por los estudiantes a la situación de números cuadrados.

No grupo	Respuesta 2a gráfica	Respuesta 2a numérica	Respuesta 2b	Respuesta 2c
1	Disposición de puntos conservando forma cuadrada	No registrada	144, 324, 576	Se multiplica la posición por sí misma y da el número de puntos.
2	Disposición de puntos conservando forma cuadrada	25, 36, 49	144, 324, 576	El número de posición se multiplica por él mismo, ejm 3x3 = 9
3	Disposición de puntos conservando forma cuadrada	25, 36, 49	24, 36, 48	Se realiza la suma d las posiciones.
4	Disposición de puntos conservando forma cuadrada	25, 36, 49	144, 324, 576	Se multiplica la misma posición, ejm 6x6 = 36, 7x7 = 49
5	Disposición de puntos conservando forma cuadrada	25, 36, 49	144, 324, 576	Se multiplica la columna vertical con la horizontal, ejm 5x5 =25, esta respuesta es para saber cuántos puntos hay pero para pasar de una posición a la otra se multiplica la posición por el mismo número.
6	Disposición de puntos conservando forma cuadrada	25, 36, 49	144, 324, 576	Se multiplica la posición, por ejm 2x2 = 4, 3x3 =9, 4x4 = 16, 5x5 =25
7	Disposición de puntos conservando forma cuadrada	No registrada	144, 324, 576	Se agrega un punto central más, también se agrega una fila y una columna de la cantidad igual a la inicial.
8	Disposición de puntos conservando forma cuadrada	25, 36, 49	144, 324, 576	Se multiplicaría la posición por sí misma.
9	Disposición de puntos conservando forma cuadrada	No registrada	144, 324, 576	Se aumenta una de largo y una de ancho.

ANEXO 4

COLEGIO SAN FRANCISCO I.E.D.
PROCESO LÓGICO
TALLER DE ÁLGEBRA GRADO NOVENO
PROFESOR MILTON JAVIER FAJARDO M.

NOMBRE ___________________________________ CURSO __________ FECHA ______________

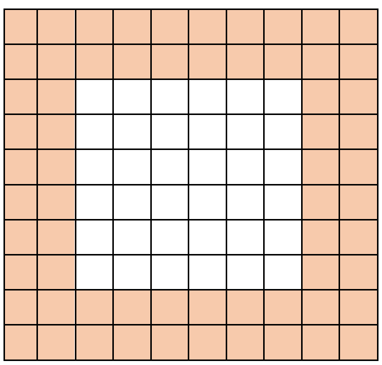
TÓPICO GENERATIVO: ¿Qué papel desempeña la letra en las expresiones algebraicas?

META DE COMPRENSIÓN: El estudiante comprenderá que las fórmulas de los casos de factorización son expresiones generalizadas que una vez verificadas se pueden aplicar a cualquier polinomio que cumpla con la estructura general.

INSTRUCCIONES: Sigue las indicaciones dadas y apunta en tu cuaderno los procesos seguidos.

ETAPA DE INVESTIGACIÓN GUIADA

DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS



1. Recorta un cuadrado de 10 cm de lado y dibuja en su interior una cuadrícula de 1 cm de lado como se muestra en la imagen.

2. Dibuja en su interior un cuadrado de 6 cm de lado haciendo que la cuadrícula coincida con los extremos de los lados.

3. Cuenta la cantidad de cuadros de 1 cm de lado que tiene el cuadrado grande. ¿Cuántos hay? _________ Estos se llamarán A_1

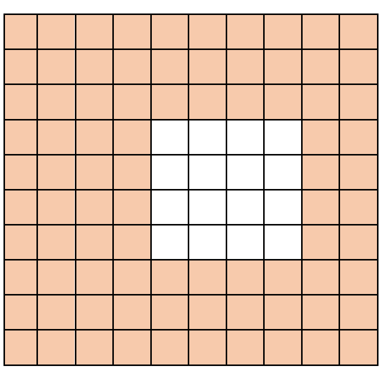
4. Cuenta la cantidad de cuadrados de 1 cm de lado que están sin colorear. ¿Cuántos hay? _________ Estos se llamarán A_2

5. Cuenta la cantidad de cuadrados de 1 cm de lado que están sombreados. ¿Cuántos hay? _________ Estos se llamarán A_3

6. Reemplaza los valores obtenidos en la siguiente expresión:

   $A_t = A_1 - A_2 = A_3$

   - ¿Los valores de la expresión en la resta son verdaderos?



7. Observa los valores que se colocan en la siguiente expresión

   $(10 + 6)(10 - 6)$

   - ¿Cuál es el resultado de esta operación? __________
   - ¿Qué observas que sucede con este resultado y el de A_3? ____
   - ¿De dónde crees que salen el 10 y el 6 que se están utilizando en los paréntesis? __________________________ ____

escribe los resultados al respaldo

10. Recorta 1 cm de cada lado del cuadrado grande asegurándote que de nuevo se forme un cuadrado. ¿Cuánto mide el lado de este nuevo cuadrado? ___________

11. Haz un proceso similar al delos pasos 3 al 7 y que la medida del cuadrado del interior mida 3 cm.

12. Explica las siguientes conclusiones y determina si son verdaderas o falsas

a. $10^2 – 6^2 = (10 + 6) (10 – 6)$

b. $10^2 – 4^2 = (10 + 4) (10 – 4)$

13. Haz conclusiones similares a las anteriores con los valores de los puntos 9 y 10.

14. Plantea una expresión algebraica que permita generalizar lo sucedido en las conclusiones de los ejercicios anteriores.

DEFINICIÓN:

La diferencia de cuadrados perfectos se factoriza como el producto de dos binomios, uno como suma y otro como resta. Los términos de estos binomios son las raíces cuadradas de cada uno de los términos de la diferencia planteada al principio.

EJERCICIOS RESUELTOS:	**EJERCICIOS PARA PRACTICAR**
Factorizar las siguientes expresiones **1). $4a^2b^2 - 9x^2y^4$** Raíz cuadrada de $4a^2b^2 = 2ab$ Raíz cuadrada $9x^2y^4 = 3xy^2$ Entonces $4a^2b^2 - 9x^2y^4 = (2ab + 3xy^2)(2ab - 3xy^2)$ **2). $\underline{25}m^2 - 16n^2$**	Factorizar las siguientes expresiones •$x^4 - y^6 =$ ………………………… •$a^8 - b^{12} =$ ………………………… •$a^2b^4 - x^4y^6 =$ ……………………… •$m^4b^{12} - n^8$ …………………….. •$x^2y^4z^2 - a^4b^4$ ---------------------

4 Raíz cuadrada de $\frac{25m^2}{4} = \frac{5m}{2}$ Raíz cuadrada de $16n^2 = 4n$ Entonces: $\frac{25m^2}{4} - 16n^2 = (\frac{5m}{2} + 4n)(\frac{5m}{2} + 4n)$ **3) $25x^2$ - 1** Raíz cuadrada de: $25x^2 = 5x$ Raíz cuadrada de: $1 = 1$ Entonces: $25x^2 = (5x + 1)(5x - 1)$	• $x^6y^2 - a^4b^4$ ----------------------- • $x^6y^2 - 9$ ----------------------- • $25x^4 - 9x^6$ ----------------------- • $16a^4 - 81b^6$ ------------------------ • $w^2 - 4a^6$ ………………………… • $25a^2b^4m^6 - 225m^8n^2$ ………………………… • $p^4r^4z^4 - 4m^4x^2$ ……………………… • $64p^6n^2 - 121m^8n^2$ …………………….. • $m^4 - 25p^{14}y^8$ ---------------------- • $1024a^4 - z^{20}$ ----------------------- • $256x^6n^{12} - 529m^{18}z^4$ ----------------------- • $9 – (m+n)^2$ ----------------------- • $1 – (x-2y)^2$

ANEXO 5

Respuestas de los estudiantes a las preguntas 3 a 8.4 del taller de diferencia de cuadrados.

No grupo	**Respuestas**								
	3	4	5	6	7.1	7.2	7.3	8.3	8.4
1	100	36	64	$A_t = 100 - 36 = 64$	64	Es el mismo ya que los valores son iguales	El 10 de la cantidad de cuadros en total de lado y el 6 del cuadro pequeño	100	16
2	100	36	64	$A_t = 100 - 36 = 64$	64	Quedan los valores igual	Sumando un lado de los sombreados y uno de los que no están sombreados	100	16
3	64	36	64	No responde	64	Se multiplica	De los cuadros	100	16
4	100	36	64	No responde	64	Que da el mismo resultado	El 10 sale del cuadro grande y el 6 del cuadro pequeño	100	16
5	100	36	64	No responde	16*4	Da el mismo resultado	El 10 del cuadrado grande y el 6 del cuadrado pequeño	100	16
6	100	36	64	$A_t = 100 - 36 = 64$	64	Es el mismo resultado	De dos cuadrículas	100	16
7	100	36	64	No responde	64	No responde	Del cuadro que se nos pidió realizar en el punto 1	100	16
8	100	36	64	No responde	64	Es el resultado de las preguntas 6 y 7	Porque la parte oscura mide 10*10 y la parte encerrada (blanca) es de 6*6	100	16
9	100	36	64	$A_t = 100 - 36 = 64$	16*4	Que si multiplicas 16*4 da 64, la respuesta A_3	El 10 sale por el cuadro 1, los negros de afuera y los 6 por los que no están pintados.	100	16
10	100	36	64	$A_t = 100 - 36 = 64$	64	Que el resultado es igual al A_3	El 10 y el 6 salen del cuadro	100	16

ANEXO 6

Respuestas de los estudiantes a las preguntas 8.5 a 11.7 del taller de diferencia de cuadrados.

No grupo	**Respuestas**								
	8.5	8.6	8.7	10	11.3	11.4	11.5	11.6	11.7
1	84	$A_t = 100 - 16 = 84$	(10+4)(10-4)	8cm	64	N.R	N.R	N.R	(8+3)(8-3)
2	84	$A_t = 100 - 16 = 84$	(10+4)(10-4)	8cm	N.R.	N.R	N.R	N.R	N.R.
3	84	N.R.	N.R.	79	N.R.	N.R	N.R	N.R	N.R.
4	84	$A_t = A_1 - A_2 = A_3$	(10+4)(10-4)	8cm	81	9	72	N.R.	(8+3)(8-3)
5	84	100 – 16 = 84	(10+4)(10-4)	8cm	64	9	55	64-9=55	(8+3)(8-3)
6	84	100 – 16 = 84	84	8cm	64	9	55	55	A_3 es igual
7	84	100 – 16 = 84	N.R.	8cm	64	9	55	64-9=55	N.R.
8	84	84	84	8cm	100	9	91	91	91
9	84	100 – 16 = 84	16-4	8cm	N.R.	N.R	N.R	N.R	N.R.
10	84	100 – 16 = 84	(10+4)(10-4)	8cm	100	9	91	100-9=91	(10+3) (10-3)

ANEXO 7

Respuestas de los estudiantes a las preguntas 12a a 13.10a del taller de diferencia de cuadrados.

No grupo	12a	12b	13.10.a
1	$10^2 - 6^2 = (10 + 6)(10 - 6)$ $100 - 36 = 16 * 4$ $64 = 64$	$10^2 - 4^2 = (10 + 4)(10 - 4)$ $100 - 16 = 14 * 6$ $84 = 84$	$10^2 - 5^2 = (10 + 5)(10 - 5)$ $100 - 25 = 15 * 5$ $75 = 75$
2	N.R.	N.R.	N.R.
3	N.R.	N.R.	N.R.
4	N.R	$10^2 - 4^2 = (10 + 4)(10 - 4)=84$ $14*6 \quad =84$	$8^2 - 3^2 = (8 + 3)(8 - 3)=55$ $11*5 \quad =55$
5	$10^2 - 6^2 = (10 + 6)(10 - 6) =64$ $16 * 4$	N.R.	$10^2 - 8^2 = (10 + 8)(10 - 85)$
6	$10^2 - 6^2 = (10 + 6)(10 - 6) =64$ $100 - 36 = 16 * 4$ $64 = 64$	$10^2 - 4^2 = (10 + 4)(10 - 4)$ $100 - 16 = 14 * 6$ $84 = 84$	$10^2 - 9^2 = (10 + 9)(10 - 9)$ $100 - 81 = 19*1$ $19 = 19$
7	Que son verdaderos	Que son verdaderos	$10^2 - 7^2 = (10 + 7)(10 - 7)=51$
8	$10^2 - 6^2 = (10 + 6)(10 - 6)$ $100 - 36 = 16 * 4$ $64 = 64$	$10^2 - 4^2 = (10 + 4)(10 - 4)$ $100 - 16 = 14 * 6$ $84 = 84$	$10^2 - 2^2 = (10 + 2)(10 - 2)$
9	$10^2 - 6^2 = (10 + 6)(10 - 6) =64$	$10^2 - 4^2 = (10 + 4)(10 - 4)=84$	$9^2 - 3^2 = (9 + 3)(9 - 3) = 72$
10	Es verdadera	Es verdadera	N.R.

ANEXO 8

Respuestas de los estudiantes a las preguntas 13.10b y 14 del taller de diferencia de cuadrados.

No grupo	***13.10.b***	***14***
1	$8^2 – 3^2 = (8 + 5) (8 – 5)$ $64 - 9 = 13 * 3$ $55 = 55$	$x_t = x_1 - x_2 = x_3$
2	N.R.	N.R.
3	N.R.	N.R.
4	N.R.	N.R.
5	$8^2 – 3^2 = (8 + 3) (8 – 3)$	$N^2 – X^2 = (N + X) (N – X)$ $z^2 – c^2 = (z + c) (z – c)$ $T^2 – y^2 = (T + y) (T – y)$
6	$8^2 – 3^2 = (8 + 3) (8 – 3)$ $64 – 9 = 11* 5$ $55 = 55$	$10a^2 – 6a^2 = (10a^2 + 6a^2)(10a^2 – 6a^2)$ $10x^2 – 4x^2 = (10x^2 + 4x^2)(10x^2 – 4x^2)$
7	$8^2 – 3^2 = (8 + 3) (8 – 3)=55$	$x^2 – y^2 = (x - y) (x + y)$
8	$10^2 – 8^2 = (10 + 8) (10 – 8)$	N.R.
9	N.R.	$A^2 – J^2 = (A + J) (A – J)$ $S^2 – C^2 = (S + C) (S – C)$
10	N.R.	N.R.

ANEXO 9

COLEGIO SAN FRANCISCO I.E.D.
PROCESO LÓGICO
TALLER DE ÁLGEBRA GRADO NOVENO
PROFESOR MILTON JAVIER FAJARDO M.

NOMBRE ______________________________CURSO __________FECHA ______________

TÓPICO GENERATIVO: ¿Qué papel desempeña la letra en las expresiones algebraicas?

META DE COMPRENSIÓN: El estudiante comprenderá que la letra de una expresión algebraica puede significar un número generalizado y utilizará este significado en procesos de factorización.

INSTRUCCIONES: Observa las siguientes situaciones y sigue las indicaciones dadas.

ETAPA INVESTIGACIÓN GUIADA

Observa el tratamiento que se da a los números de la siguiente tabla:

1. En la primera fila aparecen unas operaciones indicadas.

2. Las filas 2, 3, 4, 5 y 6 corresponden a ejemplos.

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4	Columna 5	Columna 6	Columna 7	Columna 8	Columna 9
a	b	$a+b$	a^2	b^2	$2ab$	a^2+b^2	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
5	3	5+3 =8	$5^2=25$	$3^2=9$	$2*5*3=30$	$25+9=34$	$(5+3)^2=8^2=64$	$25+30+9=64$
2	9	$2+9=11$	$2^2=4$	$9^2=81$	$2*2*9=36$	$4+81=85$	$(2+9)^2=11^2=121$	$4+36+81=121$
-3	7	$-3+7=4$	$(-3)^2=9$	$7^2=49$	$2*(-3)*7=-42$	$9+49=58$	$(-3+7)^2=4^2=16$	$9+(-42)+49=16$
-6	-8	$-6+(-8)=-14$	$(-6)^2=36$	$(-8)^2=64$	$2*(-6)*(-8)=96$	$36+64=100$	$(-6+(-8))^2=(-14)^2=196$	$36+96+64=196$

1	-10	$1+(-10) = -9$	$1^2 = 1$	$(-10)^2 = 100$	$2*1*(-10) = -20$	$1+100 = 101$	$(1+(-10))^2 = (-9)^2 = 81$	$1+(-20)+100 = 81$
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{5}+\frac{4}{3}$ $\frac{(2*3)+(5*4)}{5*3}$ $= \frac{6+20}{15} = \frac{26}{15}$	$\frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$	$\frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$	$2*\frac{2}{5}*\frac{4}{3} =$ $\frac{2*2*4}{5*3} = \frac{16}{15}$	$\frac{(4*9)+(25*16)}{25*9}$ $= \frac{36+400}{225} = \frac{436}{225}$	$(\frac{2}{5}+\frac{4}{3})^2 = (\frac{26}{15})^2$ $= \frac{676}{225}$	$\frac{4}{25}+\frac{16}{15}+\frac{16}{9} =$ $\frac{(9*4)+(15*16)+(25*16)}{225}$ $=$ $\frac{36+240+400}{225} = \frac{676}{225}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$(\sqrt{2})^2 = 2$	$(\sqrt{3})^2 = 3$	$2*\sqrt{2}*\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$	$2+3 = 5$	$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$	$2+2\sqrt{6}+3 = 5+2\sqrt{6}$

Aclaraciones de la columna 8 para el último ejemplo de la tabla:

- Al resolver $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3}) * (\sqrt{2}+\sqrt{3}) = (\sqrt{2}*\sqrt{2}) + (\sqrt{2}*\sqrt{3}) + (\sqrt{3}*\sqrt{2}) + (\sqrt{3}*\sqrt{3})$
$= 2+\sqrt{6}+\sqrt{6}+3 = 5+2\sqrt{6}$

Responde:

a) ¿Qué valores se pueden colocar en las columnas 1 y 2?

b) ¿Qué observas que sucede con los valores de las columnas 8 y 9?

3. Completa la tabla siguiendo los procesos de la tabla de ejemplos:

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4	Columna 5	Columna 6	Columna 7	Columna 8	Columna 9
a	b	$a+b$	a^2	b^2	$2ab$	a^2+b^2	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
3	12							

9	4							
-6	7							
-11	3							
5	-7							
8	-4							
-9	-7							
-10	-7							
$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{6}$							
$\frac{8}{5}$	$\frac{6}{4}$							
$\frac{9}{4}$	$\frac{-11}{2}$							
$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$							
$\sqrt{6}$	$-\sqrt{7}$							
$\sqrt{10}$	$-\sqrt{3}$							

4. Observa las siguientes operaciones:

$5^2 = 5 * 5 = 25$, además, $\sqrt{25} = \pm 5$ porque $5 * 5 = 25$ y también $(-5) * (-5) = 25$

$8^2 = 8 * 8 = 64$, además, $\sqrt{64} = \pm 8$ porque $8 * 8 = 64$ y también $(-8) * (-8) = 64$

$(-9)^2 = (-9) * (-9) = 81$, además, $\sqrt{81} = \pm 9$ porque $(-9) * (-9) = 81$ y también $9 * 9 = 81$

$(-4)^2 = (-4) * (-4) = 16$, además, $\sqrt{16} = \pm 4$ porque $(-4) * (-4) = 16$ y también $4 * 4 = 16$

$(\frac{7}{5})^2 = \left(\frac{7}{5}\right) * \left(\frac{7}{5}\right) = \frac{49}{25}$, además, $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \pm\frac{7}{5}$ porque $\frac{(-7)*(-7)}{(-5)*(-5)} = \frac{49}{25}$ y también $\frac{7*7}{5*5} = \frac{49}{25}$

$(-\frac{4}{7})^2 = \left(-\frac{4}{7}\right) * \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{16}{49}$, además, $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \pm\frac{4}{7}$ porque $\frac{(-4)*(-4)}{(-7)*(-7)} = \frac{16}{49}$ y también $\frac{4*4}{7*7} = \frac{16}{49}$

$(\sqrt{8})^2 = (\sqrt{8}) * (\sqrt{8}) = 8$, además, $\sqrt{8} = \pm\sqrt{8}$ porque $(-\sqrt{8}) * (-\sqrt{8}) = 8$ y también $(\sqrt{8}) * (\sqrt{8}) = 8$

$(-\sqrt{10})^2 = (-\sqrt{10}) * (-\sqrt{10}) = 10$, además, $\sqrt{10} = \pm\sqrt{10}$ porque $(-\sqrt{10}) * (-\sqrt{10}) = 10$ y también $(\sqrt{10}) * (\sqrt{10}) = 10$

Ahora veámoslo con letras:

$4m * 4m = 16m^2$, además, $\sqrt{16m^2} = 4m$

$5n^2 * 5n^2 = 25n^4$, además, $\sqrt{25n^4} = 5n^2$

$9xy^3 * 9xy^3 = 81x^2y^6$, además, $\sqrt{81x^2y^6} = 9xy^3$

$ab^{2m} * ab^{2m} = a^2b^{4m}$, además, $\sqrt{a^2b^{4m}} = ab^{2m}$

5. Calcula las siguientes raíces cuadradas, a las expresiones cuyo valor no sea un número entero, explica por qué no es posible hallarlas:

a) $\sqrt{49} =$ ___ b) $\sqrt{121} =$ ___ c) $\sqrt{225} =$ ___ d) $\sqrt{9} =$ ___ e) $\sqrt{50} =$ ___

f) $\sqrt{x^2} =$ ___ g) $\sqrt{9y^4} =$ ___ h) $\sqrt{64a^8} =$ ___ i) $\sqrt{100a^{4n}m^{6n}} =$ ___ j) $\sqrt{20a^3} =$ ___

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Se llama ***trinomio cuadrado perfecto*** al trinomio (polinomio de tres términos) tal que, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

6. Verifica las siguientes igualdades como la del ejemplo. Observa que las soluciones se van colocando debajo

a) $(12+7)^2 = 12^2 + 2*12*7 + 7^2$

$19^2 \quad = 144 + \quad 168 \quad + 49$

$361 \quad = \quad 361$

b) $(9+15)^2 = 9^2 + 2*9*15 + 15^2$

c) $(13-8)^2 = 13^2 - 2*13*8 + 8^2$

d) $(6-10)^2 = 6^2 - 2*6*10 + 10^2$

e) $(12+4)^2 =$

f) $(11-5)^2 =$

g) $(\frac{2}{3}+\frac{7}{2})^2 =$

h) $(\frac{5}{6}+\frac{8}{3})^2 =$

i) $(\frac{8}{3}-\frac{2}{5})^2 =$

j) $(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2=$

k) $(\sqrt{10}+\sqrt{7})^2=$

l) $(\sqrt{12}-\sqrt{6})^2=$

7. Considerando los ejemplos anteriores, propón expresiones algebraicas equivalentes para las siguientes expresiones; justifica tus respuestas.

a) $(a+b)^2 =$ ________________________________

b) $(a-b)^2 =$ ________________________________

8. Realiza la siguiente práctica que te permitirá comprobar las deducciones del punto 7 desde una visión geométrica:

Dibuja en hoja aparte y recorta las siguientes figuras:

figura 1 figura 2 figura 3 figura 4

Verificación de la expresión de $(a+b)^2$

Para verificar esta expresión ten en cuenta las siguientes indicaciones y responde las respectivas preguntas:

a) Del cuadrado grande (figura 1), diremos que la medida de su lado es a, ahora, teniendo en cuenta que el área de un cuadrado se halla multiplicando su base por su altura, es decir, A=b*h, el área de dicho cuadrado que la llamaremos A_1 es: $A_1=$ _________
b) Del cuadrado pequeño (figura 2), diremos que la medida de su lado es b, por lo tanto, el área de dicho cuadrado que llamaremos A_4 es: $A_4=$ ____
c) Las figuras 3 y 4 que corresponden a dos rectángulos iguales, tienen como altura la medida del cuadrado de la figura 1, es decir a y su base es igual a la medida del lado del cuadrado de la figura 2, es decir b, ahora, teniendo en cuenta que el área de un rectángulo también se halla multiplicando su base por su altura, por lo tanto, sus áreas que llamaremos A_2 y A_3, respectivamente son: $A_2=$ _______ $A_3=$ _______

d) Ubica las figuras unas al lado de las otras sin sobreponer de tal forma que se forme un cuadrado tal como lo muestra la siguiente imagen:

e) La medida del lado del cuadrado formado será $a + b$, por lo tanto, el área de este nuevo cuadrado a la que llamaremos A_T será $(a + b) * (a + b)$ o también $(a + b)^2$, por lo tanto, esta área es: $A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

f) Utilizando la ecuación anterior, reemplaza los valores que obtuviste para cada área desde A_1 hasta A_4

$(a + b)^2 =$ _______ + _______ + _______ + _______ y al reducir términos semejantes resulta: $(a + b)^2 =$ _______ + _______ + _______

Esta última expresión corresponde a un trinomio denominado trinomio cuadrado perfecto, en el cual, al factorizarla, la respuesta es $(a + b)^2$

g) Observa el siguiente ejemplo en el que se vinculan valores algebraicos y se relacionan con la deducción anterior.

$$36x^2 + 12xy^2 + y^4$$

Es un trinomio cuadrado perfecto porque:

El primer término es el cuadrado de $6x$, ya que $(6x)^2 = 36x^2$

El último término es el cuadrado de y^2, ya que $(y)^{2^2} = y^4$

El término de la mitad es el doble producto de las dos raíces cuadradas anteriores, que para el caso son: $\sqrt{36x^2} = 6x$ y $\sqrt{y^4} = y^2$

Además, se cumple que: $2 * 6x * y^2 = 12xy^2$

Así: $(6x + y^2)^2 = (6x + y^2) * (6x + y^2) = 36x^2 + 12xy^2 + y^4$

Por tanto, al factorizar la expresión $36x^2 + 12xy^2 + y^4$, resulta la expresión $(6x + y^2)^2$

Si volvemos a la primera tabla, podrás observar que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, de igual forma se deduce que:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ y que $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$(6x - y^2)^2 = (6x - y^2) * (6x - y^2) = 36x^2 + 12xy^2 + y^4$

Es decir, que al **factorizar** el trinomio $36x^2 - 12xy^2 + y^4$, resulta $(6x - y^2)^2$

ETAPA DE PROYECTO FINAL DE SÍNTESIS

1. Realiza las factorizaciones de los siguientes trinomios:

a. $x^2 - 2x + 1$ b. $x^2 - 6x + 9$ c. $x^2 - 20x + 100$ d. $x^2 + 10x + 25$

e. $49y^2 + 14y + 1$ f. $81z^2 - 180z + 100$ g. $x^2 + 14x + 49$ h. $4 - 4x + x^2$

i. $4x^2 + 12x + 9$ j. $x^2y^2 + 8xy + 16$ k. $25m^2 - 10mn + n^2$ l. $m^2n^2 + 10mn + 25$

2. Ahora haz el mismo proceso, pero con los siguientes números:

a. $36 + 84 + 49$ b. $25 + 80 + 64$ c. $81 + 108 + 36$ d. $100 + 80 + 16$

e. $64 - 144 + 81$ f. $36 - 132 + 121$ g. $1 - 6 + 9$ h. $169 - 52 + 4$

3. Realiza el proceso numérico que se utilizó en el numeral 8 de la guía, utilizando esta vez las medidas de los cuadrados según las siguientes indicaciones:

a. Cuadrado grande con medida 5 y cuadrado pequeño con medida 3

b. Cuadrado grande con medida 8 y cuadrado pequeño con medida 2

c. Cuadrado grande con medida 10 y cuadrado pequeño con medida 4

d. Cuadrado grande con medida 12 y cuadrado pequeño con medida 5

e. Cuadrado grande con medida 7 y cuadrado pequeño con medida 1

ANEXO 10

Respuestas de estudiantes a preguntas 3.1.1 a 3.1.7. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

Grupo	Pregunta 3.1.1	Pregunta 3.1.2	Pregunta 3.1.3	Pregunta 3.1.4	Pregunta 3.1.5	Pregunta 3.1.6	Pregunta 3.1.7
1	15	9	144	72	153	225	225
2	15	9	144	72	153	225	225
3	15	9	144	72	153	225	225
4	15	9	144	72	153	225	225
5	15	9	144	72	153	225	225
6	15	9	144	72	153	225	225
7	15	9	144	72	153	225	225
8	15	9	144	72	153	225	222
9	15	3^2	12^2	72	30	30	102
10	15	9	144	72	153	225	225

ANEXO 11

Respuestas de estudiantes a preguntas 3.2.1 a 3.2.7. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

Grupo	Pregunta 3.2.1	Pregunta 3.2.2	Pregunta 3.2.3	Pregunta 3.2.4	Pregunta 3.2.5	Pregunta 3.2.6	Pregunta 3.2.7
1	1	36	49	84	85	1	169
2	-1	36	49	-84	85	1	1
3	13	36	49	-84	85	-169	-169
4	13	36	49	-84	85	169	169
5	1	36	49	-84	85	1	1
6	1	36	49	-84	85	1	1
7	13	36	49	-84	85	1	1
8	12	36	49	84	85	144	169
9	1	8	49	-84	96	2	-23
10	1	36	49	-84	85	1	1

ANEXO 12

Respuestas de estudiantes a preguntas 3.3.1 a 3.3.7. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

Grupo	Pregunta 3.3.1	Pregunta 3.3.2	Pregunta 3.3.3	Pregunta 3.3.4	Pregunta 3.3.5	Pregunta 3.3.6	Pregunta 3.3.7
1	-2	25	49	70	29	4	144
2	-2	25	49	-70	74	4	4-12
3	-12	25	49	-70	74	144	144
4	-12	25	49	-70	74	144	144
5	-2	25	49	-70	74	4	4
6	-2	25	49	-70	-24	-4	-4
7	-12	25	49	-70	74	4	4
8	-2	25	49	70	74	4	144
9	-2	10	14	-100	19	4	-81
10	-2	25	49	-70	74	4	4

ANEXO 13

Respuestas de estudiantes a preguntas 3.4.1 a 3.4.7. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

Grupo	Pregunta 3.4.1	Pregunta 3.4.2	Pregunta 3.4.3	Pregunta 3.4.4	Pregunta 3.4.5	Pregunta 3.4.6	Pregunta 3.4.7
1	16	-81	-49	126	-130	256	256
2	-16	81	49	126	130	256	256
3	16	81	49	-126	130	256	156
4	-16	81	49	126	130	256	256
5	-16	81	49	126	130	256	256
6	-16	81	49	-126	130	256	256
7	16	81	49	126	130	256	256
8	-2	81	49	126	110	-4	256
9	-16	81	49	126	130	256	256-12
10	-12	81	49	123	130	256	256

ANEXO 14

Respuestas de estudiantes a preguntas 3.5.1 a 3.5.7. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

Grupo	Pregunta 3.5.1	Pregunta 3.5.2	Pregunta 3.5.3	Pregunta 3.5.4	Pregunta 3.5.5	Pregunta 3.5.6	Pregunta 3.5.7
1	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
2	$\frac{53}{42}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{30}{42}$	$\frac{1549}{1764}$	$\frac{3136}{1764}$	$\frac{3136}{1764}$
3	$\frac{53}{42}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{25}{36}$	42	$\frac{2877}{378}$	N.R.	N.R.
4	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
5	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
6	$\frac{53}{48}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{30}{49}$	$\frac{1405}{1764}$	$\frac{2809}{2304}$	$\frac{2746}{2304}$
7	$\frac{53}{42}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{30}{42}$	$\frac{1549}{1764}$	$\frac{2809}{1764}$	$\frac{2809}{1764}$
8	$\frac{53}{42}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{25}{36}$	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
9	$\frac{37}{21}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{30}{42}$	$\frac{200}{168}$	$\frac{1569}{441}$	$\frac{620}{441}$
10	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.

ANEXO 15

Respuestas de estudiantes a preguntas 3.6.1 a 3.6.7. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

Grupo	Pregunta 3.6.1	Pregunta 3.6.2	Pregunta 3.6.3	Pregunta 3.6.4	Pregunta 3.6.5	Pregunta 3.6.6	Pregunta 3.6.7
1	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
2	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
3	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
4	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
5	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
6	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
7	$\frac{-26}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{121}{4}$	$\frac{198}{8}$	$\frac{2260}{64}$	$\frac{2704}{4096}$	$\frac{2704}{4096}$
8	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
9	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
10	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.

ANEXO 16

Respuestas de estudiantes a preguntas 3.7.1 a 3.7.7. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

Grupo	Pregunta 3.7.1	Pregunta 3.7.2	Pregunta 3.7.3	Pregunta 3.7.4	Pregunta 3.7.5	Pregunta 3.7.6	Pregunta 3.7.7
1	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
2	$\sqrt{5}+\sqrt{8}$	5	8	$2\sqrt{40}$	13	$13+2\sqrt{40}$	$13+2\sqrt{40}$
3	13	5	8	80	13	169	5+80+8
4	$\sqrt{5}+\sqrt{8}$	5	8	$2\sqrt{40}$	13	$13+2\sqrt{40}$	$10+2\sqrt{40}$
5	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
6	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
7	$\sqrt{5}+\sqrt{8}$	5	8	$2\sqrt{40}$	13	$13+2\sqrt{6}$	N.R.
8	$\sqrt{5}+\sqrt{8}$	5	8	$2\sqrt{80}$	13	$13+8\sqrt{69}$	$13+8\sqrt{69}$
9	$\sqrt{5}+\sqrt{8}$	5	8	$2\sqrt{16}$	11	N.R.	N.R.
10	$\sqrt{5}+\sqrt{8}$	5	8	$2*\sqrt{5}*\sqrt{8}$	5+8	$(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2$	10+ +3

ANEXO 17

Respuestas de estudiantes a preguntas 3.8.1 a 3.8.7. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

Grupo	Pregunta 3.8.1	Pregunta 3.8.2	Pregunta 3.8.3	Pregunta 3.8.4	Pregunta 3.8.5	Pregunta 3.8.6	Pregunta 3.8.7
1	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
2	$\sqrt{6}+\sqrt{-7}$	6	7	$2\sqrt{42}$	13	$13+2\sqrt{42}$	$13+2\sqrt{42}$
3	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
4	$\sqrt{6}+-\sqrt{7}$	6	7	$2\sqrt{42}$	12	$12+2\sqrt{42}$	$9+2\sqrt{42}$
5	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
6	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
7	$\sqrt{6}+\sqrt{7}$	6	-7	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
8	$\sqrt{6}+(-\sqrt{7})$	6	7	$2\sqrt{84}$	-1	$-1+7\sqrt{49}$	$1+7\sqrt{49}$
9	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
10	$\sqrt{6}+(-\sqrt{7})$	6	7	$2*\sqrt{6}*)-\sqrt{7})$	10+(-3)	$(\sqrt{10}+(-\sqrt{3})^2$	N.R.

ANEXO 18

Análisis preliminar de respuestas dadas por los estudiantes al taller de trinomio cuadrado perfecto

No pregunta	Observaciones
3.1.1	Todos los grupos respondieron 15, siendo esta la respuesta correcta.
3.1.2	9 grupos respondieron 9, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo respondió 3^2, siendo implícitamente esta respuesta correcta.
3.1.3	9 grupos respondieron 144, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo respondió 12^2, siendo implícitamente esta respuesta correcta.
3.1.4	Todos los grupos respondieron 72, siendo esta la respuesta correcta.
3.1.5	9 grupos escribieron 153, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número incorrecto.
3.1.6	9 grupos escribieron 225, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número incorrecto.
3.1.7	9 grupos escribieron 225, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número incorrecto.
3.2.1	5 grupos escribieron 1, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos escribieron 13, uno escribió 12 y uno escribió -1, siendo estas respuestas incorrectas.
3.2.2	9 grupos escribieron 36, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió una respuesta incorrecta.
3.2.3	Todos los grupos escribieron 49, siendo esta la respuesta correcta.
3.2.4	8 grupos escribieron -84, siendo esta la respuesta correcta. 2 grupos escribieron84, siendo esta respuesta incorrecta.
3.2.5	9 grupos escribieron 85, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió una respuesta incorrecta.
3.2.6	6 grupos escribieron 1, siendo esta la respuesta correcta. 4 grupos escribieron otros números que no correspondían con la respuesta correcta.

No pregunta	Observaciones
3.2.7	5 grupos escribieron 1, siendo esta la respuesta correcta. 5 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta.
3.3.1	7 grupos escribieron -2, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta.
3.3.2	9 grupos escribieron 25, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número que no corresponde con la respuesta correcta.
3.3.3	9 grupos escribieron 49, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número que no corresponden con la respuesta correcta.
3.3.4	7 grupos escribieron -70, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta.
3.3.5	7 grupos escribieron 74, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta.
3.3.6	7 grupos escribieron 4, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta.
3.3.7	Tan solo 3 grupos escribieron 4, siendo esta la respuesta correcta. 7 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta.
3.4.1	5 grupos escribieron -16, siendo esta la respuesta correcta. 5 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta.
3.4.2	9 grupos escribieron 81, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número que no corresponde con la respuesta correcta.
3.4.3	9 grupos escribieron 49, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número que no corresponde con la respuesta correcta.
3.4.4	7 grupos escribieron 126, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta.
3.4.5	8 grupos escribieron 130, siendo esta la respuesta correcta. 2 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta.
3.4.6	9 grupos escribieron 256, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número que no corresponde con la respuesta correcta.

No pregunta	Observaciones
3.4.7	8 grupos escribieron 256, siendo esta la respuesta correcta. 2 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta
3.5.1	4 grupos escribieron $\frac{53}{42}$, siendo esta la respuesta correcta. 2 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta. 4 grupos no respondieron.
3.5.2	5 grupos escribieron $\frac{9}{49}$, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número que no corresponde con la respuesta correcta. 4 grupos no respondieron.
3.5.3	5 grupos escribieron $\frac{25}{36}$, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número que no corresponde con la respuesta correcta. 4 grupos no respondieron.
3.5.4	3 grupos escribieron $\frac{30}{42}$, siendo esta la respuesta correcta, aunque faltó simplificarla. 2 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta. 5 grupos no respondieron.
3.5.5	Ningún grupo escribió la respuesta correcta. 5 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta. 5 grupos no respondieron.
3.5.6	Un grupo escribió $\frac{2809}{1764}$, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta. 6 grupos no respondieron
3.5.7	Un grupo escribió $\frac{2809}{1764}$, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta. 6 grupos no respondieron.

No pregunta	Observaciones
3.6.1	Un grupo escribió $\frac{-26}{8}$, siendo esta la respuesta correcta, aunque faltó simplificarla 9 grupos no respondieron.
3.6.2	Un grupo escribió $\frac{81}{16}$, siendo esta la respuesta correcta. 9 grupos no respondieron.
3.6.3	Un grupo escribió $\frac{121}{4}$, siendo esta la respuesta correcta. 9 grupos no respondieron.
3.6.4	Un grupo escribió $\frac{198}{8}$, siendo esta respuesta incorrecta. 9 grupos no respondieron.
3.6.5	Un grupo escribió $\frac{2260}{64}$, siendo esta la respuesta correcta, aunque faltó simplificarla. 9 grupos no respondieron.
3.6.6	Un grupo escribió $\frac{2704}{4096}$, siendo esta respuesta incorrecta. 9 grupos no respondieron.
3.6.7	Un grupo escribió $\frac{2704}{4096}$, siendo esta respuesta incorrecta. 9 grupos no respondieron.
3.7.1	6 grupos escribieron $\sqrt{5}+\sqrt{8}$, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número que no corresponde con la respuesta correcta 3 grupos no respondieron.
3.7.2	7 grupos escribieron 5, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos no respondieron.
3.7.3	7 grupos escribieron 8 siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos no respondieron.
3.7.4	Sólo 3 grupos escribieron $2\sqrt{40}$, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió $2 * \sqrt{5} * \sqrt{8}$, siendo esta una respuesta válida, aunque no está reducida. 3 grupos escribieron un número que no corresponde con la respuesta correcta 3 grupos no respondieron.

No pregunta	Observaciones
3.7.5	5 grupos escribieron 13, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió 5+8, siendo esta una respuesta válida. Un grupo escribió un número que no corresponde con la respuesta correcta 3 grupos no respondieron.
3.7.6	3 grupos escribieron $13 + 2\sqrt{40}$, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió $(\sqrt{5} + \sqrt{8})^2$, siendo esta una respuesta válida. 2 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta 4 grupos no respondieron.
3.7.7	Sólo un grupo escribió $13 + 2\sqrt{40}$, siendo esta la respuesta correcta. 4 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta 5 grupos no respondieron.
3.8.1	3 grupos escribieron $\sqrt{6}$+$(-\sqrt{7})$, siendo esta la respuesta correcta. 2 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta 5 grupos no respondieron.
3.8.2	5 grupos escribieron 6), siendo esta la respuesta correcta. 5 grupos no respondieron.
3.8.3	4 grupos escribieron 7, siendo esta la respuesta correcta. Un grupo escribió un número que no corresponde con la respuesta correcta. 5 grupos no respondieron.
3.8.4	Ningún grupo escribió la respuesta correcta. Un grupo escribió 2*($\sqrt{6}$*$(-\sqrt{7})$, siendo esta respuesta válida. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta. 6 grupos no respondieron.
3.8.5	Un grupo escribió 13, siendo esta la respuesta correcta. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta 6 grupos no respondieron.

No pregunta	Observaciones
3.8.6	Ningún grupo escribió la respuesta correcta. 4 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta 6 grupos no respondieron.
3.8.7	Ningún grupo escribió la respuesta correcta. 3 grupos escribieron números que no corresponden con la respuesta correcta 7 grupos no respondieron.

ANEXO 19

Respuestas de estudiantes a preguntas 5.a. a 5.6. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	5.a	5.b	5.c	5.d	5.e
1	7	11	15	3	7.2 no justifica
2	7	11	15	3	7.0 porque al sacarle la raíz no tiene un número exacto.
3	7	11	15	3	N.R.
4	7	11	15	3	Porque no tiene un número que multiplicado por sí mismo dé 50
5	7	11	15	3	7.0 porque ni es exacto.
6	7	11	15	3	5
7	7	11	15	3	7.07
8	7	11	15	3	5
9	7	11	15	3	Porque ningún número al multiplicarlo por él mismo nos da 50
10	7	11	15	3	7

ANEXO 20

Respuestas de estudiantes a preguntas 5.f. a 5.j. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	**5.f**	**5.g**	**5.h**	**5.i**	**5.j**
1	N.R	$3y^2$	$8a^8$	$10a^{4n}m^{6n}$	4.2 no justifica
2	x	$3y^8$	$8a^{16}$	$10a^{8n2}m^{12n2}$	4.4a^3 la raíz sale pero no un número exacto.
3	x	$3y^2$	$8a^4$	$10a^{4n}m^{3n}$	$4a$
4	1	$3y^2$	$8a^4$	$10a^{2n}m^{3n}$	Porque no tiene un número que multiplicado por sí mismo dé 20a^3
5	x	$3y^2$	$8a^4$	$10a^{2n}m^{3n}$	4.4 porque ni es exacto.
6	x	$3y^2$	$8a^4$	$10a^{2n}m^{3n}$	$5a$
7	x	$3y^2$	$8a^4$	$10a^{2n}m^{3n}$	$10a$
8	N.R	$81y^4$	$40a^8$	$10a^{4n}m^{6n}$	$400a^3$
9	N.R	N.R	N.R	N.R	N.R
10	x	$3y^2$	$8a^4$	$10a^{2n}m^{3n}$	4

ANEXO 21

Respuestas de estudiantes a pregunta 6.b. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	Respuesta	Observaciones
1	576	Realizan las operaciones según lo indicado
2	Incompleta	Realizan las operaciones parcialmente.
3	Incompleta	Realizan las operaciones parcialmente.
4	576	Realizan las operaciones según lo indicado
5	576	Realizan las operaciones según lo indicado
6	576	Realizan las operaciones según lo indicado
7	576	Realizan las operaciones según lo indicado
8	Incompleta	Realizan las operaciones parcialmente.
9	Incompleta e incorrecta	Realizan las operaciones parcialmente.
10	576	Realizan las operaciones según lo indicado

ANEXO 22

Respuestas de estudiantes a pregunta 6.c. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	Respuesta	Observaciones
1	25	Realizan las operaciones según lo indicado
2	Incompleta	Realizan las operaciones parcialmente.
3	Incompleta e incorrecta	Realizan las operaciones parcialmente.
4	25	Realizan las operaciones según lo indicado
5	25	Realizan las operaciones según lo indicado
6	25	Realizan las operaciones según lo indicado
7	25	Realizan las operaciones según lo indicado
8	Incompleta	Realizan las operaciones parcialmente.
9	N.R.	
10	25	Realizan las operaciones según lo indicado

ANEXO 23

Respuestas de estudiantes a pregunta 6.d. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	Respuesta	Observaciones
1	16	Realizan las operaciones según lo indicado
2	Incompleta	Realizan las operaciones parcialmente.
3	Incompleta	Realizan las operaciones parcialmente.
4	16	Realizan las operaciones según lo indicado
5	16	Realizan las operaciones según lo indicado
6	-16 y 16	Realizan las operaciones según lo indicado con errores de signos.
7	16	Realizan las operaciones según lo indicado
8	Incompleta	Realizan las operaciones parcialmente.
9	N.R.	
10	16	Realizan las operaciones según lo indicado

ANEXO 24

Respuestas de estudiantes a pregunta 6.g. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	Respuesta	Observaciones
1	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
2	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
3	N.R.	
4	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
5	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
6	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
7	Incompleta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
8	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
9	N.R.	
10	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.

ANEXO 25

Respuestas de estudiantes a pregunta 6.i. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	Respuesta	Observaciones
1	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
2	N.R.	
3	N.R.	
4	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
5	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
6	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
7	Incompleta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
8	Incorrecta	No realizan las operaciones
9	N.R.	
10	N.R.	

ANEXO 26

Respuestas de estudiantes a pregunta 6.j. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	Respuesta	Observaciones
1	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
2	N.R.	
3	Incorrecta	No realizan las operaciones
4	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
5	N.R.	
6	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
7	Incompleta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
8	Incorrecta	No realizan las operaciones
9	N.R.	
10	N.R.	

ANEXO 27

Respuestas de estudiantes a pregunta 6.l. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	Respuesta	Observaciones
1	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores, hacen conversión a decimales.
2	N.R.	
3	Incorrecta	No realizan operaciones.
4	Incorrecta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
5	N.R.	
6	N.R.	
7	Incompleta	Realizan las operaciones según lo indicado, pero con errores.
8	Incorrecta	No realizan las operaciones
9	N.R.	
10	N.R.	

ANEXO 28

Respuestas de estudiantes a pregunta 7a. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	Respuesta	Observaciones
1	Incorrecta	Hacen un ejemplo, pero no la deducción de la equivalencia.
2	Correcta	Hacen la deducción de la equivalencia.
3	Incorrecta	Hacen deducción inadecuada de la equivalencia.
4	Incorrecta	Hacen deducción inadecuada de la equivalencia.
5	Correcta	Hacen la deducción de la equivalencia.
6	Correcta	Hacen la deducción de la equivalencia.
7	Correcta	Hacen la deducción de la equivalencia.
8	N.R.	
9	N.R.	
10	N.R.	

ANEXO 29

Respuestas de estudiantes a pregunta 7b. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	Respuesta	Observaciones
1	Incorrecta	Hacen un ejemplo, pero no la deducción de la equivalencia.
2	N.R.	
3	Incorrecta	Hacen deducción inadecuada de la equivalencia.
4	Incorrecta	Hacen deducción inadecuada de la equivalencia.
5	Correcta	Hacen la deducción de la equivalencia.
6	Correcta	Hacen la deducción de la equivalencia.
7	Incorrecta	Hacen la deducción de la equivalencia con errores de signos.
8	N.R.	
9	N.R.	
10	N.R.	

ANEXO 30

Análisis de respuestas de la sesión dos del taller de trinomio cuadrado perfecto.

No pregunta	Observaciones
5a	Todos los grupos respondieron correcto.
5b	Todos los grupos respondieron correcto.
5c	Todos los grupos respondieron correcto.
5d	Todos los grupos respondieron correcto.
5e	3 grupos responden adecuadamente, argumentando que no tienen raíz exacta. 6 grupos escriben respuestas incorrectas. Un grupo no responde.
5f	6 grupos responden adecuadamente. Un grupo escribe una respuesta incorrecta. 3 grupos no responden.
5g	7 grupos responden adecuadamente. 2 grupo escribe una respuesta incorrecta. Un grupo no responde.
5h	6 grupos responden adecuadamente. 3 grupo escribe una respuesta incorrecta. Un grupo no responde.
5i	5 grupos responden adecuadamente. 4 grupo escribe una respuesta incorrecta. Un grupo no responde.
5j	3 grupos responden adecuadamente, argumentando que no tienen raíz exacta. 6 grupos escriben respuestas incorrectas. Un grupo no responde.
6b	6 grupos responden correctamente y hacen las operaciones pertinentes. 3 grupos inician el proceso, pero no lo terminan. Un grupo empieza el proceso mal y no lo termina.

No pregunta	Observaciones
6c	6 grupos responden correctamente y hacen las operaciones pertinentes. 2 grupos inician el proceso, pero no lo terminan. Un grupo empieza el proceso mal y no lo termina. Un grupo no responde.
6d	5 grupos responden correctamente y hacen las operaciones pertinentes. 3 grupos inician el proceso, pero no lo terminan. Un grupo realiza mal el proceso. Un grupo no responde.
6g	Ningún grupo responde bien. 7 grupos responden incorrectamente. Un grupo inician el proceso, pero no lo terminan. 2 grupos no responden.
6i	Ningún grupo responde bien. 5 grupos responden incorrectamente. Un grupo inician el proceso, pero no lo terminan. 4 grupos no responden.
6j	Ningún grupo responde bien. 5 grupos responden incorrectamente. Un grupo inician el proceso, pero no lo terminan. 4 grupos no responden.
6l	Ningún grupo responde bien. 4 grupos responden incorrectamente. Un grupo inician el proceso, pero no lo terminan. 5 grupos no responden.
7a	4 grupos deducen correctamente la fórmula de suma de binomio al cuadrado. 3 grupos hacen mal la deducción de la fórmula. 3 grupos no responden.

No pregunta	Observaciones
7b	2 grupos deducen correctamente la fórmula de resta de binomio al cuadrado. 4 grupos hacen mal la deducción de la fórmula. 4 grupos no responden.

ANEXO 31

Respuestas de estudiantes a preguntas 8.a. a 8.e. de taller de trinomio cuadrado perfecto.

No grupo	**No pregunta**			
	8.a.	8.b.	8.c.	8.e.
1	a^2	b^2	a^2 y b^2	$(a+b)^2+(b+a)^2+(a+b)$
2	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
3	a^2	b^2	a^2 y b^2	$a+b+a+b+a\pm b$
4	a^2	a^2	a^2	a^2
5	a^2	b^2	$ab \quad y \quad ab$	a^2+b^2+2ab
6	a^2	b^2	$ab \quad y \quad ab$	a^2+b^2+2ab
7	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.
8	a^2	N.R.	N.R.	N.R.
9	a^2	b^2	$a^2 * b^2$	$a^2+b^2+a+b^2+a+b^2$
10	a^2	a^8	a^4 y a^6	$a+b^2+b+a^2+(a+b)^2+(a+b)^2$